Examen de Física I (19-06-12).

Solución test de teoría: **código** 31-4702

221212222211221111121211111211222211

Solución test de problemas: **código** 10-4811

222355

Problema 1

Un jugador de fútbol lanza la pelota en un tiro libre de falta con un ángulo $\theta = 30^o$ con respecto a la horizontal y con una velocidad inicial $v_0 = 15\ \mathrm{m/s}$. En el mismo instante un segundo jugador situado junto a la barrera, a $D = 10$ yardas $(9{,}15\ \mathrm{m})$ y en el plano del movimiento de la pelota, corre para alcanzarla con velocidad constante. La velocidad con que debe correr para rematar la pelota justo cuando ésta llegue al suelo es:

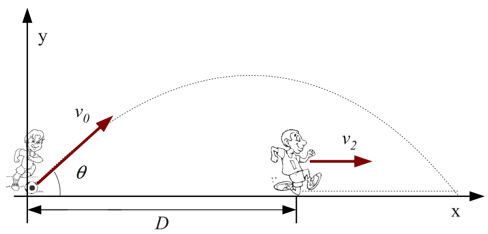
(a) $3{,}56\ \mathrm{m/s}$ (b) $7{,}01\ \mathrm{m/s}$ (c) $9{,}32\ \mathrm{m/s}$ (d) $12{,}84\ \mathrm{m/s}$ (e) Otra diferente

Solución

Planteamiento
En este problema hay que estudiar el movimiento de dos partículas, la pelota que realiza un movimiento parabólico y el pié del segundo jugador que realiza un movimiento rectilíneo uniforme. A partir de las ecuaciones de cada movimiento, y exigiendo que ambas partículas coincidan en el espacio en un instante de tiempo (cuando el segundo jugador remata la pelota), podremos determinar la velocidad que debe llevar el segundo jugador.

Las ecuaciones del movimiento de cada partícula en el sistema de referencia indicado en la figura son:

$$
\begin{aligned}
&\quad Pelota\\
&x_1 = \cancel{x_0} + v_0\cos(\theta)t\\
&y_1 = \cancel{y_0} + v_0\sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2\\
&\quad Jugador\\
&x_2 = D + v_2 t\\
&y_2 = 0
\end{aligned}
$$



Esquema de los movimientos

Calculamos el instante en que la pelota llega al suelo imponiendo $y_1 = 0$:

$$y_1 = v_0\sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2 = 0 \ \rightarrow\ t(v_0\sin(\theta) - \frac{g}{2}t) = 0 \ \rightarrow\quad t = \frac{2v_0\sin(\theta)}{g}$$

En este instante de tiempo se debe cumplir $x_1 = x_2$, de donde podemos despejar v_2:

$$x_1 = x_2 \ \rightarrow\ v_0\cos(\theta)\,t = D + v_2 t \ \rightarrow\ v_2 = v_0\cos(\theta)\,\frac{D}{t}$$

Sustituyendo el valor de t obtenido anteriormente y los datos del problema queda:

$$\boxed{v_2 = 7{,}012\ \mathrm{m/s}}$$

Problema 2

Una partícula se encuentra colgada del extremo de una cuerda de longitud $L = 2{,}5\ \mathrm{m}$ y gira con velocidad constante describiendo una trayectoria circular horizontal. Al girar la cuerda describe la superficie de un cono formando un ángulo $\theta = 30^{\mathrm{o}}$ con respecto la dirección vertical. El tiempo que tarda la partícula en efectuar una vuelta es:

(a) $t = 1{,}87\ \mathrm{s}$ (b) $t = 2{,}29\ \mathrm{s}$ (b) $t = 2{,}64\ \mathrm{s}$ (d) $t = 2{,}95\ \mathrm{s}$ (e) $t = 3{,}32\ \mathrm{s}$

Solución

Planteamiento
La partícula realiza un movimiento circular uniforme (MCU) sometida a la tensión de la cuerda y a su propio peso. La aceleración de la partícula en la dirección radial debe ser la aceleración centrípeta del MCU ($r\omega^2$) y $\sum F_y = 0$ ya que no hay aceleración vertical. Resolviendo el sistema de ecuaciones que surgen de aplicar la segunda ley de Newton podremos encontrar ω y por lo tanto el periodo del movimiento.

Sobre la partícula actúan la fuerza T y el peso. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular uniforme, como se comenta en el planteamiento:

$$\sum F_x = -T\sin\theta = -m\omega^2 r$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

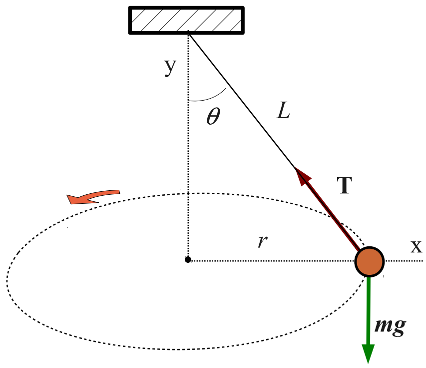


Diagrama de fuerzas

Sustituyendo en $\sum F_x$ el valor de T y teniendo en cuenta que $r = L\sin\theta$, podemos despejar ω y por lo tanto obtener el periodo (P) del movimiento.

$$\sum F_x = -\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\cancel{\sin\theta} = -\cancel{m}\omega^2 L\cancel{\sin\theta} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L\cos\theta} \rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

Sustituyendo los datos del problema obtenemos:

$$P = 2{,}95\ \mathrm{s}$$

Problema 3

La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas en función del tiempo es $\vec{P} = 3t^2\vec{i} - 6t\vec{j}$ (en unidades del S.I.). Si la masa total del sistema es $M = 1$ kg y en el instante inicial el centro de masa se encuentra en la posición $\vec{r}_0 = -\vec{i} + 3\vec{j}$ (en metros), la distancia del centro de masa al origen en $t = 3{,}5$ s es:

(a) $11{,}40$ m (b) $35{,}38$ m (c) $46{,}20$ m (d) $21{,}49$ m (e) $53{,}78$ m

Solución

Planteamiento
Como $\vec{P}(t) = M\vec{v}_{CM}$, podemos obtener $\vec{v}_{CM}(t)$, e integrando $\vec{v}_{CM}(t)$ obtenemos $\vec{r}_{CM}(t)$. Luego sólo tendremos buscar el módulo de $\vec{r}_{CM}$ para $t = 3{,}5$ s lo que nos dará la distancia del centro de masa al origen.

Obtengo $\vec{v}_{CM}(t)$ a partir de $\vec{P}(t) = M\vec{v}_{CM}$:

$$\vec{P}(t) = M\vec{v}_{CM} = 3t^2\vec{i} - 6t\vec{j} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} v_x &= \frac{3t^2}{M} \\ v_y &= \frac{-6t}{M} \end{aligned}$$

Integrando en función del tiempo encuentro x_{CM} e y_{CM}:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \int v_x \, dt = \int \frac{3t^2}{M} \, dt = \frac{t^3}{M} + x_0 \\ y_{CM} &= \int v_y \, dt = \int \frac{-6t}{M} \, dt = \frac{-3t^2}{M} + y_0 \end{aligned}$$

donde $x_0 = -1$ e $y_0 = 3$ ya que la posición inicial es $\vec{r}_0 = -\vec{i} + 3\vec{j}$ (en unidades del SI).

La distancia del CM al origen, d, la obtengo a partir del módulo de $\vec{r}_{CM}$:

$$d = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2} = \sqrt{(t^3 - 1)^2 + (-3t^2 + 3)^2}$$

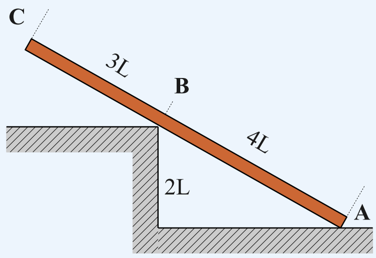
donde se ha tenido en cuenta que $M = 1$ kg.

Sustituyendo para $t = 3{,}5$ s nos queda:

$$d = 53{,}78 \text{ m}$$

Problema 4

El extremo A de una varilla de longitud $7L$ ($L = 1$ m) se desplaza con una velocidad horizontal constante de 20 $\mathrm{m/s}$ hacia la derecha del dibujo. Si la varilla desliza sobre el escalon B como se muestra en la figura, la velocidad angular ω de la varilla en el instante representado es:



(a) $1{,}25$ rad/s (b) $0{,}625$ rad/s (c) $1{,}875$ rad/s (d) $2{,}5$ rad/s (e) $5{,}8$ rad/s

Solución

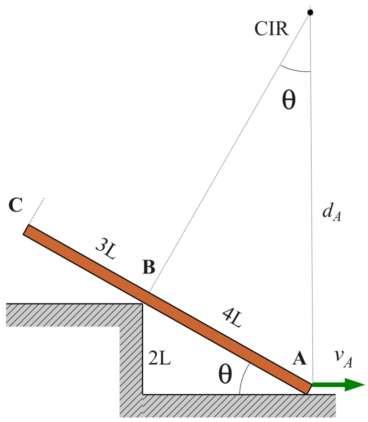
Planteamiento
Podemos resolver este problema localizando el centro instantáneo de rotación (CIR) del movimiento y utilizar luego la relación $v_A = \omega d_A$ donde d_A es la distancia del punto A al CIR.

Para localizar el CIR trazamos las perpendiculares a las velocidades de los punto A y B de la barra:

Como estas rectas son perpendiculares al suelo y a la barra respectivamente, entre ellas deben formar el ángulo θ que forma la barra con el suelo.

El seno de este ángulo vale:

$$\sin\theta = \frac{2\cancel{L}}{4\cancel{L}} = \frac{1}{2}$$



CIR del movimiento

Utilizando ahora el triángulo 'A, B, CIR', se debe cumplir:

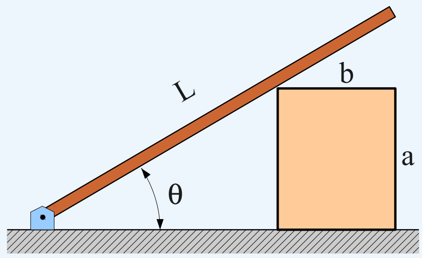
$$\sin\theta = \frac{4L}{d_A} \;\rightarrow\; d_A = \frac{4L}{\sin\theta} = 8L$$

y finalmente, expresenado v_A en función de ω y su distancia al CIR y sustituyendo numéricamente:

$$v_A = \omega d_A \;\rightarrow\; \omega = \frac{v_A}{d_A} = \frac{v_A}{8L} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$$

Problema 5

Una barra de $m = 30$ kg de masa y $L = 2$ m de longitud está articulada en un extremo y se apoya sobre una caja rectangular de $M = 20$ kg de masa y dimensiones $a = 0{,}75$ m y $b = 0{,}5$ m. Existe rozamiento entre la caja y el plano horizontal. Sabiendo que el ángulo que forma la barra con el suelo es $\theta = 30^o$, determinar el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para que la caja no deslice.



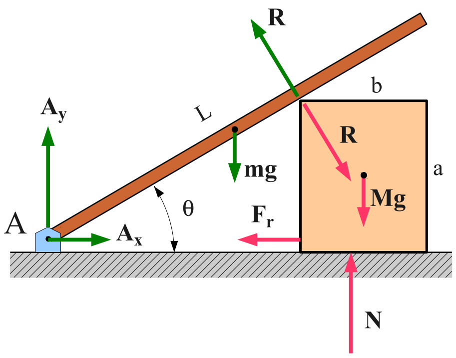
(a) $\mu = 0{,}35$ (b) $\mu = 0{,}70$ (c) $\mu = 0{,}55$ (d) $\mu = 0{,}15$ (e) $\mu = 0{,}25$

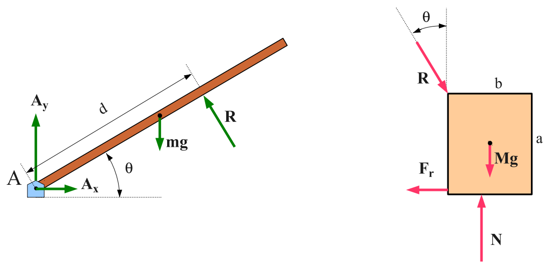
Solución

Planteamiento

La caja se moverá (o no) según el valor de la fuerza R entre la barra y la caja. Podemos determinar el valor de R a partir de las condiciones de equilibrio para la barra. Una vez tenemos R, podemos determinar el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para que no se mueva, estableciendo las condiciones de equilibrio para la caja en movimiento inminente (cuando $F_r = F_{r,max} = \mu N$).

Dibujamos las fuerzas que actúan sobre la barra y sobre la caja y los diagramas de sólido libre:





Diagramas de sólido libre

Para determinar R hacemos $\sum M_A = 0$ en la barra:

$$\sum M_A = -mg\frac{L}{2}\cos\theta + Rd = 0 \;\rightarrow\; R = \frac{mgL\cos\theta}{2d}$$

La distancia d se puede obtener a partir del ángulo θ:

$$\sin\theta = \frac{d}{a} \;\rightarrow\; d = \frac{a}{\sin\theta}$$

y sustituyendo d en la expresión de R, y con los datos del problema queda:

$$R = mg\frac{L\cos\theta\sin\theta}{2a} = 169{,}74\ \mathrm{N}$$

Trabajamos ahora con las ecuaciones de equilibrio de la caja, $\sum \vec{F} = 0$, para relacionar μ con R:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = R\sin\theta - F_r = 0 \\ &\sum F_y = N - Mg - R\cos\theta = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = Mg + R\cos\theta \end{aligned}$$

Imponiendo que $F_r = \mu N$ (movimiento inminente), y sustituyendo la expresión de N en $\sum F_x$ determinamos μ en función de R:

$$\sum F_x = R\sin\theta - \mu N = 0 \;\rightarrow\; \mu(Mg + R\cos\theta) = R\sin\theta \;\rightarrow\; \mu = \frac{R\sin\theta}{Mg + R\cos\theta}$$

Sustituyendo el valor calculado de R y los datos del problema queda finalmente:

$$\boxed{\mu = \frac{R\cos\theta}{Mg + R\cos\theta} = 0{,}247 \text{ N}}$$

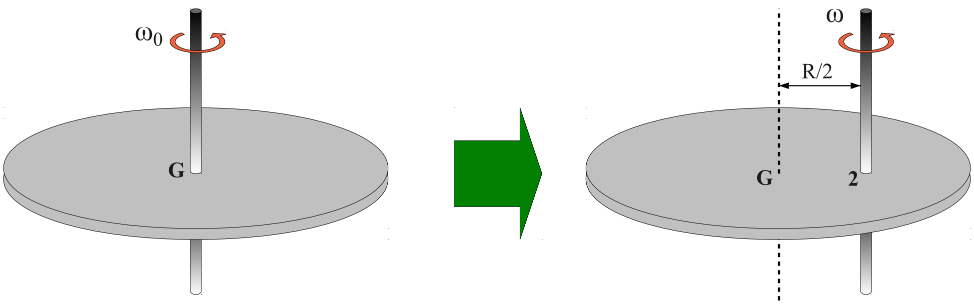
Problema 6

Un disco circular homogéneo de radio R gira en su plano, con una velocidad angular ω_0 y alrededor de un eje normal a él que pasa por su centro. De forma inmediata se deja libre ese eje y se hace girar al disco alrededor de un eje paralelo al anterior situado a una distancia $d = \frac{1}{2}R$ del centro. La nueva velocidad angular es: (Indicación: trabajar con el momento angular del sistema.)

(a) $\omega = \omega_0/12$ (b) $\omega = \omega_0/3$ (c) $\omega = \omega_0/9$ (d) $\omega = \omega_0/19$ (e) $\omega = 2\omega_0/3$

Solución

Planteamiento
Al liberar el eje que pasa por el centro de masa (G), el movimiento del disco cambia debido a las fuerzas, que sólo actúan en el punto 2 (por donde pasa el eje 2). Esto implica que $\sum M_2 = 0$ por lo que $L_2 = cte$. Además como la cantidad de movimiento inicial del disco es nula podemos igualar $L_2 = L_G$, ecuación que nos permitirá determinar la nueva ω del disco.



De acuerdo con el planteamiento realizado, imponemos que $L_2 = L_G$:

$$L_2 = L_G \;\rightarrow\; I_2\,\omega = I_G\,\omega_o \;\rightarrow\; \omega = \omega_o\,\frac{I_G}{I_2}$$

Podemos relacionar I_2 con I_G mediante el teorema de Steiner:

$$I_2 = I_G + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2$$

sustituyendo en la ecuación anterior queda finalmente:

$$\omega = \omega_o\,\frac{\frac{1}{2}\,\cancel{mR^2}}{\frac{3}{4}\,\cancel{mR^2}} = \frac{2\,\omega_o}{3}$$