CAMPS ELECTROMAGNÈTICS i ÒPTICA 1ª PRUEBA 2001/02

1

a) $$Q_0 = \int \rho\, dv = \int_0^a kr\, 4\pi r^2 dr = 4\pi k \frac{a^4}{4} = \pi k a^4$$

luego $$k = \frac{Q_0}{\pi a^4}$$

b) Aplicamos el teorema de Gauss

r<a

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$$

$$Q_{int} = \int_0^r \rho\, dv = \pi k r^4 = Q_0 \frac{r^4}{a^4}$$

luego $$4\pi r^2 E = Q_0 \frac{r^4}{\varepsilon_0 a^4} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_0 r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4}}$$

r>a

$$\left.\begin{aligned} &\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E \\ &Q_{int} = Q_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

c) Por integración del campo:

r>a $$V(r) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r<a $$V(r) = -\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_a^r \frac{Q_0 r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^4} dr = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} -$$

$$- \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^4}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{r^3}{3a^4} + \frac{1}{3a}\right) =$$

$$= \frac{Q_0}{12\pi\varepsilon_0 a}\left(4 - \frac{r^3}{a^3}\right)$$

d) $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, luego:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{Q_0 r}{\pi\varepsilon_0 a^4} = -\frac{kr}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Q.E.D.

② a) Utilizaremos la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Como la simetría del problema impone $V = V(x)$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 x}{a}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 a} + A \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 a} + Ax + B$$

Utilizando las condiciones de contorno:

$$x = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x = a \Rightarrow V = V_0 \Rightarrow V_0 = -\frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0} + A a$$

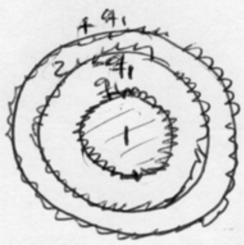
y $\boxed{A = \frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}}$

Finalmente $\boxed{V = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 a} + \left(\frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}\right) x}$

b) Como $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

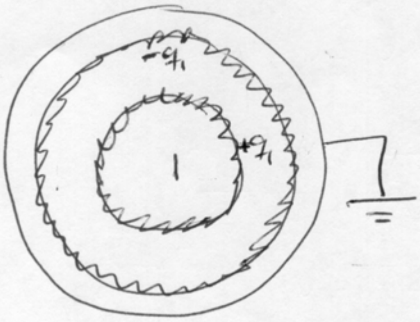
$$\boxed{E = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} = \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 a} - \left(\frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}\right)\vec{i}}$$

(8) Como el campo es nulo en el interior de los
a) conductores en equilibrio; la distribución será



compatible con la simetría del problema y las condiciones de equilibrio.

b)



Ya que al no haber diferencia de potencial con el exterior el campo ha de ser nulo.

$$V_1' = V(r=a) = -\int_b^a \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

[También se puede considerar desde el punto de vista de un condensador

$$V_1 - \cancel{V_0}^{\,0} = \Delta V = \frac{q}{C} = \frac{q_1}{C} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

c) $$\left[W = \int u_e\, dv = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^b \frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}\, 4\pi r^2\, dr = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2} q_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C} \right]$$