Dinámica de la rotación
Momento de inercia

Objetivo

Determinar los momentos de inercia de varios cuerpos homogéneos.

Material

Discos, cilindro macizo, cilindro hueco, barra hueca, cilindros ajustables a la barra, cuerda, polea, destornillador, cronómetro, regla graduada, pie de rey.

Fundamento teórico

Momento de inercia

Cuando un sólido rígido gira alrededor de un eje fijo realizando un movimiento plano, el momento angular L_O puede expresarse de la forma:

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}, \tag{1}$$

donde ω es la velocidad angular del sólido rígido e I_O es el momento de inercia del sólido rígido respecto al eje que pasa por O. El momento de inercia I representa la distribución de la masa del sólido rígido alrededor del eje.

Derivando la expresión (1) con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\vec{M}_O = I_O \vec{\alpha}, \tag{2}$$

donde M_O es el momento de las fuerzas exteriores respecto del punto O y α es la aceleración angular del sólido rígido.

El cálculo analítico del momento de inercia se reduce a dividir el sólido rígido en porciones infinitesimales de masa, multiplicar esa masa por el cuadrado de la distancia al eje y sumar para todas las masas. Expresado en forma matemática:

$$I_O = \int_V \delta^2 dm, \tag{3}$$

donde δ es la distancia que separa el elemento de masa dm del eje que pasa por O y la integral se extiende a todo el volumen del sólido rígido. El cálculo de momentos de inercia aplicando la expresión (3) sólo puede llevarse a cabo cuando el sólido rígido presenta gran simetría. En el caso de cuerpos irregulares, la determinación de I_O se lleva a cabo de forma experimental.

Determinación del momento de inercia

La determinación experimental del momento de inercia de un cuerpo puede llevarse a cabo mediante un dispositivo como el mostrado en la figura 1. El cuerpo M, del que queremos determinar el momento de inercia, se halla fijado mediante un tornillo a una polea de radio r cuyo eje de rotación es vertical. Sobre ésta está arrollado un hilo inextensible y sin peso apreciable que pasa por otra polea cuyo eje de rotación es horizontal. En el otro extremo del hilo se encuentra un disco de masa m_1.

Cuando el sistema parte del reposo, el disco m_1 realiza un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, haciendo girar el cuerpo M alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa (rotación baricéntrica). Llamando T a la tensión del hilo, de la segunda Ley de Newton aplicada al cuerpo m_1 tenemos:

$$m_1 g - T = m_1 a. \tag{4}$$

En lo que al cuerpo de masa M se refiere, la única fuerza que realiza momento respecto a su eje de rotación, es la tensión T. Empleando la expresión descrita en (2), podemos poner:

$$Tr = I\alpha. \tag{5}$$

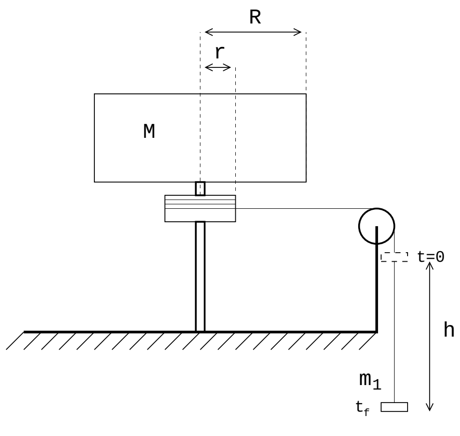

Figura 1: Medida del momento de inercia del cilindro

Obsérvese que la aceleración del disco m_1 y la aceleración angular α del cuerpo no son independientes entre sí. Entre ellas podemos establecer la siguiente ecuación de ligadura:

$$a = \alpha r. \tag{6}$$

Despejando la aceleración a de la expresión (4), despejando la aceleración angular α de la expresión (5) y sustituyendo en la ecuación de ligadura (6), obtenemos el valor de la tensión T:

$$T = \frac{m_1 g I}{I + m_1 r^2}. \tag{7}$$

Obsérvese que la tensión T es siempre inferior al peso $m_1 g$. Sustituyendo la tensión T en la expresión (4), obtenemos el valor de la aceleración a:

$$a = \frac{m_1 g r^2}{I + m_1 r^2}. \tag{8}$$

Puesto que el movimiento del disco es uniformemente acelerado y parte del reposo, la altura descendida h en un tiempo t puede expresarse de la forma:

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \longrightarrow a = \frac{2h}{t^2}. \tag{9}$$

Sustituyendo la expresión de la aceleración (9) en la ecuación (8) y despejando el momento de inercia I, obtenemos:

$$I = m_1 r^2 \left(\frac{g t^2}{2h} - 1 \right). \tag{10}$$

La anterior expresión nos permite conocer el momento de inercia I de un sólido rígido si podemos determinar el tiempo que tarda el disco en caer una altura h.

Método experimental

Con el fin de determinar los momentos de inercia de varios cuerpos, disponga el dispositivo experimental que se detalla en la figura 1. Con la regla graduada mida el tramo de cuerda h que descenderá el disco m_1. Preste especial atención a esta medida, puesto que influirá en todos los resultados posteriores. Con un pie de rey mida el diámetro r de la polea de eje vertical.

Coloque el cilindro macizo sobre la polea de eje vertical y fíjelo con el tornillo. Enrolle la cuerda en la polea de eje vertical solidaria al cilindro y cronometre el tiempo empleado por el disco m_1 en descender la altura h. Repita las medidas del tiempo un mínimo de seis (6) veces. Halle la media aritmética de los tiempos medidos y sustituya el valor hallado anteriormente, el radio r, la masa del disco m_1 y la altura h en la expresión (10). Con ello, calcule el momento de inercia I del cilindro macizo.

Sustituya el cilindro macizo por el cilindro hueco y proceda con el mismo método que en el caso anterior.

Por último, sustituya el cilindro hueco por la barra hueca, configurando el dispositivo experimental que se detalla en la figura (2). Procure que la barra quede lo más centrada posible con respecto al eje de rotación.

Seguidamente, coloque en la bara dos de los cilindros ajustables suministrados a unos 5cm del eje de rotación. Anote cuidadosamente la distancia entre los centros de los cilindros ajustables y el eje de rotación. Cronometre el tiempo empleado por el disco m_1 en descender la altura h (repetir esta medida unas 6 veces y anotar la media aritmética en la tabla). Calcule el momento de inercia I en este caso.

Modifique ahora la configuración, desplazando los cilindros ajustables sobre la barra, de forma que aumente su distancia al eje de rotación de 3cm en 3cm hasta llegar al final de la barra. Represente gráficamente los valores calculados de I en función de la distancia de los cilindros ajustables al eje de rotación, R.

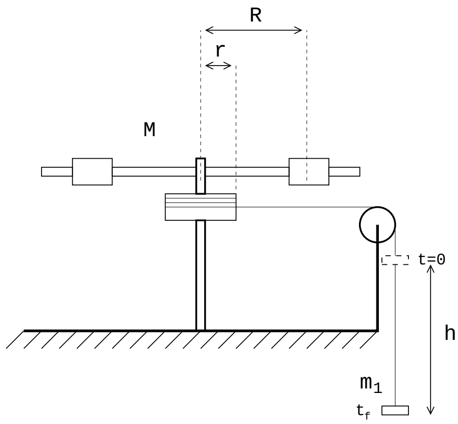

Figura 2: Medida del momento de inercia de la barra

Resultados

Para el cilindro macizo y para el cilindro hueco, determine su momento de inercia. Lleve a cabo el cálculo de errores en la medida indirecta de I, utilizando como error en las medidas directas la precisión del aparato para m_1, h y r, y para el tiempo, además de la precisión del aparato, una estimación del error estadistico de los tiempos obtenidos.

Para las masas ajustables, represente gráficamente los momentos de inercia (calculados utilizando la expresión (10)) en función de la distancia de las masas al eje de rotación. ¿Qué función es la que mejor se ajusta a los puntos experimentales?. ¿Es este resultado coherente con la teoría (ecuación (3))?

Cuestiones

1. A partir de la expresión (2), determine las unidades del momento de inercia I.

2. Utilizando la expresión (3), calcule el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo, así como el momento de inercia de un cilindro hueco de paredes delgadas. Compare con los resultados obtenidos aplicando la ecuación (10).

Problema

1. Un disco de masa M=2kg y radio R=20cm, tiene una cuerda enrollada en un pequeño resalte de radio r=5cm. Del otro extremo de la cuerda pende un cuerpo de masa m=1kg a través de una polea de masa despreciable como muestra la figura. Si en esta situación el disco rueda sobre la superficie horizontal sin deslizar, se pide:

   (a) Describe cualitativamente el movimiento del sistema.

   (b) Dibuja el diagrama de sólido libre del disco y del bloque.

   (c) Escribe el sistema de ecuaciones que te permiten calcular la aceleración angular del cilindro, la aceleración del bloque B, la tensión en la cuerda y la fuerza de rozamiento entre el plano y el cilindro.

   (d) Resuelve el sistema anterior y calcula α, a, T y F_r.

   (e) Determina el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para que el cilindro ruede sin deslizar.

   Analizando ahora el problema desde un punto de vista energético:

   (f) Discute qué fuerzas realizan trabajo durante el movimiento y como podrías evaluarlo.

   (g) Determina la velocidad y la energía cinética del cilindro y el bloque cuando este ha descendido 1m.

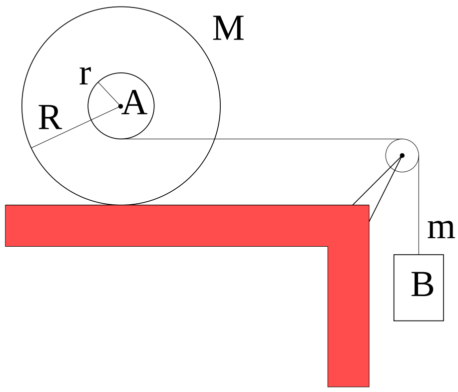

Figura 3: Problema 1