ELECTROESTÁTICA

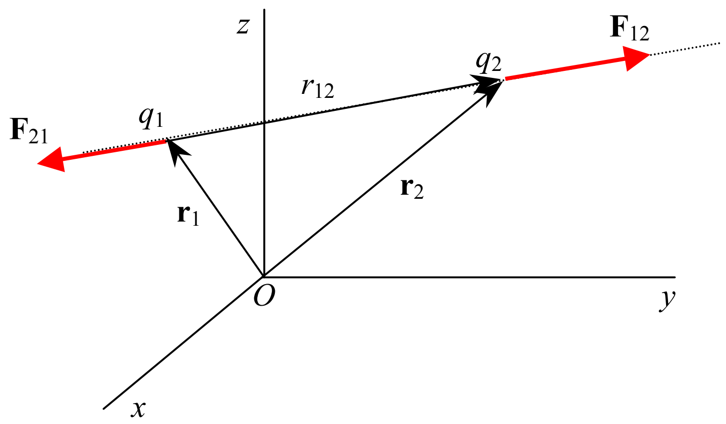
I CAMPO ELECTRICO EN EL ESPACIO LIBRE

1. Ley de Coulomb
2. Cargas puntuales
3. Distribuciones de carga
4. Campo eléctrico
5. Ecuaciones de campo
6. Ley de Gauss
7. Potencial eléctrico
8. Energía potencial
9. Ecuaciones de Poisson y Laplace
10. Energía electrostática
11. Dipolo eléctrico
12. Acción de un campo eléctrico sobre un dipolo

Prof. J. Martín

1 Ley de Coulomb

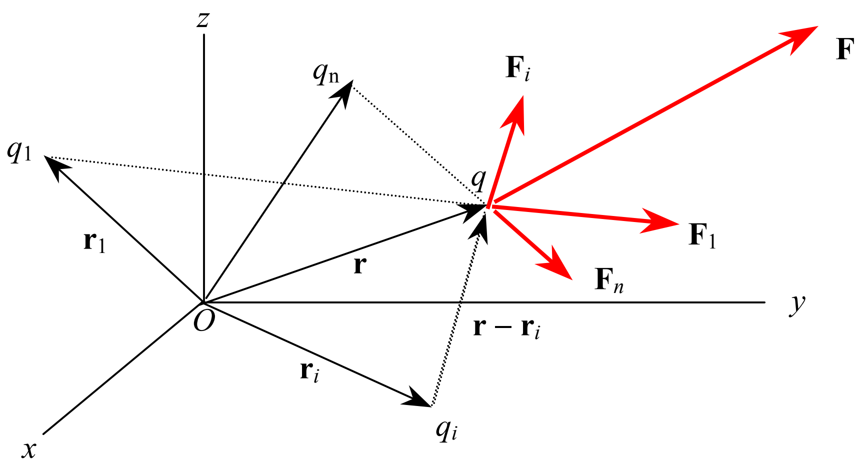
Fuerza entre dos cargas puntuales



$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \quad ; \quad \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_2}{r_{12}^3}\,\mathbf{r}_{12} \quad ; \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9\ \frac{\mathrm{N\,m}^2}{C^2}$$

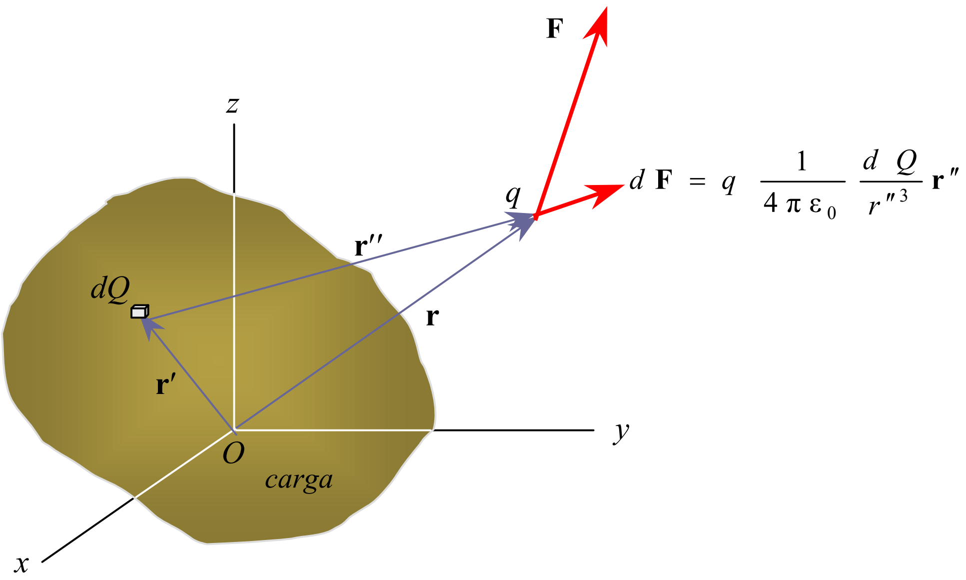
2 Cargas puntuales

Fuerza de n cargas puntuales sobre la carga puntual q



$$\mathbf{F} = q\left[\sum_{1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\right]$$

3 Distribuciones de carga



$$\boxed{\mathbf{F} = q \int_{carga} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\,Q}{r''}\,\mathbf{r}''} \qquad (1)$$

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'' = (x - x')\,\mathbf{i} + (y - y')\,\mathbf{j} + (z - z')\,\mathbf{k}$$

Distribuciones lineales de carga .... $dQ = \lambda\, d\,l \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad C/m$

Distribuciones superficiales de carga .... $d\,Q = \sigma\, d\,S \quad \Rightarrow \quad \sigma \quad C/m^2$

Distribuciones cúbicas de carga .... $d\,Q = \rho\, d\,\tau \quad \Rightarrow \quad \rho \quad C/m^3$

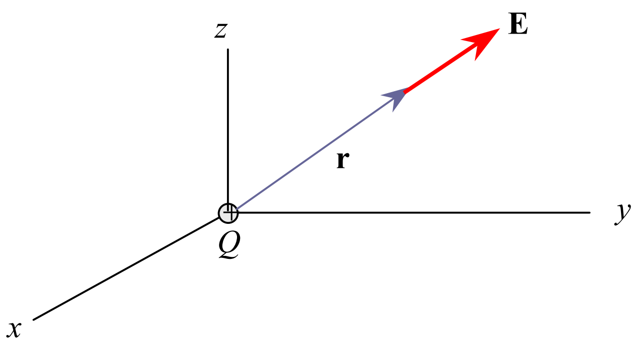
La ecuación (1) *es válida tanto en los puntos exteriores como en los puntos interiores a la distribución de carga.*

4 Campo eléctrico

De la ecuación (1) se obtiene la expresión general del campo eléctrico que está dada por

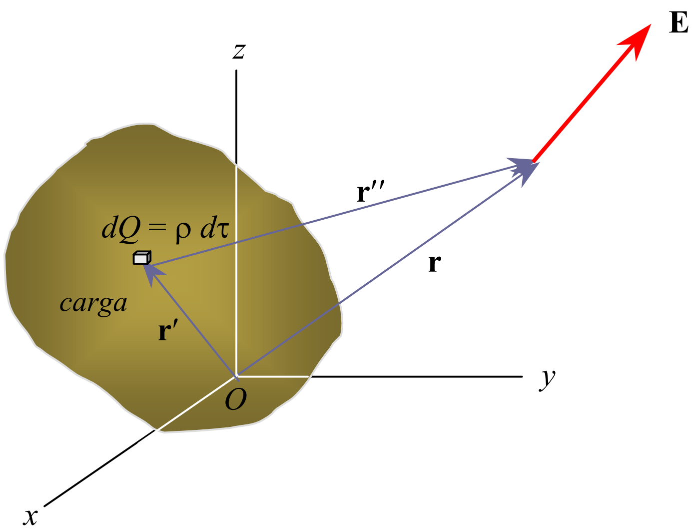
$$\boxed{\mathbf{E} = \int_{carga} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r''^3}\,\mathbf{r}''} \quad \mathrm{N/C} \qquad (2)$$

Para una carga puntual Q situada en el origen queda



$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\,\mathbf{r}}$$

Para una carga cúbica de densidad ρ queda



$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{carga} \frac{\rho\, d\tau}{r''^3}\,\mathbf{r}''} \qquad (3)$$

La fuerza sobre una carga puntual q ejercida por una distribución de carga cualquiera está dada por

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}}$$

donde **E** es el campo creado por la distribución de carga.

La ecuación (3) es la expresión general del campo eléctrico. Para distribuciones superficiales o lineales, el numerador de la función subintegral hay que sustituirlo por $\sigma \, dS$ o por $\lambda \, dl$. Conocida la correspondiente densidad de carga y la forma geométrica de la distribución, efectuando la integración, se obtiene el campo. Este método del cálculo directo del campo a partir de su definición resulta en la práctica, salvo en algunos pocos casos, inviable, debido la imposibilidad de resolver la integral. Se hace necesario deducir métodos alternativos para calcular el campo eléctrico y en consecuencia determinar la fuerza **F**.

5 Ecuaciones de campo

Toda la información sobre un campo vectorial está contenida en dos ecuaciones diferenciales vectoriales dadas por los valores de su divergencia y de su rotacional.

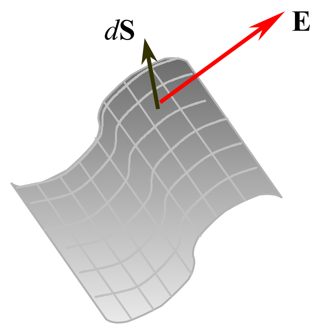
Para el campo eléctrico se tiene

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (4) \qquad ; \qquad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \qquad (5)$$

La divergencia de un campo vectorial está relacionada con el flujo del campo en un elemento de volumen $d\tau$.

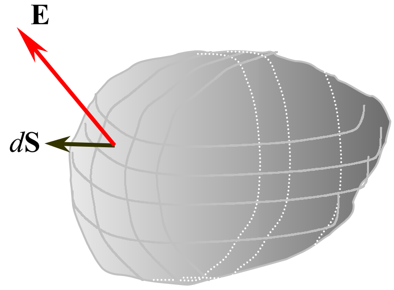
Flujo

Superficie abierta S ⇒



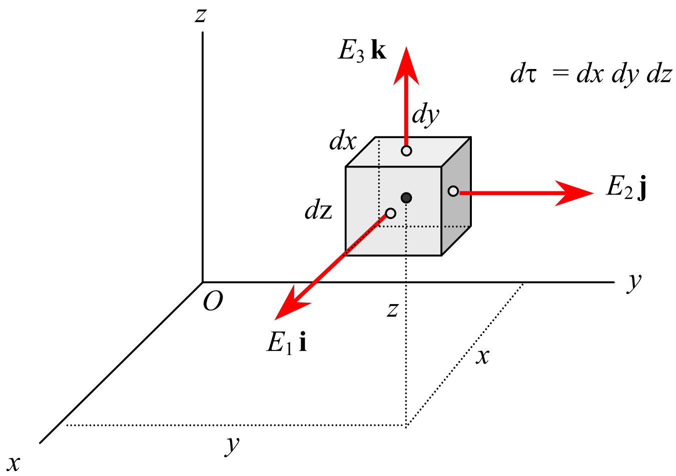
$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{S}$$

Superficie cerrada S ⇒



$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{S}$$

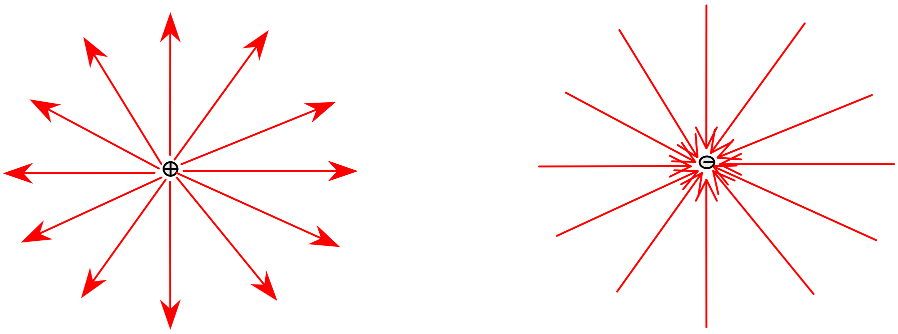
Calculando el flujo en el elemento de volumen centrado en el punto (x,y,z)



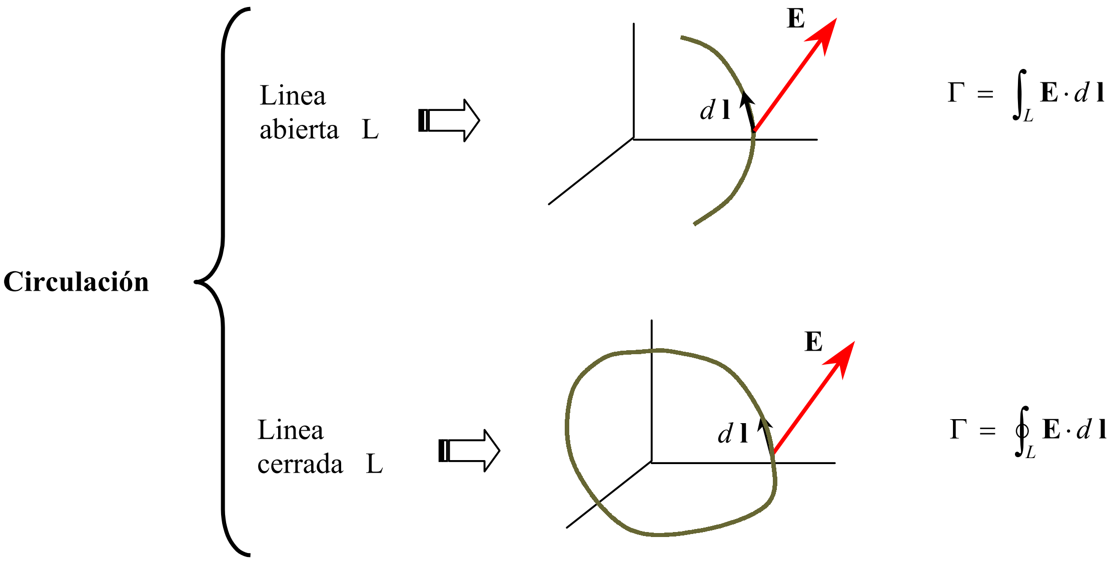
$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \right) d\tau$$

$$\boxed{d\Phi = \nabla\cdot\mathbf{E}\;d\tau = \frac{dQ}{\varepsilon_0}} \qquad (6)$$

De la ecuación (4) se deduce que el campo **E** nace en los puntos de carga positiva (fuentes del campo) y termina en los puntos de carga negativa (sumideros de campo)

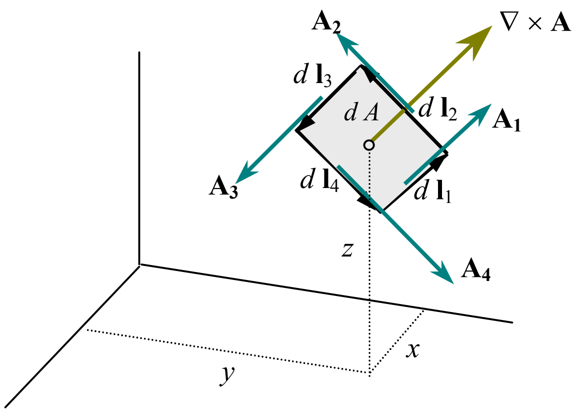


El rotacional de un campo vectorial está relacionada con la circulación cerrada del campo en una curva elemental.



El rotacional de un campo vectorial **A** define en cada punto del espacio una dirección tal que la circulación del campo en una curva cerrada elemental situada en un plano perpendicular a la dirección del rotacional tiene su valor máximo. Si dA es el área limitada por curva se cumple

$$d\Gamma = \left|\nabla\times\mathbf{A}\right| dA$$



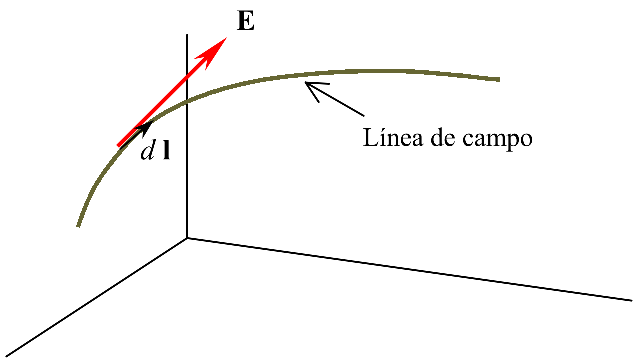
$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Para el campo electrostático **E** cuyo rotacional es cero, la circulación en la curva cerrada elemental es nula con independencia de su orientación. Del teorema de Stokes se deduce que

$$\boxed{\oint_L \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{l} = 0} \qquad (7)$$

La ecuación (7) *es la expresión integral del **rotacional** de* **E** igual a cero

Línea de campo. Una línea es de campo cuando se cumple que el campo es tangente a ella en cada uno de sus puntos.



Ecuación de las líneas de campo

$$\frac{E_1}{d\,x} = \frac{E_2}{d\,y} = \frac{E_3}{d\,z}$$

Ya que **E** y $d\,\mathbf{l}$ son dos vectores paralelos en cada uno de los puntos de la línea , su producto escalar es positivo, luego la línea de campo ha de ser necesariamente abierta, ya que si fuese cerrada la circulación de **E** tendría un valor positivo y ha de ser necesariamente cero.

Las líneas de campo electrostático son abiertas, empiezan en los puntos de carga positiva y terminan en los puntos de carga negativa o en el ∞ .

6 Ley de Gauss

La ley de Gauss es la expresión de la ***divergencia*** en forma integral

Integrando la ecuación (6) en un volumen cualquiera del espacio se tiene

$$\int_{Volumen} \nabla\cdot \mathbf{E}\, d\tau = \int_{Volumen} \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

siendo Q_{in} la parte de carga contenida en el volumen seleccionado.

Del teorema de la divergencia se tiene

$$\int_{Volumen} \nabla\cdot \mathbf{E}\, d\tau = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{S}$$

siendo S la superficie que limita el volumen considerado.

Igualando ambas ecuaciones se obtiene la ley de Gauss

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}} \tag{8}$$

➪ *El flujo del campo, a través de cualquier superficie cerrada en cuyo interior no hay carga, es cero*

La ecuación (6) proporciona un método para calcular el ***módulo*** del campo creado por distribuciones de carga cuando se dan las siguientes condiciones :

➪ *Que se conozca la dirección del campo en **todos** los puntos del espacio*

➪ *Que se puede seleccionar una superficie cerrada S tal que el campo sea perpendicular a ella, o bien en todos sus puntos, o bien solo en una parte y en el resto tangente.*

➡ *Que el módulo del campo tenga el mismo valor en todos los puntos en que es perpendicular a la superficie*

Con estas condiciones , de la ecuación (8) se obtiene el módulo del campo

$$E = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0 A} \qquad (9)$$

siendo *A* el área de la superficie en la cual el campo es perpendicular a ella en cada uno de sus punto.

7 Potencial eléctrico

➡ *El rotacional del gradiente de una función escalar es idénticamente nulo*

Ya que el rotacional del campo es cero, **E** es el gradiente de una función escalar. La distancia r'' entre el punto fuente y el punto campo, es una función de seis variables independientes

$$r'' = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}$$

El gradiente de la función inversa de distancia es

$$\nabla \left(\frac{1}{r''}\right) = -\frac{\mathbf{r}''}{r''^3} \qquad (10)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (10), la expresión general del campo eléctrico, ecuación (3), queda

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{c\arg a} \frac{\rho \, d\tau}{r''^3} \mathbf{r}'' \right) \qquad (11)$$

El campo **E** es un campo potencial y deriva de una función escalar llamada el potencial del campo definida, salvo una constante, por la ecuación

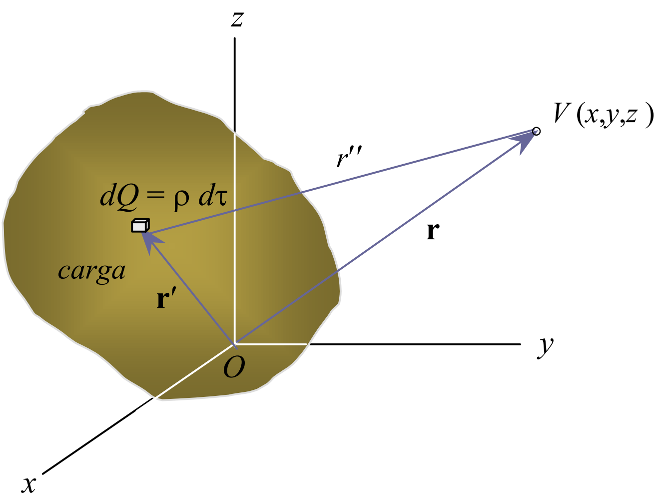
$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{c\arg a} \frac{\rho \, d\tau}{r''} + cte \qquad (12)$$

Sustituyendo en la ecuación (11) se tiene

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \qquad (13)$$

Para distribuciones de carga ***finitas***, el origen de potencial se toma en el infinito $V_0(\infty) = 0$, con lo cual la constante de integración de la ecuación (12) es nula. El potencial en un punto está dado por

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{carga}\frac{\rho\, d\tau}{r''}} \qquad (14)$$

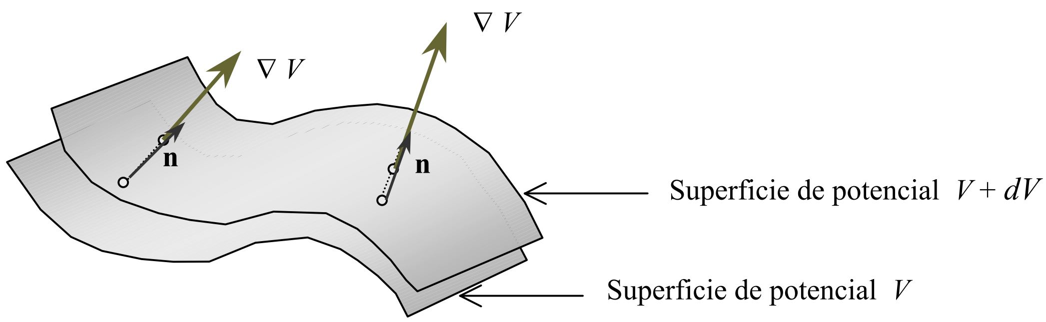


Integrando la ecuación (14) se tiene el potencial en un punto y de la ecuación (13) , mediante una sencilla derivación, se obtiene el campo eléctrico **E.**

8 Energía potencial

El gradiente de una función escalar es la derivada direccional máxima, es decir, define en cada punto del espacio la dirección y el sentido en los cuales el incremento por unidad de distancia de la función tiene un valor máximo. Su módulo es dicho valor. En la figura adjunta, **n** es el vector normal unitario a la superficie de potencial V en cada uno de sus puntos luego se tiene que

$$dV = \left|\nabla V\right| dn \qquad ; \qquad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$



Cuando pasamos de un punto de la superficie de potencial V a otro de la superficie de potencial $V + dV$ según la dirección definida por el vector $d\mathbf{l} = dx\ \mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\ \mathbf{k}$, se tiene

$$dV = \nabla V \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (15)$$

Por otra parte, de la ecuación (7) y de la definición de circulación se deduce inmediatamente que

➡ *la circulación del campo entre dos puntos cualesquiera del espacio es independiente del camino seguido para pasar del primero al segundo.*

De la ecuación (15) se tiene que la circulación del campo entre dos puntos

$$\int_0^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^1 d\,V = V_0 - V_1 \qquad (16)$$

es igual a la diferencia de potencial entre ambos puntos.

➡ *la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del campo es igual a la circulación del campo entre ambos puntos*

Para cargas finitas, de la ecuación (16) se tiene que el potencial en un punto está dado por

$$\boxed{V_1(x,y,z) = -\int_\infty^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \qquad (17)$$

Trabajo de la fuerza eléctrica El trabajo elemental de la fuerza eléctrica **F** cuando la carga puntual q se desplaza un $d\mathbf{l}$ está dado por

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{l} = q\,\mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{l} = -\,q\,dV = -\,d\,(q\,V) \qquad (18)$$

➡ *El producto de la carga por el potencial es la energía potencial eléctrica de la carga q*

$$U = q\,V(x,y,z)$$

De $dW = -q\,dV$, se define la unidad del potencial, el voltio (V) tal que V = J/C . El campo eléctrico **E** se mide en V/m.

La fuerza eléctrica $\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} = -\,q\,\nabla V = -\nabla U$, deriva de la función escalar U , luego es un ***campo de fuerzas conservativo***.

⇨ *El trabajo de una fuerza externa para desplazar la carga q, manteniéndose en equilibrio, es igual al trabajo de la fuerza eléctrica cambiado de signo.*

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{l} = -q\,\mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{l} = q\,\,dV$$

El trabajo para trasladar la carga q desde el infinito hasta un punto del campo es el producto de la carga por el potencial en dicho punto

$$\boxed{W = q\,\,V(x,y,z)} \qquad (19)$$

9 Ecuaciones de Poisson y de Laplace

El cálculo del campo a través del potencial utilizando la ecuación (13) requiere previamente resolver la integral de la ecuación (14), cuya solución analítica , para el caso genérico, no existe.

El método general de la resolución del potencial lo proporcionan las ecuaciones de Poisson y de Laplace.

El producto escalar del operador nabla por si mismo se denomina el operador laplaciana

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ecuación de Poisson ⇨ $$\boxed{\Delta\,\,V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (20)$$

Ecuación de Laplace ⇨ $$\boxed{\Delta\,\,V = 0} \qquad (21)$$

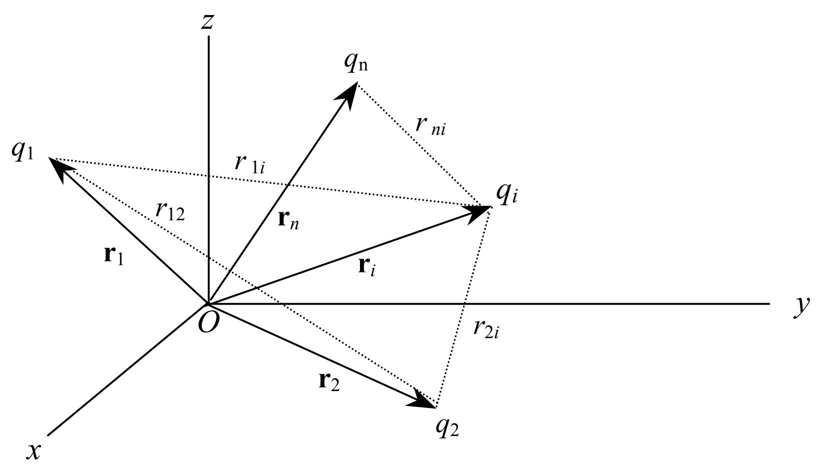
La ecuación (20) relaciona la densidad cúbica de carga con el potencial, y la ecuación (21) su valor en los puntos en que $\rho = 0$.

Cualquier método que proporcione una solución de la ecuación de Laplace o de la de Poisson que satisfaga las *condiciones de contorno* es la única solución posible para el potencial. El método de la integración directa sólo es aplicable a problemas unidimensionales. Los casos posibles son : uno en coordenadas rectangulares, dos en coordenadas cilíndricas y dos en coordenadas esféricas.

Las funciones que satisfacen la ecuación (21) se llaman *funciones armónicas*. Estas funciones son continuas y derivables, con derivadas primeras continuas y no tienen máximos ni mínimos en su dominio de definición.

10 Energía electrostática

Cargas puntuales Consideremos el conjunto de cargas puntuales representado en la figura y supongamos que inicialmente sólo hay las cargas q_1 y q_2.



Supongamos que hemos trasladado las dos cargas desde el infinito hasta las posiciones indicadas, primero la q_1 y a continuación la q_2. El trabajo efectuado para trasladar la segunda carga contra el campo creado por la primera es la energía del sistema de dos cargas. De la ecuación (19) se tiene

$$W_{12} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

La ecuación anterior se puede escribir como

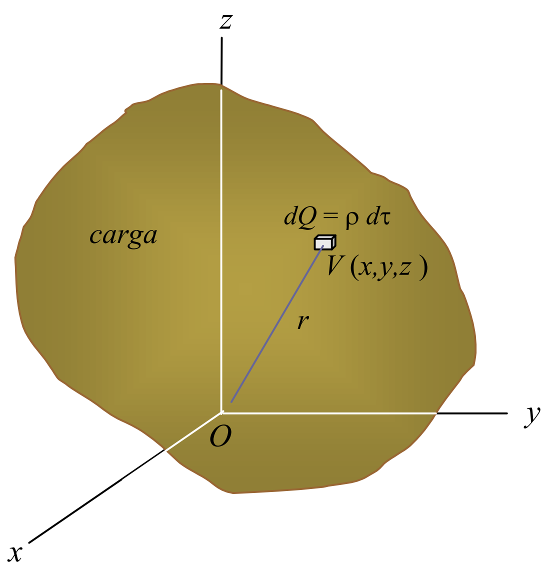
$$W_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{21}} \right)$$

Generalizando para el sistema de las n cargas puntuales, se tiene

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i} \tag{22}$$

En la ecuación (22), V_i es el potencial en el punto posición de la carga q_i creado por el resto de cargas y expresa la energía de interacción del conjunto de cargas. Está energía es positiva cuando todas las cargas son del mismo signo, pero puede ser negativa si hay cargas de signo contrario.

Distribuciones de carga Consideremos una distribución cúbica de carga de densidad ρ representada en la figura adjunta.



La energía de interacción de la carga de la distribución está dada por

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{carga} \rho\, V\, d\tau} \qquad (23)$$

A diferencia de la ecuación (22), la ecuación (23) tiene en cuenta tanto la energía de interacción de los dQ como la energía de interacción intrínseca de cada dQ contenido en el elemento de volumen $d\tau$.

Energía del campo El campo eléctrico **E** creado por la distribución efectúa trabajo luego tiene una energía. La energía expresada en función del campo está dada por

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty} E^2\, d\tau} \qquad (24)$$

La ecuación (24) expresa que la energía está distribuida por todo el espacio en donde exista campo eléctrico con una densidad por unidad de volumen dada por

$$\boxed{\frac{dW}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2} \qquad (25)$$

11 Dipolo eléctrico

12 Acción de un campo eléctrico sobre un dipolo