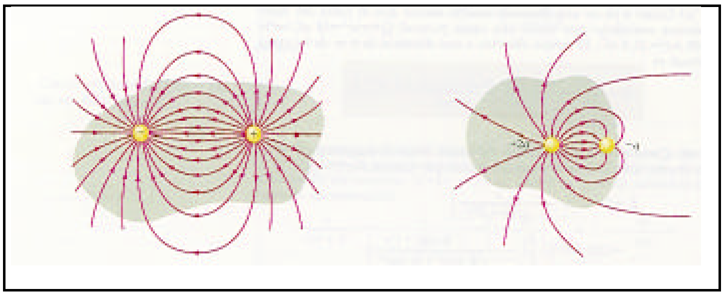
Ley de Gauss

La ley de Gauss relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie. Esta ley permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita.



La figura izquierda muestra una superficie de forma arbitraria que incluye un dipolo. El número de líneas que salen de la carga es exactamente igual al número de líneas que entran en el mismo recinto y terminan en la carga negativa. Si contamos el número que sale como positivo y el número que entra como negativo, el número neto que sale o entra es cero. En otras distribuciones de carga, como ocurre en la figura derecha, el número neto de líneas que sale por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie. Este es un *enunciado cualitativo* de la ley de Gauss.

La magnitud matemática relacionada con el número de líneas de fuerza que atraviesa una superficie recibe el nombre de flujo eléctrico, cuya definición general es :

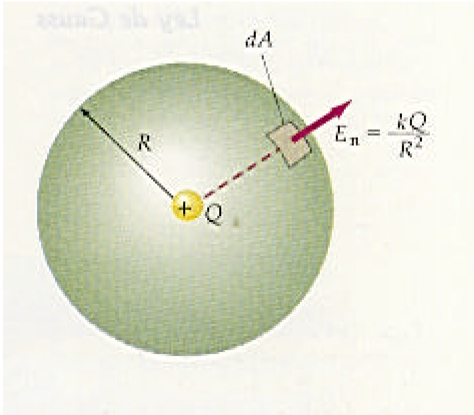
$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Frecuentemente estamos interesados en conocer el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, que viene dado por

$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

La figura muestra una superficie esférica de radio R con su centro en la carga puntual Q. El campo eléctrico en un punto cualquiera de la superficie es perpendicular a la superficie y tiene la magnitud

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$



El flujo neto a través de esta superficie esférica es

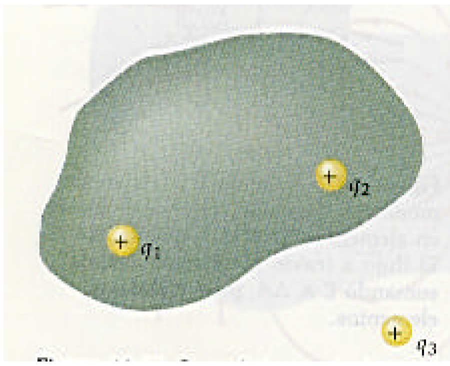
$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \left\{\vec{E} // d\vec{A}\right\} = \oint E dA = E\oint dA = EA$$

en donde E ha salido de la integral por ser constante en todos los puntos. La integral de dA extendida a toda la superficie es precisamente el área total, igual a $4\pi R^2$.

Sustituyendo $E = \frac{kQ}{R^2}$ y $A = 4\pi R^2$ se obtiene

$$\Phi_{neto} = \frac{kQ}{R^2}4\pi R^2 = 4k\pi Q$$

Idéntico resultado hubiéramos obtenido si la superficie fuese irregular. Si se trata de sistemas de más de una carga puntual como en la figura, el flujo neto a través de la superficie cerrada señalada es igual a



$$\Phi_{neto} = 4k\pi(q_1 + q_2)$$

Es costumbre escribir la constante de Coulomb k en **función** de la **permitividad del vacío**:

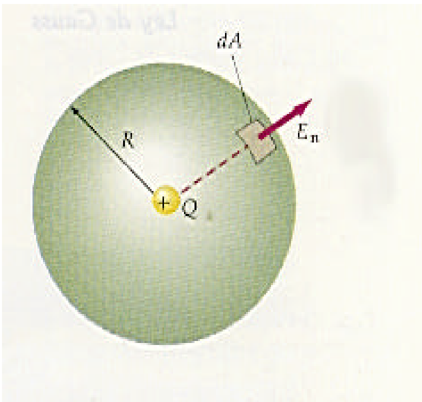
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

de modo que la ley de Gauss se escribe $\boxed{\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o}}$

Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

En algunas distribuciones de carga altamente simétricas, tales como una esfera uniformemente cargada o una línea infinita de carga, es posible determinar una superficie matemática que por simetría posee un campo eléctrico constante perpendicular a la superficie. A continuación puede evaluarse fácilmente el flujo eléctrico a través de esta superficie y utilizar la ley de Gauss para relacionar el campo eléctrico con la carga interior a la superficie. Una superficie utilizada para calcular el campo eléctrico mediante la ley de Gauss se denomina **superficie gaussiana.** En esta sección utilizaremos dicho método para calcular el campo eléctrico producido por diferentes distribuciones simétricas de carga.

Campo eléctrico E próximo a una carga puntual



- superficie gaussiana, elegimos una superficie esférica de radio r centrada en la carga.
- **E** es radial y su magnitud depende sólo de la distancia a la carga.
- E tiene el mismo valor en todos los puntos de nuestra superficie esférica.

El flujo neto a través de esta superficie es, pues,

$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = EA = E 4\pi r^2$$

Pero la ley de Gauss nos da

$$\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o}$$

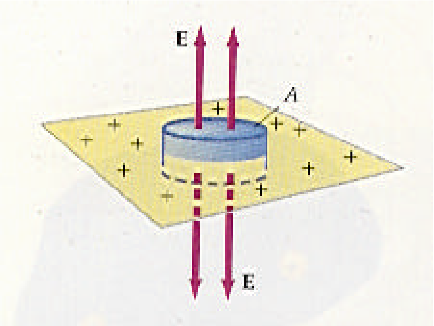
Igualando obtenemos

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2}}$$

Campo eléctrico E próximo a un plano infinito de carga

Densidad de carga uniforme σ

Por simetría el campo eléctrico debe:



- ser perpendicular al plano.
- depender sólo de la distancia z del plano al punto del campo.
- tener el mismo valor pero sentido opuesto en los puntos situados a la misma distancia por arriba y por debajo del plano

Escogemos como superficie gaussiana un cilindro en forma de "pastillero" y su base tiene un área A.

Como **E** es paralelo a la superficie cilíndrica, no existe flujo que la atraviese. Puesto que el flujo que sale por cada cara superior o inferior es *EA*, el flujo total es

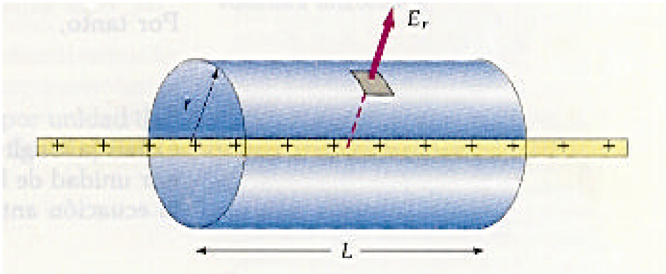
$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{bases} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{sup.\,lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA + 0 = 2EA$$

La carga neta en el interior de la superficie es $Q_{dentro} = \sigma A$

A partir de la ley de Gauss $\Phi_{neto} = \dfrac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \Rightarrow 2EA = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_o}$

de donde $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}}$

Campo eléctrico E próximo a una carga lineal infinita



Densidad de carga uniforme λ.
Por simetría el campo debe:

- ser perpendicular al hilo.
- depender sólo de la distancia r del hilo al punto.

Tomamos como superficie *gaussiana* un cilindro de longitud L y radio r coaxial con la línea de carga.

El campo eléctrico es, por tanto, perpendicular a la superficie cilíndrica y posee el mismo valor E, en cualquier punto de la superficie.
No hay flujo a través de las superficies planas de los extremos del cilindro, $\vec{E} \perp d\vec{A}$
El flujo eléctrico es, por tanto:

$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{bases} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{sup.\,lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 + EA_{lateral} = E2\pi rL$$

igual al producto del campo eléctrico por el área de la superficie cilíndrica.

La carga neta dentro de esta superficie es $Q_{dentro} = \lambda L$

Según la Ley de Gauss $\Phi_{neto} = \dfrac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi rL = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_o}$

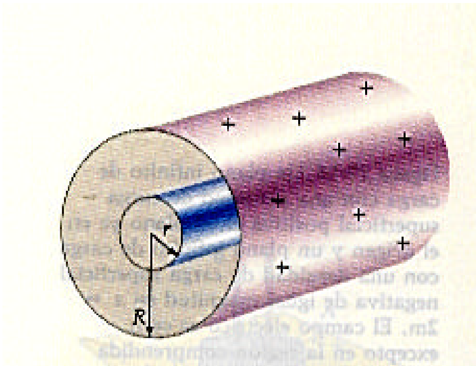
de donde $\boxed{E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}}$

Nota:
Para usar la ley de Gauss es necesaria la existencia de un alto grado de simetría.
El cálculo anterior fue necesario suponer E sería constante en todos los puntos de la superficie gaussiana cilíndrica . Esto es admisible cuando la distribución lineal es de longitud:

- INFINITA

- FINITA en puntos muy próximos a la carga lineal lo que equivale a suponer que a esa distancia parece ser infinitamente larga

Campo eléctrico E **en el interior y en el exterior de una corteza cilíndrica de carga**



Densidad de carga superficial uniforme, σ.

a) Puntos interiores a la corteza

Tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L y radio r < R concéntrico con la corteza.

Por simetría, el campo eléctrico es:

- perpendicular a esta superficie gaussiana y
- su magnitud Er es constante en todos los puntos de la superficie.

El flujo de **E** a través de la superficie es, por tanto,

$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{bases} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{sup\,.\,lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E2\pi rL$$

La carga total dentro de esta superficie es cero $Q_{dentro} = 0$

y la ley de Gauss nos da

$$\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi rL = \frac{0}{\varepsilon_o}$$

de donde $\boxed{E = 0}$

b) Puntos interiores a la corteza

Tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L y radio r > R concéntrico con la corteza.

El flujo vuelve a ser $\Phi_{neto} = E2\pi rL$

Pero la carga interior no sería nula, sino $Q_{dentro} = 2\pi RL$

y según la ley de Gauss

$$\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi rL = \frac{\sigma 2\pi RL}{\varepsilon_o}$$

de donde $$\boxed{E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o r}}$$

Representación gráfica

La figura muestra el valor E, en función de r para esta distribución de carga.

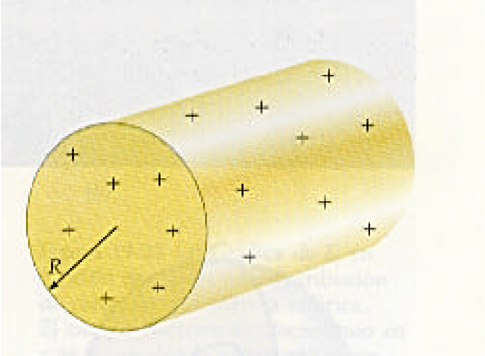
Observar que:

Justamente sobre la corteza en r = *R*, el campo eléctrico es $E = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_o R} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$

Como el campo justamente dentro de la corteza es cero resulta un salto discontinuo del campo eléctrico de valor $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ al atravesar la corteza.

<u>Esta discontinuidad aparece siempre que haya carga superficial.</u>

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de un cilindro sólido de carga infinitamente largo



Densidad de carga ρ distribuida uniformemente por todo el volumen del cilindro

Lo mismo que en el caso de la corteza cilíndrica de carga tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L, el flujo será

$$\Phi_{neto} = E2\pi rL$$

a) Puntos exteriores al cilindro, es decir, si r > *R*,

La carga total dentro de esta superficie es $Q_{dentro} = \rho\pi R^2 L$

Y según la ley de Gauss $\Phi_{neto} = \dfrac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi rL = \dfrac{\rho\pi R^2 L}{\varepsilon_o}$

de donde $\boxed{E = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}}$

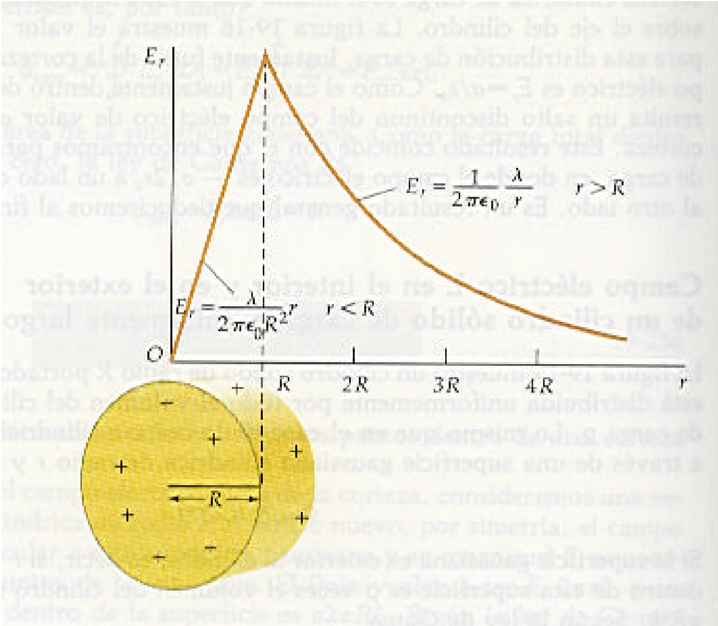
b) Puntos exteriores al cilindro, es decir, si r < *R*,

La carga total dentro de esta superficie es $Q_{dentro} = \rho\pi r^2 L$

Ley de Gauss $\Phi_{neto} = \dfrac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi rL = \dfrac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_o}$

de donde $\boxed{E = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_o}}$

Representación gráfica

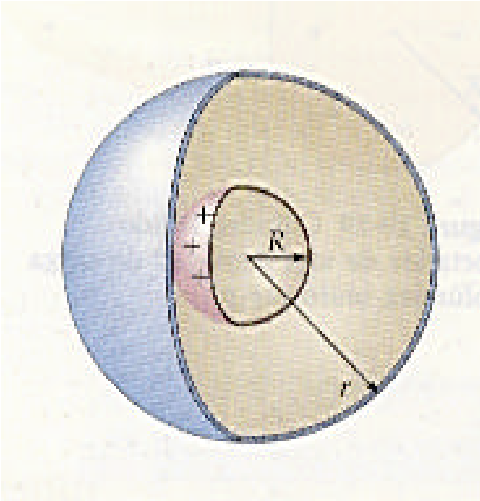


La figura muestra el valor E, en función de *r* para esta distribución de carga.

Observar que el campo:

- en el interior crece directamente proporcional a *r*
- en el exterior varía de modo inversamente proporcional a *r*
- es continuo en r=R.

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga



Densidad superficial de carga σ
Por simetría:

- E debe ser radial y
- su magnitud dependerá sólo de la distancia *r* desde el centro de la esfera.

a) Puntos exteriores a la corteza.
Tomamos una superficie gaussiana esférica de radio r > *R*, el flujo será

$$\Phi_{neto} = E4\pi r^2$$

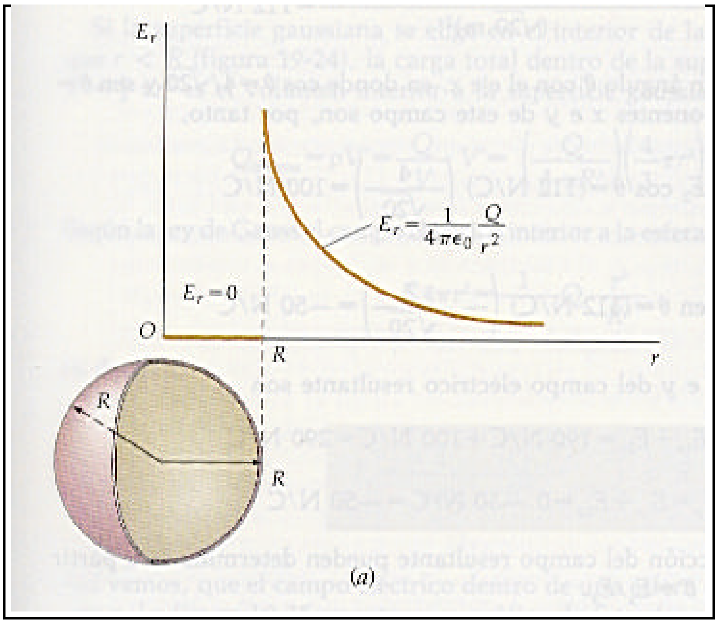
La carga total dentro de esta superficie es $Q_{dentro} = 4\pi R^2\sigma$

Y según la ley de Gauss $\Phi_{neto} = \dfrac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E4\pi r^2 = \dfrac{4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_o}$

de donde $\boxed{E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_o r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r^2}}$

siendo Q la carga total de la corteza $Q = \sigma 4\pi R^2$

b) Puntos interiores a la corteza.
Si escogemos una superficie gaussiana esférica en el interior de la corteza, de modo que r < *R*, el flujo neto no varía, pero la carga total dentro de la superficie gaussiana es CERO.
Por tanto, para r < *R*, la ley de Gauss nos da $\boxed{E = 0}$

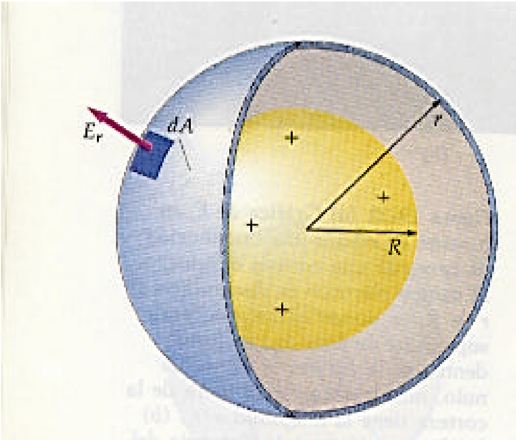


Representación grafica

Discontinuidad $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$

Campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una esfera sólida uniformemente cargada

Densidad de carga uniforme ρ distribuida por todo el volumen
Como en el caso de la corteza esférica de carga, el flujo a través de una superficie gaussiana de radio r es



$$\Phi_{neto} = E4\pi r^2$$

a) Puntos exteriores a la esfera. r > R
La carga total dentro de esta superficie es

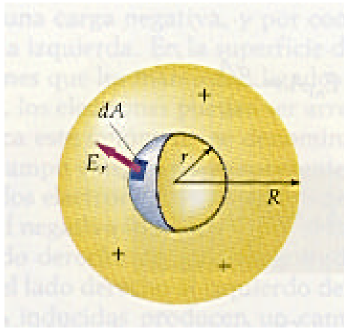
$$Q_{dentro} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Y según la ley de Gauss $\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_o}$

de donde $$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} \quad \text{ó} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}}$$

siendo Q la carga total de la esfera $Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$

b) Puntos interiores a la esfera.



Superficie gaussiana r < R,

Carga interior $$Q_{dentro} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Ley de Gauss $$E 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_o}$$

de donde $$\boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}}$$

Representación gráfica

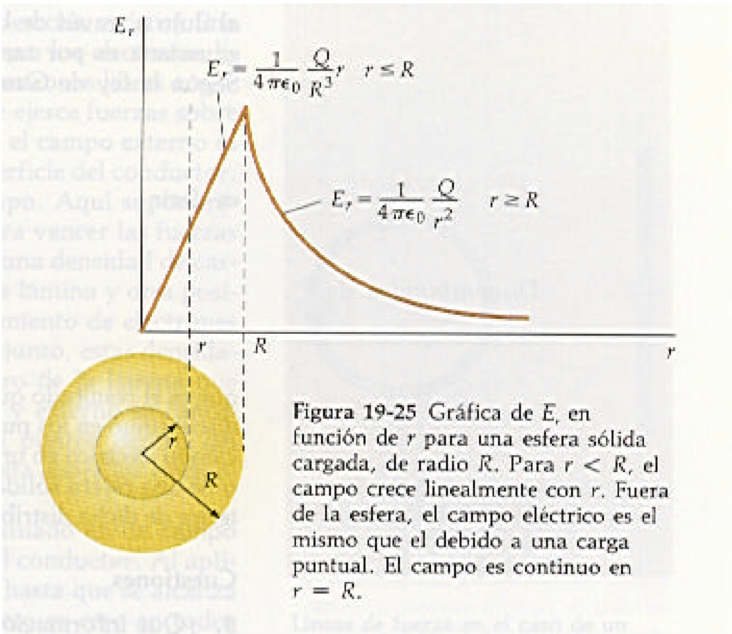


Figura 19-25 Gráfica de E_r en función de r para una esfera sólida cargada, de radio R. Para $r < R$, el campo crece linealmente con r. Fuera de la esfera, el campo eléctrico es el mismo que el debido a una carga puntual. El campo es continuo en $r = R$.