Práctica

Módulo de torsión

Objetivo

Determinar el módulo de torsión de varillas de distintos materiales por los métodos estático y dinámico.

Material

Aparato de torsión representado en la figura 1, varillas de torsión de varios materiales (acero, aluminio y cobre), dos cilindros, dinamómetro, cronómetro.

Figura 1

Fundamento teórico

Un péndulo de torsión está constituido por un hilo (una varilla) unido a un punto fijo del que cuelga un objeto. En nuestro caso el objeto es una barra rectangular horizontal preparada para poder colocar dos cilindros en diferentes posiciones (ver figura 1).

Si aplicamos una fuerza F perpendicular a la barra a una distancia r con respecto al punto de suspensión, se produce un desplazamiento angular q alrededor del eje vertical. En la varilla se origina un par de fuerzas recuperador M proporcional al ángulo (mientras no se sobrepase el límite de elasticidad) que tiende a devolver a la barra a su posición inicial. Podemos escribir:

$$M = Fr = -Dq \qquad (1)$$

donde ***D*** es ***la constante de torsión*** (la constante recuperadora) cuyo valor para el caso de una varilla cilíndrica es:

$$D = G\frac{pR^4}{2L} \qquad (2)$$

donde ***G*** es el ***módulo de torsión*** del material y R y L son el radio y la longitud de la varilla, respectivamente. La constante de torsión se mide en Nm.

El par recuperador M definido por la ecuación (1) se opone a la torsión de la varilla y da lugar a que la barra efectúe unas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio. En efecto, si I es el momento de inercia del todo el conjunto respecto del eje, y consideramos el ángulo q pequeño, aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación se obtiene la siguiente ecuación diferencial de un movimiento armónico simple:

$$I\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -Dq \qquad (3)$$

La solución de esta ecuación proporciona q en función del tiempo:

$$q = q_0 \cos\left(\frac{2p}{T}t + j\right) \qquad (4)$$

donde q_0 es la amplitud angular de la oscilación, j la fase inicial y ***T*** el período de la oscilación que viene dado por:

$$T = 2p\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (5)$$

Método experimental

Para determinar el módulo de torsión de una varilla se pueden utilizar dos métodos experimentales: uno estático y otro dinámico.

Determinación del modulo de torsión por el método estático

Para este experimento vamos a utilizar las varillas de acero y de cobre de 0.5 m de longitud y de diámetro 0.002 m.

Se gira la barra horizontal un cierto ángulo q y se mide con un dinamómetro la fuerza F que hay que aplicar a una distancia r del eje para que la barra se mantenga en equilibrio en dicho desplazamiento angular (ver figura 2). Apuntamos los valores obtenidos para F, r y q .

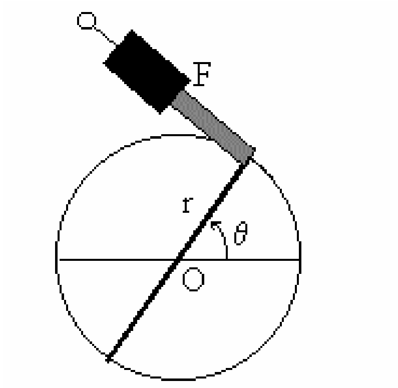

Figura 2

¡Atención! Es importante que la dirección de la fuerza F sea perpendicular a la barra en todas las medidas y que la desviación angular q no sobrepase el valor de 150º.

- Repetimos la experiencia desviando la barra en un ángulo diferente (se aconseja escoger ángulos entre 0º y 150º) y se mide la fuerza F que corresponde a cada caso situando el dinamómetro a la misma distancia r. Con estos resultados podemos calcular el momento aplicado $M=Fr$.
- Representando mediante puntos los datos experimentales del momento M en función del ángulo q (en radianes) se obtiene una recta cuya pendiente nos da el valor de D (ver ecuación (1)).
- Mide cuidadosamente con una regla graduada la longitud L de la varilla y con un palmer su diámetro en varios puntos distintos a su largo. Haz un promedio de las medidas y calcula el radio R.
- Repite todo el procedimiento para otra varilla de diferente material.

Resultados

Para cada una de las varillas utilizadas realiza los siguientes pasos:

1. Representa en una tabla los valores de los ángulos q escogidos (en grados y radianes) y las fuerzas F correspondientes. Apunta la distancia r a la que has aplicado la fuerza. Calcula el momento M correspondiente a cada una de las medidas.
2. Representa gráficamente M en función del ángulo q y ajusta una recta a los valores experimentales.

3. Realiza una regresión lineal y, utilizando la expresión (1), calcula la constante D a partir de la pendiente de la recta.
4. Una vez calculado D se puede aplicar la ecuación (2) para calcular el módulo de torsión G:

$$G = D\frac{2L}{pR^4} \tag{6}$$

Determinación del modulo de torsión por el método dinámico

Para este experimento seguimos utilizando las mismas dos varillas del apartado anterior. Colocamos los dos cilindros de manera que queden situados a la misma distancia r_1 del eje de suspensión.

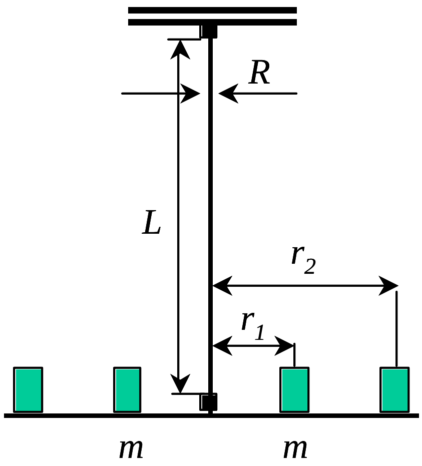

Figura 3

Se desvía la barra en un ángulo q no muy grande con respecto a su posición de equilibrio y luego se suelta. El sistema empieza a oscilar con un periodo T definido por la expresión (2), que se puede medir utilizando un cronómetro.
El momento de inercia I que aparece en la ecuación (2) corresponde al sistema formado por la barra horizontal + los dos cilindros situados a la distancia r_1:

$$I_{r_1} = I_{barra} + 2I_{cilindro} + 2mr_1 \tag{7}$$

donde m es la masa de cada uno de los cilindros, I_{barra} es el momento de inercia de la barra horizontal, $I_{cilindro}$ es la contribución de cada uno de los cilindros al momento de inercia total y el último término de la suma proviene de la aplicación del teorema de Steiner.

Elevando al cuadrado la ecuación (2) encontramos que el periodo de oscilación T_1 que hemos medido vale:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_{barra} + 2I_{cilindro} + 2mr_1}{D} \qquad (8)$$

La contribución de los cilindros es independiente de la posición r_1 en la que se encuentran los cilindros y se puede calcular como:

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2} m(R_2^2 - R_1^2) \qquad (9)$$

donde R_1 y R_2 son los radios exterior y interior de los cilindros, respectivamente.

Observamos que la ecuación (8) contiene 2 incógnitas: D (la incógnita que buscamos) y I_{barra}. Podemos eliminar este inconveniente si planteamos otra ecuación similar a la (8). Para ello cambiamos la posición de los cilindros esta vez a la distancia r_2 del eje de suspensión, hacemos oscilar de nuevo el sistema y medimos el nuevo periodo T_2 correspondiente a esta posición. En este caso podemos escribir:

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{I_{barra} + 2I_{cilindro} + 2mr_2}{D} \qquad (10)$$

Restando las ecuaciones (8) y (10) eliminamos los términos I_{barra} y $I_{cilindro}$ obteniendo así una ecuación en la cual la única incógnita es D:

$$T_1^2 - T_2^2 = 4\pi^2 \frac{2m(r_1 - r_2)}{D} \qquad (11)$$

$$D = 8\pi^2 \frac{m(r_1 - r_2)}{T_1^2 - T_2^2} \qquad (12)$$

Una vez determinado D, se puede hallar el valor del módulo de torsión G del material de la varilla midiendo el radio R y la longitud L de la misma.

En resumen, las medidas que se tienen que hacer en este apartado, para cada una de las dos varillas, son las siguientes:

- Para las dos posiciones de los cilindros r_1 *y* r_2 se miden los periodos de oscilación correspondientes T_1 y T_2. Para que la precisión de la medida sea mayor se mide el periodo de varias oscilaciones (por ejemplo 10) y se divide el tiempo total entre el numero de oscilaciones considerado.
- Con una regla graduada mide las distancias r_1 *y* r_2.
- Mide cuidadosamente con una regla graduada la longitud L de la varilla y con un palmer su diámetro en varios puntos distintos a su largo. Haz un promedio de las medidas y calcula el radio R.
- Con una balanza pesa los cilindros por separado y determina su masa m.

Todas estas medidas se tienen que realizar varias veces apuntando los errores de resolución. Finalmente se tienen que hallar los valores medios, que son los que se utilizarán en los cálculos y las correspondientes desviaciones estándar que nos darán una idea del error de cada magnitud medida.

Resultados

Para cada una de las varillas utilizadas realiza los siguientes pasos:

1. Realiza una tabla en forma de cuadro sinóptico que comprenda todos los valores medidos, los valores medios que se han deducido así como los errores correspondientes.
2. A partir de estos datos, aplica las fórmulas correspondientes y calcula la constante recuperadora D y el módulo de torsión G de la varilla.
3. Finalmente haz un cálculo de errores para los dos valores calculados.

Cuestiones

1. Compara los resultados obtenidos para la constante recuperadora D y para el módulo de torsión G de una misma varilla por los métodos estático y dinámico. ¿Tienen el mismo valor? Justifica la respuesta.

2. En el método dinámico ¿es necesario tener en cuenta la amplitud de las oscilaciones? Justifica la respuesta.