Tractament d'errors

Una mesura és la comparació d'una magnitud amb una altra que es pren com a referència.

El valor exacte d'una magnitud (X) és una abstracció matemàtica. A la pràctica, sempre mesurarem un valor diferent (x).

$$\text{Error Absolut: } \epsilon_a = x - X$$

$$\text{Error Relatiu: } \epsilon_r = \frac{x-X}{x} = \frac{\epsilon_a}{x}$$

Aquestes definicions no són útils perquè desconeixem X. El procediment per estimar l'error depèn del tipus de mesura:

- Mesures directes que es poden repetir una sola vegada.
- Mesures directes que es poden repetir N vegades.
- Mesures indirectes.

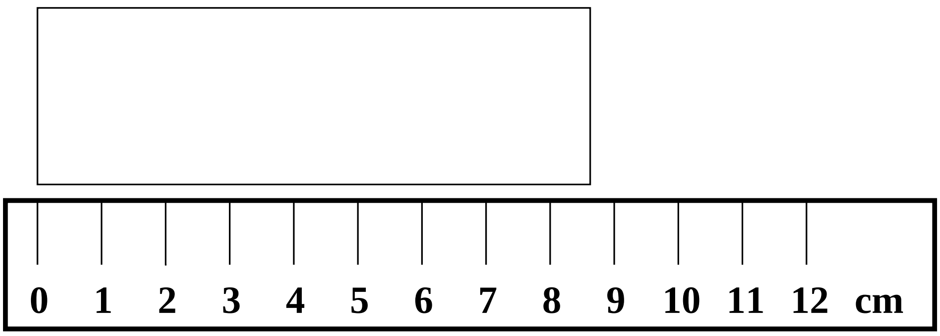
En qualsevol cas, abans de fer una mesura cal assegurar-se de que no hi ha error de zero.

El resultat del tractament d'errors ha de ser un interval que tingui una probabilitat coneguda d'incloure el valor X.

Mesures que es fan 1 vegada

Es considera que l'error es degut exclusivament a les limitacions de l'instrument i s'agafa com a error la resolució de l'instrument.

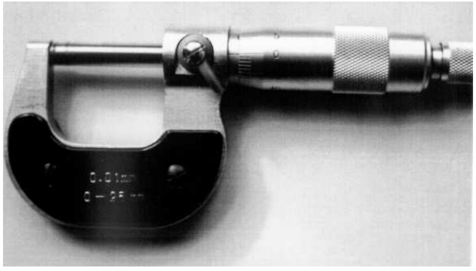
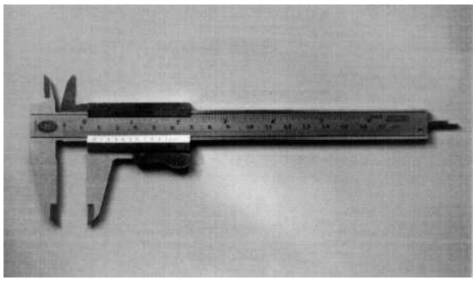
$$X = x \pm \sigma_{res}$$



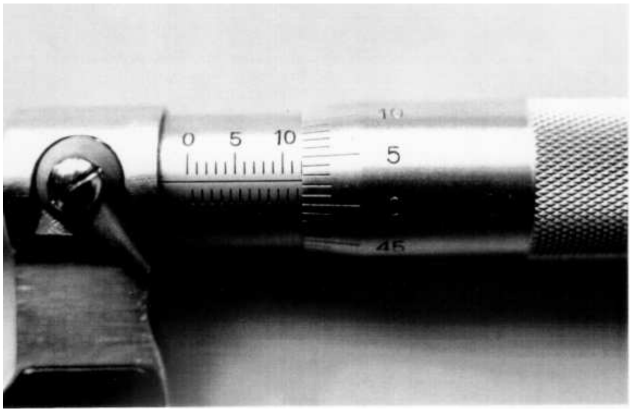
Exemple: $L = 8 \pm 1$

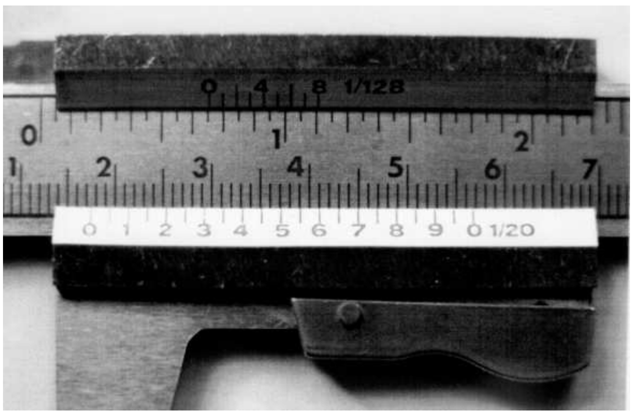
Aquest mètode només s'ha d'utilitzar en una mesura destructiva o quan les mesures adicionals donen el mateix resultat.

Exemple 1 mesura

Aquests instruments s'anomenen *palmer* i *peu de rei.*





Les mesures són $12.02 \pm 0.01\, mm$ i $1.765 \pm 0.005\, cm$

Mesures que es fan N vegades

Si el resultat de N mesures ha estat

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$$

llavors hi ha un 68.27% de probabilitats de que X estigui en un interval definit per la mitja $< x >$ i la desviació estàndar $\sigma_{<x>}$.

$$X = < x > \pm \sigma_{<x>}$$

amb

$$< x > = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sigma_{<x>} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - < x >)^2}{N(N-1)}}$$

Aquesta probabilitat és del 95.45% si doblem l'interval i del 99.74% si el tripliquem.

Normalment es considera que l'error té una part accidental que ve donada per la desviació estàndar, a la qual s'afegeix la resolució de l'instrument per obtenir l'error total de la següent manera

$$\epsilon_x = \sqrt{\sigma_{res}^2 + \sigma_{<x>}^2}$$

El resultat de la mesura s'expressa com

$$X = < x > \pm \epsilon_x$$

Exemple N mesures

Volem mesurar el temps que tarda un mòbil en caure des de 10 m d'alçada. Prenem 3 mesures:

t (s)	1.43	1.40	1.45

En primer lloc calculem la mitja dels valors

$$\langle t \rangle = \frac{1.43 + 1.40 + 1.45}{3} = 1.427\ s$$

Amb aquest resultat podem calcular la desviació estàndar

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{(1.43 - 1.427)^2 + (1.40 - 1.427)^2 + (1.45 - 1.427)^2}{3 \cdot 2}}$$

$$\sigma_{\langle t \rangle} = 0.0145\ s$$

Ara ja tenim els dos errors

error accidental = 0.0145 s

error de resolució = 0.01 s

Calculem l'error total i l'arrodonim a una xifra significativa

$$\epsilon = \sqrt{0.0145^2 + 0.01^2} = 0.0176 \simeq 0.02\ s$$

Finalment, presentem el resultat, arrodonint la mitja de manera que que l'ordre de magnitud del darrer decimal sigui el mateix que el de l'error

$$t = 1.43 \pm 0.02\ s$$

Mesures indirectes

Sovint una magnitud no es mesura directament sinó que es calcula partint d'altres magnituds que s'obtenen experimentalment.

Considerem una magnitud Z que es pot expressar en funció de dues altres magnituds X i Y

$$Z = f(X, Y)$$

Si x i y han estat mesurades experimentalment, després del seu tractament d'errors tenim

$$X =< x > \pm\epsilon_x$$

$$Y =< y > \pm\epsilon_y$$

Podem dir que el resultat de la mesura indirecta de Z és

$$Z =< z > \pm\epsilon_z$$

a on

$$< z >= f(< x >, < y >)$$

$$\epsilon_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \epsilon_y^2}$$

Exemple mesures indirectes

Volem conèixer el volum d'un cilindre un cop hem mesurat el seu radi i la seva alçada

$$r = 1.00 \pm 0.01\, m$$

$$h = 2.00 \pm 0.01\, m$$

La relació entre el volum, el radi i l'alçada és

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Per tant, el volum és

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 6.28\, m^3$$

i el seu error és

$$\epsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V(r,h)}{\partial r}\right)^2 \epsilon_r^2 + \left(\frac{\partial V(r,h)}{\partial h}\right)^2 \epsilon_h^2}$$

$$\epsilon_V = \sqrt{(2\pi r h)^2\, \epsilon_r^2 + (\pi r^2)^2\, \epsilon_h^2}$$

$$\epsilon_V = \sqrt{(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2)^2\, 0.01^2 + (\pi \cdot 1^2)^2\, 0.01^2} = 0.130\, m^3$$

El resultat de la mesura indirecta és, després de fer els arrodoniments

$$V = 6.3 \pm 0.2\, m^3$$

Regressió lineal

Suposem que volem conèixer quina relació hi ha entre dues magnituds experimentals X i Y, que no són independents.

En primer lloc cal mesurar Y quan X té diferents valors. Obtindrem un conjunt de punts:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

La relació més senzilla és la relació lineal

$$Y = a + bX$$

Si considerem que la fiabilitat de tots els punts és igual llavors el millor ajust és

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_x S_{xy}}{D}$$

$$b = \frac{S S_{xy} - S_x S_y}{D}$$

a on

$$S = N, \;\; S_x = \sum_{i=1}^{N} x_i, \;\; S_y = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \;\; S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$D = S S_{xx} - (S_x)^2$$

Coeficient de correlació

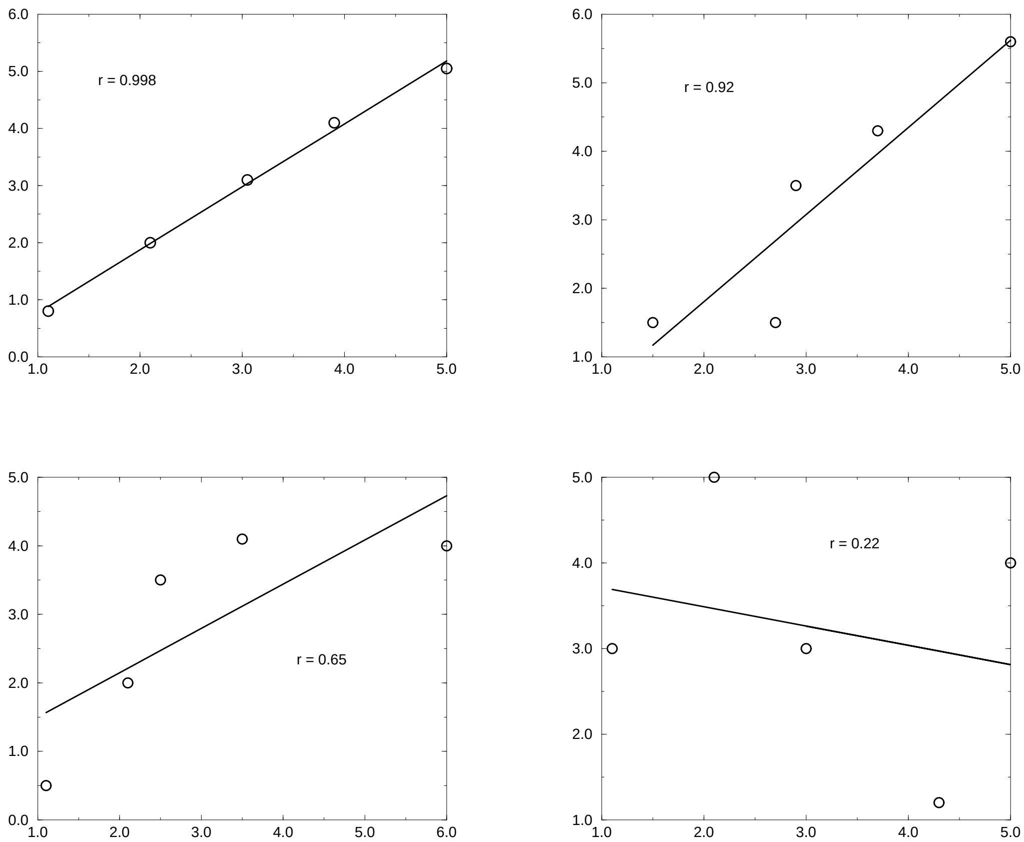
Donat un conjunt de punts

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

podem calcular el seu coeficient de correlació:

$$r = \frac{\sum_{1=1}^{N} (x_i - < x >)(y_i - < y >)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - < x >)^2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - < y >)^2}}$$

El coeficient de correlació té un valor absolut entre 0 i 1 que indica la fiabilitat de la regressió lineal



Relacions no lineals

A vegades la relació entre X i Y pot ser més complicada que una relació lineal. Per exemple:

$$Y = ce^{kX}$$

Encara podem utilitzar el mètode de la regressió lineal per trobar c i k. Només cal trobar dues variables, depenents de X i Y, que tinguin una relació lineal. En aquest cas

$$\ln Y = \ln c + kX$$

Per tant si fem una regressió lineal dels punts

$$(x_1, \ln y_1), (x_2, \ln y_2), \ldots, (x_N, \ln y_N)$$

obtindrem els parametres a i b que caracteritzen la millor recta

$$\ln Y = a + bX$$

Comparant el resultat de la regressió amb el comportament que esperàvem, calculem c i k

$$\ln c = a$$

$$k = b$$