ÓPTICA GEOMÉTRICA

Josep Lluís Font

EUETIT, Terrassa, Junio 2003

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

1. Naturaleza y Propagación.

El objeto de la Óptica es el estudio de la luz, es decir, del agente físico que sensibiliza los ojos. Su estudio nos enseña algo que es esencial de la estructura del Universo y su velocidad en el vacío es una constante universal básica.

1.1. Exposición histórica.

El estudio de los fenómenos luminosos ha ido de la mano del progreso de la humanidad. En este apartado señalamos, por orden cronológico, los hechos más relevantes de este avance científico y técnico.

Euclides publica las leyes de la reflexión hacia el siglo III a.c.

Herón de Alejandría y Tolomeo estudian la reflexión en espejos curvos y la refracción, sin un análisis cuantitativo, hacia el siglo II a.c.

Sobre el siglo XI, el científico árabe Alhazen publica su *Óptica*, considerado de referencia hasta el siglo XVII.

Snell (NL, 1591-1626) publica en 1621 la ley de la refracción.

Descartes (FR, 1596-1650) descubre en 1626 la misma ley independientemente.

Fermat (FR, 1601-1665) enuncia en 1657 el principio de tiempo mínimo para el camino óptico.

Newton (UK, 1642-1727) presenta su teoría de emisión, basada en corpúsculos.

Hooke (UK, 1635-1703) observa fenómenos de interferencia en 1665

Grimaldi (IT, 1618-1663) experimenta la difracción en 1665.

Huygens (NL, 1629-1695) enuncia la teoría ondulatoria en 1690.

Young (UK, 1773-1829) estudia el fenómeno de las interferencias en 1802.

Malus (FR, 1775-1812) descubre la polarización en 1808.

Fresnel (FR, 1788-1827) sugiere que la luz es un fenómeno ondulatorio.

Maxwell (SCO, 1831-1879) desarrolla la teoría electromagnética de la luz en 1873.

Hertz (DE, 1857-1894) experimenta con ondas electromagnéticas de alta frecuencia.

Einstein (DE-CH-USA, 1879-1955) propone la existencia de corpúsculos de luz, o fotones, en 1905.

Compton (USA, 1892-1962) estudia experimentalmente la difusión de fotones por electrones en 1923.

Hacia 1924, de Broglie introduce las bases de la dualidad onda corpúsculo y sienta los cimientos de la Mecánica Ondulatoria. De esta forma se daba explicación a los estados estacionarios de los electrones en los átomos postulados por Bohr (DK, 1885-1962). El estudio completo de la estructura atómica y de la interacción de las ondas electromagnéticas con la materia se debe fundamentalmente a Heisenberg, Schrödinger, Dirac y Feynman.

1.2. Naturaleza de la luz.

La teoría electromagnética es satisfactoria para explicar todos los fenómenos relacionados con la propagación de la luz, pero es incapaz de explicar los fenómenos de emisión y absorción, así como la interacción entre la materia y la radiación. Por un lado, tenemos fenómenos claramente ondulatorios, tales como la interferencia y la difracción, en los cuales la luz se comporta como una onda. Por otro lado, el efecto fotoeléctrico y la difusión por electrones libres (efecto Compton) implica una naturaleza corpuscular.

El punto de vista actual de la comunidad científica, frente a la constancia experimental aparentemente contradictoria, es aceptar el hecho de que la luz parece tener una doble naturaleza. Los fenómenos de propagación encuentran una buena explicación dentro de la teoría ondulatoria electromagnética, mientras que la acción mutua entre la luz y la materia, en los procesos de absorción y emisión, es un fenómeno corpuscular.

1.3. Óptica geométrica.

En Óptica existen un gran número de fenómenos que pueden estudiarse sin hacer ninguna hipótesis acerca de la naturaleza de la luz. Tomando la base experimental como fundamento, se pueden enunciar unos principios que permiten desarrollar este estudio de forma geométrica. Estos principios son:

1. Propagación rectilínea de la luz en un medio homogéneo e isótropo
2. Independencia de los rayos
3. Principio de Fermat

Puesto que estamos interesados en la propagación de la luz, usaremos la imagen ondulatoria. Para ello, es preciso definir el *frente de onda* como el lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran en igual fase. Cuando la fuente luminosa es puntual, los frentes son superficies esféricas centradas en la fuente. A grandes distancias de la fuente, los frentes de onda se pueden considerar como planos.

A veces es útil utilizar el concepto de *rayo luminoso*. En una teoría corpuscular, un rayo sería la trayectoria de un fotón. Desde el punto de vista ondulatorio, un rayo es una linea imaginaria en la dirección de propagación de las ondas. Desde el punto de vista de la teoría electromagnética, un rayo sería la dirección y el sentido del vector de Poynting. En un medio homogéneo e isótropo, los rayos son líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda; en la superficie de separación de dos medios, la dirección del rayo puede cambiar, pero se conserva recta en cada medio; si el medio no es homogéneo (por ejemplo, la atmósfera terrestre, donde la densidad y por lo tanto, la velocidad varían), los rayos se curvan, pero siguen siendo normales a los frentes de onda; si el medio es anisótropo (estructuras cristalinas), la dirección no es siempre normal a los frentes de onda.

1.4. Velocidad de la luz

El primer intento en medir la velocidad de la luz es debido a Galileo. Se dispuso él y un ayudante en la cima de dos montes próximos, provistos de sendas linternas. Cuando uno destapara su linterna, el otro haría lo mismo. Sabiendo la distancia entre los montes y el tiempo transcurrido, se podría inferir la velocidad de propagación. El resultado fue un fracaso puesto que el valor es muy elevado para este tipo de experimento.

En 1675 el astrónomo Ole Roemer (DK, 1644-1710) observó que los eclipses de los satélites de Júpiter sufrían un adelanto o retraso según que el planeta estuviera más cerca o más lejos de la Tierra, tal como se ilustra en la Figura 1. Conociendo el diámetro de la órbita terrestre y el retraso, llegó a la cifra de $2 \cdot 10^8$ m/s.

En 1727 James Bradley (UK, 1693-1762) usó el método astronómico de la *aberración* de las estrellas fijas, es decir, el desplazamiento que parece que presentan en el sentido de

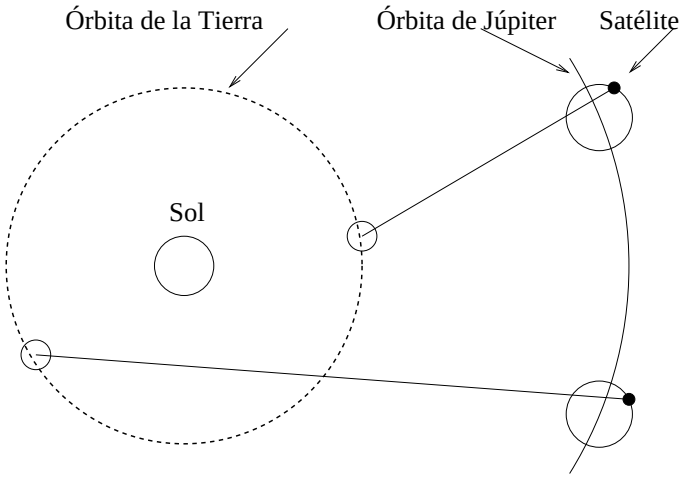

Figura 1: Esquema usado por Roemer para determinar la velocidad de la luz.

movimiento de la Tierra, supuesto perpendicular a la linea de observación [1]. El valor que encontró fue de $3 \cdot 10^8$ m/s.

La primera medida terrestre fue efectuada en 1849 por Fizeau (FR, 1819-1896). Su método consistía en hacer pasar la luz entre dos dientes de una rueda dentada, en la cual los dientes eran iguales a los huecos, reflejándose en un espejo y regresando a la rueda [2]. Haciendo girar la rueda a velocidad angular creciente, llegará un momento en que veremos luz. Conociendo el camino recorrido y el tiempo empleado por la rueda en girar un ángulo correspondiente a un diente, se puede calcular la velocidad de la luz. El valor hallado fue de $3,13 \cdot 10^8$ m/s.

En 1862, Foucault (FR, 1819-1868) utilizó un método basado en un espejo giratorio, como el que se esquematiza en la Figura 2. En esencia, se trata de enviar un rayo luminoso sobre un espejo octogonal que incide en M. En E hay otro espejo que refleja el rayo hasta N, y se observa. Al girar el espejo octogonal, la luz se recibe si el tiempo invertido por la luz en el camino MEN es igual (o múltiplo) al tiempo empleado por el espejo octogonal en girar un octavo de vuelta. Sea T el tiempo que invierte el espejo octogonal en dar una vuelta completa. Si denominamos d a la distancia $ME = EN$, entonces el tiempo que emplea la luz en recorrer la distancia MEN es $2d/c$, mientras que el tiempo que tarda en girar un octavo de vuelta es $T/8$. Igualando ambos tiempos, obtenemos $c = 16\,d/T$.

[1] Véase [1], página 15
[2] Véase [2], página 1086

Usando este método halló un valor de $2,98 \cdot 10^8$ m/s. El valor aceptado en la actualidad es $c = 299\,792,5$ km/s, con un error inferior a $3,4 \times 10^{-4}$ %.

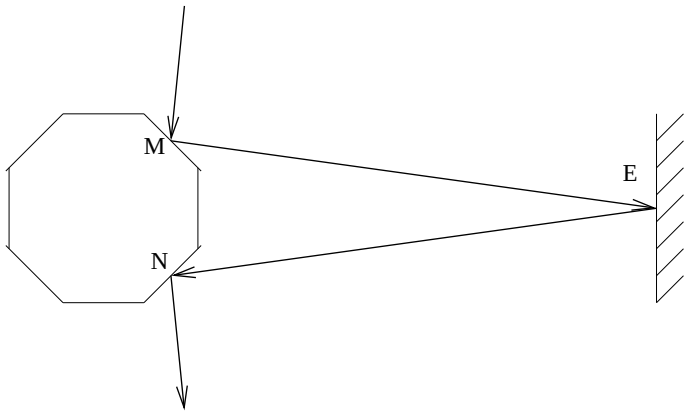

Figura 2: Método de Foucault para determinar la velocidad de la luz.

1.5. Índice de refracción

En los medios materiales, la luz se propaga con una velocidad v inferior a la velocidad c en el vacío. Al cociente entre una y otra se le llama índice de refracción absoluto del medio, y se denota por $n \equiv c/v$. En un medio homogéneo e isótropo, el valor del índice de refracción es constante; en un medio homogéneo anisótropo, el valor de n depende de la dirección de propagación; si el medio no es homogéneo, el índice de refracción depende del punto del medio considerado.

Como se expondrá más adelante, el índice de refracción depende de la longitud de onda de la luz empleada. También depende de la temperatura, y para los gases, depende de la presión, aumentando uniformemente con ésta. En la Tabla 1 se dan los índices de refracción de distintas sustancias líquidas para la luz amarilla de sodio $\lambda = 589$ nm. Análogamente, en la Tabla 2 se dan los índices de refracción de distintas sustancias sólidas para la misma longitud de onda.

1.6. Longitud de onda

Ya en 1690, Newton hizo un estudio de las franjas coloreadas que rodean el punto de contacto de una superficie esférica convexa, como una lente, con una lámina plana

Sustancia	n
Aceite de cedro	1.515
Acetona	1.359
Agua (15º C)	1.3334
Agua (20º C)	1.3329
Alcohol etílico	1.361
Alcohol metílico	1.329
Benceno	1.501
Bromo	1.654
Cloroformo	1.446
Glicerina	1.494

Tabla 1: Índice de refracción de algunos líquidos a 20ºC.

Sustancia	n
Hielo	1.32
Ámbar	1.546
Ácido Bórico	1.463
Alcanfor	1.532
Bálsamo de Canadá	1.530
Diamante	2.417
Vidrio de cuarzo	1.46
Zafiro, rubí (Al_2O_3)	1.767
Circón ($ZrO_2 \cdot SiO_2$)	1.923

Tabla 2: Índice de refracción de algunos sólidos.

de vidrio. Estas franjas se denominan *anillos de Newton* y se originan por fenómenos de interferencia entre las ondas luminosas reflejadas en las superficies plana y convexa. De la medida de los diámetros de los anillos se podrían haber deducido las longitudes de onda de la luz que los producen. Sin embargo, su teoría corpuscular estaba tan enraizada que desechó el fenómeno.

Las primeras medidas experimentales de las longitudes de onda de la luz se llevaron a cabo en 1827 por Young, Fresnel y Fraunhofer, usando métodos de interferencia y difracción. Los resultados experimentales fueron concluyentes y la longitud de onda era extremadamente pequeña. En la Tabla 3 se muestran las diferentes sensaciones que la luz produce en el ojo (colores) y su correspondencia con la longitud de onda.

Una de las relaciones fundamentales que se aplican a cualquier clase de movimiento ondulatorio es que la velocidad de propagación v, la frecuencia f y la longitud de onda λ están relacionadas mediante:

$$v = f\,\lambda \tag{1}$$

Cuando la luz pasa de un medio a otro de distinto índice de refracción, la frecuencia es la misma en ambos medios, ya que el número de ondas que abandona la superficie en un tiempo cualquiera ha de ser igual al número de las que llegan. Otro argumento es que los átomos absorben y reradian luz con la misma frecuencia. En consecuencia, la longitud

Color	λ (nm)
violeta	390-455
azul	455-492
verde	492-577
amarillo	577-597
naranja	597-622
rojo	622-780

Tabla 3: Nombres de los colores y su intervalo de longitudes de onda, expresados en nanómetros.

de onda en el vacío es distinta de la longitud de onda en un medio. Si la longitud de onda en el vacío es λ, la longitud de onda en un medio de índice de refracción n viene dada por $\lambda' = \lambda/n$.

1.7. Espectro electromagnético.

En lo que concierne a su naturaleza fundamental, no existe diferencia entre las ondas luminosas y otras ondas electromagnéticas. Es interesante observar brevemente el espectro electromagnético, utilizando la palabra *espectro* para designar todo el intervalo de ondas electromagnéticas, incluyendo el visible. La clasificación no tiene límites precisos, ya que fuentes diferentes pueden producir ondas en intervalos de frecuencias superpuestos parcialmente.

La clasificación habitual del espectro electromagnético es la siguiente:

1. Ondas de radiofrecuencia: tienen longitudes de onda que van desde algunos kilómetros a 0.3 m; el intervalo de frecuencias es desde algunos Hz hasta 10^9Hz. Por ejemplo, la banda de radio comercial de amplitud modulada (AM) va desde los 550 kHz hasta los 1600 kHz; la banda de radio ciudadana (CB, *Citizen Band*) va a unos 27 MHz; la banda de radio comercial de frecuencia modulada (FM) va desde los 88 MHz hasta los 108 MHz; la primera banda de telefonía móvil va a 900 MHz, y la segunda banda a 1800 MHz. Estas ondas se usan en sistemas de radio y televisión y se generan mediante dispositivos electrónicos.

2. Microondas: tienen longitudes de onda entre 0.3 m y 10^{-3} m y el intervalo de fre-

cuencias abarca desde 10^9Hz hasta 3×10^{11}Hz. Estas ondas se usan en radar y otros sistemas de comunicaciones; se generan también con dispositivos electrónicos. La región de las microondas se suele denominar UHF, acrónimo de las palabras inglesas Ultra High Frequency, frecuencias ultra altas, con respecto a la radiofrecuencia.

3. Infrarrojo: cubre el intervalo de longitudes de onda entre 10^{-3}m y $7{,}8 \times 10^{-7}$m, al que le corresponde un intervalo de frecuencias entre 3×10^{11}Hz y 4×10^{14}Hz. Esta región se subdivide en tres: el infrarrojo lejano, de 10^{-3}m a 3×10^{-5}m; el infrarrojo medio, de 3×10^{-5}m a 3×10^{-6}m, y el infrarrojo cercano, hasta los $7{,}8 \times 10^{-7}$m. Estas ondas son producidas por cuerpos calientes y moléculas.

4. Luz o espectro visible: véase la Tabla 3 en la página 11. La luz es producida por átomos y moléculas como resultado del ajuste de sus componentes, principalmente electrones.

5. Rayos ultravioletas: cubren desde $3{,}8 \times 10^{-7}$m hasta unos 6×10^{-10}m, con frecuencias que van desde 8×10^{14}Hz hasta 3×10^{17}Hz. Estas ondas son producidas por átomos y moléculas en descargas eléctricas. Su energía asociada es similar a la involucrada en muchas reacciones químicas, de ahí que algunos microbios la absorban y pueden ser destruidos como resultado de las reacciones químicas producidas. Su uso práctico está en algunas aplicaciones médicas y en procesos de esterilización.

6. Rayos X: esta parte del espectro electromagnético abarca longitudes de onda desde 10^{-9}m hasta 6×10^{-12}m, es decir, frecuencias entre 3×10^{17}Hz y 5×10^{19}Hz. Esta parte del espectro electromagnético fue descubierta en 1895 por W. Röntgen (DE, 1845-1923) usando un tubo de rayos catódicos. Una fuente de rayos X son los electrones atómicos más fuertemente ligados. Otra fuente de rayos X es la radiación de frenado, o bremsstrahlung. Los rayos X se usan para el diagnóstico médico porque se absorben mejor en los huesos en comparación con otros tejidos y permiten una "fotografía" nítida.

7. Rayos gamma: estas ondas electromagnéticas son de origen nuclear y se superponen al límite superior de los rayos X. Sus longitudes de onda van desde 10^{-10}m hasta mucho menos de 10^{-14}m, lo que corresponde a un intervalo de frecuencias entre 3×10^{18}Hz hasta más de 3×10^{22}Hz. La fuente principal de rayos gamma son las sustancias radiactivas, acompañando frecuentemente a las transiciones β^- y β^+,

así como a algunas transiciones de captura electrónica. Ocasionalmente se generan en transiciones α. En la radiación cósmica hay ondas electromagnéticas de frecuencias aún mayores, y se especula que su origen sea explosiones nova o supernova, absorción de materia por un agujero negro o transferencia de masa en un sistema estelar binario de una estrella a otra.

2. Reflexión y refracción en superficies planas.

Cuando un rayo luminoso llega a la superficie de separación de dos medios distintos, se producen dos rayos, uno reflejado y otro refractado o transmitido. En general, sólo una parte de la energía luminosa incidente pasa al otro medio. Además, las direcciones de propagación de los rayos reflejado y transmitido son distintas de la del rayo incidente. Experimentalmente se han podido deducir las leyes de la reflexión y de la reflexión:

Leyes de la reflexión

- El rayo incidente, el reflejado y la recta normal en el punto de incidencia están contenidos en un mismo plano.
- El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Leyes de la refracción

- El rayo incidente, el refractado y la normal en el punto de incidencia están contenidos en un mismo plano.
- El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y seno del ángulo de refracción es igual al cociente de las velocidades de ambos medios.

En esta sección deduciremos estas leyes experimentales a partir del Principio de Fermat.

2.1. Camino óptico. Principio de Fermat.

Supongamos un rayo luminoso que parte de un punto P y llega a un punto P' recorriendo la distancia s_1 en un medio de índice n_1; a continuación recorre una distancia

s_2 en un medio de índice n_2 y así sucesivamente. Cada uno de los medios se supone homogéneo e isótropo, por lo que la velocidad de la luz en cada trayecto será constante, y vale $v_k = c/n_k$. El tiempo empleado por la luz en ir de P a P' será:

$$t = \sum_k \frac{s_k}{v_k} = \frac{1}{c} \sum_k n_k s_k \tag{2}$$

A la magnitud $\sum_k n_k s_k$ se la denomina camino óptico y se la suele representar como $\mathcal{L}$. El significado físico es el camino que recorrería la luz en el vacío durante el mismo tiempo.

Hacia 1658, Fermat estableció que la trayectoria de un rayo luminoso de un punto a otro es la correspondiente al tiempo mínimo. En rigor, el tiempo invertido en la trayectoria real es máximo o mínimo, esto es, extremal. Por consiguiente, si se modifica ligeramente la trayectoria, la diferencia de tiempo entre la trayectoria real y la modificada es un infinitésimo de orden superior al del desplazamiento entre las trayectorias. En la mayor parte de los casos, la trayectoria real es la del tiempo mínimo.

2.2. Ley de la reflexión.

Supongamos un rayo luminoso que parte de A, se refleja en O y sigue hasta B, como se ilustra en la Figura 3. Supongamos que O pudiera encontrarse en cualquier punto de la recta horizontal. Trazando las perpendiculares desde A y B, y la normal en O, los ángulos i y r son respectivamente, los ángulos de incidencia y de reflexión. Representemos por v la velocidad de propagación. Si definimos $s_1 = \overline{AO}$ y $s_2 = \overline{OB}$, la longitud de la trayectoria es $s_1 + s_2$, y el tiempo t a lo largo de la misma será $t = (s_1 + s_2)/v$. Es fácil ver en la figura que:

$$s_1 = a \sec(i), \qquad s_2 = b \sec(r) \tag{3}$$

y de las ecuaciones anteriores se deduce que:

$$t = \frac{1}{v} \left(a \sec(i) + b \sec(r) \right) \tag{4}$$

Si desplazamos ligeramente el punto O, los ángulos i y r experimentarán variaciones di y dr, y la correspondiente variación del tiempo dt será:

$$dt = \frac{1}{v} \left(a \sec(i) \tan(i) di + b \sec(r) \tan(r) dr \right) \tag{5}$$

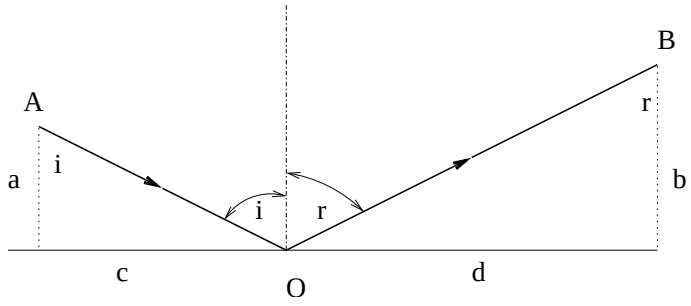

Figura 3: Construcción geométrica para la demostración de las leyes de la reflexión usando el Principio de Fermat.

Si el tiempo es mínimo, resulta ser $dt = 0$ y obtenemos:

$$a \sec(i) \tan(i) di = -b \sec(r) \tan(r) dr \tag{6}$$

Pero las diferenciales di y dr no son independientes entre sí. De la Figura 3 se deduce fácilmente que:

$$c + d = cons. = a \tan(i) + b \tan(r) \tag{7}$$

Diferenciando ahora ambos miembros, se obtiene:

$$0 = a \sec^2(i) di + b \sec^2(r) dr \tag{8}$$

Combinando esta condición con la de tiempo mínimo, resulta:

$$\sin(i) = \sin(r) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{i = r} \tag{9}$$

Por lo tanto, la trayectoria luminosa AOB recorrida en el tiempo mínimo es aquélla para la que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia.

Cuando se produce una reflexión, no toda la energía del rayo incidente pasa al medio de transmisión. Puede demostrarse[3] que si el ángulo de incidencia es nulo (incidencia normal), la relación entre la intensidad incidente I_i y la intensidad reflejada I_r resulta ser:

$$I_r = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_i \tag{10}$$

siendo n_1 y n_2 los índices de refracción de ambos medios.

[3]Véase la sección 20.7 en la página 817 de [3]

La reflexión que aquí se ha descrito constituye la reflexión especular. Ésta se produce cuando la superficie de separación es lisa. Existe otro tipo de reflexión más frecuente, la llamada reflexión difusa, en que la superficie es rugosa y los rayos entran en el ojo procedentes de muchos puntos de reflexión en la superficie, de modo que no existe una imagen.

2.3. Imágenes en espejos planos.

En la Figura 4 se muestra un haz de rayos luminosos que proceden de una fuente puntual P y se refleja en un espejo plano. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' detrás del plano del espejo. El punto P' se denomina **imagen** del **objeto** P. Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que procedieran de una fuente luminosa situada en P' sin que hubiese espejo. La imagen se denomina **virtual** debido a que la luz no procede realmente de la imagen.

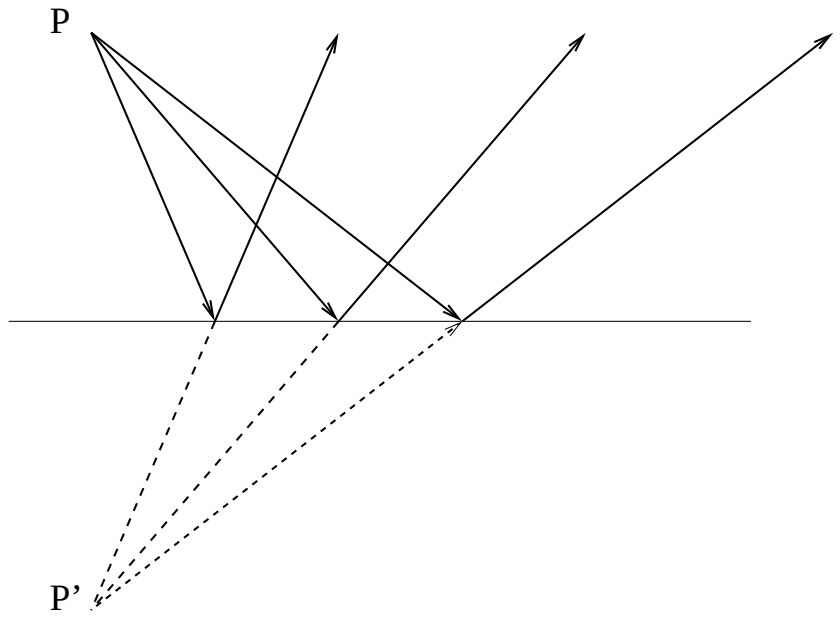

Figura 4: Los rayos procedentes de un punto luminoso P reflejados por un espejo parecen proceder del punto imagen P' detrás del espejo.

Un tipo de *reflector retroversor*, que se utiliza frecuentemente como indicador de peligro en carreteras, consiste en una cazoleta metálica de varios centímetros de diámetro.

Comenzando con unos 3 cm en la boca, se aplastan las caras para formar tres superficies reflectantes normales entre sí que se encuentran en un punto romo en el fondo de la cazoleta. La boca está herméticamente cerrada con una tapa de vidrio rojo o ámbar.

Las tres superficies reflectantes interiores de la cazoleta tienen la propiedad de que cualquier rayo de luz que se refleje sucesivamente en las tres cambia exactamente de sentido, manteniendo una dirección paralela a la de entrada. Así, un haz procedente de un faro que incida sobre el reflector se proyecta directamente hacia atrás en la dirección del foco emisor, aunque éste no esté frente al reflector.

En la mayor parte de los casos, el objeto del cual un sistema óptico forma una imagen tiene tres dimensiones. Puesto que cada punto del objeto le corresponde un punto imagen, ésta tiene también tres dimensiones. La interpretación completa de la formación de la imagen sólo puede obtenerse mediante un estudio de los objetos tridimensionales y de sus imágenes.

2.4. Ley de la refracción o de Snell.

La Ley de Snell o de la refracción puede deducirse de un modo análogo a como se ha deducido la ley de la reflexión. Para ello, consideremos el esquema de la Figura 5.

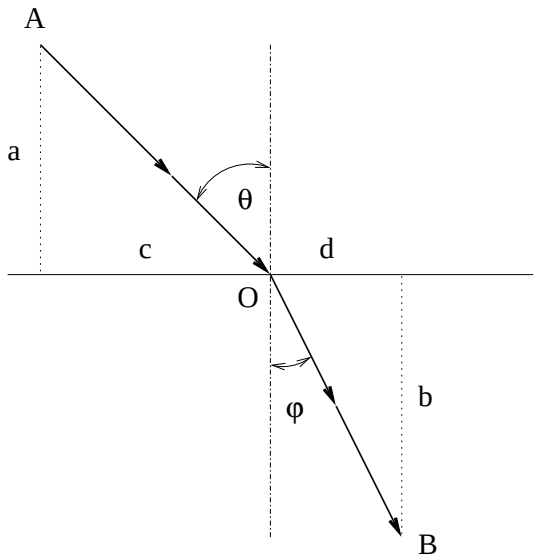

Figura 5: Construcción geométrica para la demostración de la Ley de Snell usando el Principio de Fermat.

Supongamos que la linea horizontal representa el plano de separación de dos medios diferentes, cuyas velocidades de propagación son respectivamente v y v'.; sea AOB la trayectoria de un rayo que se propaga desde A hasta B, y θ y φ los ángulos de incidencia y de refracción. El tiempo invertido desde A hasta B resulta ser:

$$t = \frac{a\ \sec(\theta)}{v} + \frac{b\ \sec(\varphi)}{v'} \tag{11}$$

Si desplazamos ligeramente el punto O, obtenemos:

$$dt = \frac{a\ \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta}{v} + \frac{b\ \sec(\varphi)\tan(\varphi)d\varphi}{v'} \tag{12}$$

Si el tiempo es mínimo, $dt = 0$ y por lo tanto:

$$\frac{a\ \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta}{v} = -\frac{b\ \sec(\varphi)\tan(\varphi)d\varphi}{v'} \tag{13}$$

Al ser $c + d = const$, obtenemos:

$$a\ \sec^2(\theta)d\theta = -b\ \sec^2(\varphi)d\varphi \tag{14}$$

Dividiendo entre sí las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{\sin(\varphi)}{v'} \tag{15}$$

Teniendo en cuenta ahora que $v = c/n$ y que $v' = c/n'$, la anterior expresión se reduce a:

$$\boxed{n\ \sin(\theta) = n'\ \sin(\varphi)} \tag{16}$$

que es la forma más conocida de la Ley de Snell.

La ley de la refracción también puede deducirse mediante el Principio de Huygens, que lo enunció hacia 1678. Este Principio se basa en el hecho de que cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de ondas elementales secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de ondas primario al cabo de cierto tiempo, es la envolvente de estas ondas elementales. En su versión original, Huygens no tuvo en cuenta que si los puntos de un frente de ondas fueran focos puntuales, habrían también ondas moviéndose hacia atrás. Este Principio fue modificado posteriormente por Fresnel, de modo que el nuevo frente de onda se calculaba a partir del primitivo mediante la superposición de ondas elementales, considerando amplitudes

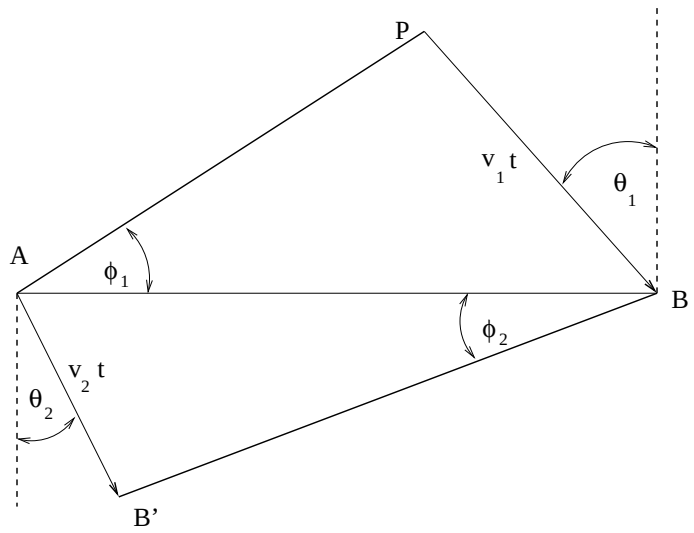

Figura 6: Construcción geométrica para la Ley de Snell utilizando el Principio de Huygens.

y fases relativas. Con posterioridad, Kirchhoff demostró que la intensidad de las ondas elementales depende del ángulo y que es nula en sentido hacia atrás[4].

Apliquemos el Principio de Huygens para hallar el frente de onda de la onda transmitida. En la Figura 6 se ve una onda plana incidente sobre una superficie de separación de dos medios dieléctricos. El segmento AP indica una porción del frente de onda en el medio 1 que incide sobre el medio de transmisión con un ángulo de incidencia ϕ_1. En el tiempo t la onda elemental procedente de P recorre la distancia $v_1 t$ y alcanza el punto B sobre la linea AB que separa ambos medios, mientras que la onda elemental procedente del punto A recorre una distancia menor $v_2 t$ dentro del segundo medio. El nuevo frente de onda no es paralelo al frente de onda original AP porque son diferentes las velocidades v_1 y v_2. Del triángulo APB se deduce:

$$\sin(\phi_1) = \frac{v_1\, t}{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad AB = \frac{v_1\, t}{\sin(\phi_1)} = \frac{v_1\, t}{\sin(\theta_1)} \tag{17}$$

donde se ha hecho uso de que el ángulo ϕ_1 es igual al ángulo de incidencia θ_1. De forma análoga, el triángulo AB'B nos muestra:

$$\sin(\phi_2) = \frac{v_2\, t}{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad AB = \frac{v_2\, t}{\sin(\phi_2)} = \frac{v_2\, t}{\sin(\theta_2)} \tag{18}$$

[4]Para una interesante discusión de la modificación de Kirchhoff al Principio de Huygens, ver la sección 20.2, página 802 de [3]

donde de nuevo se ha usado que $\phi_2 = \theta_2$. Igualando ambas expresiones para AB obtenemos:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)} \tag{19}$$

que constituye la Ley de Snell.

2.5. Refracción en una superficie plana.

Consideremos la superficie de separación de dos medios con distintos índices de refracción, como se ilustra en la figura 7. Supongamos que los rayos luminosos proceden de un punto P situado en el medio inferior a una distancia y por debajo del plano X-Z, que separa ambos medios. Supongamos además que el índice de refracción del medio inferior es n, el del superior n' y que se verifica que $n > n'$.

Se trata de calcular la distancia y' del punto P' por debajo de la superficie límite.

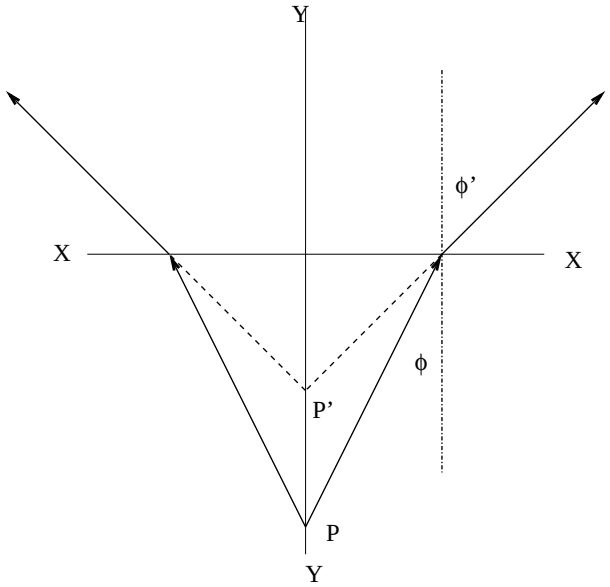

Figura 7: Refracción en una superficie plana. Los rayos próximos a la normal forman en P' una imagen virtual de P.

En virtud de la Ley de Snell, podemos poner:

$$n \sin(\phi) = n' \sin(\phi') \tag{20}$$

De la figura se deduce:

$$y\ \tan(\phi) = y'\ \tan(\phi') \tag{21}$$

Dividiendo ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{y\ \tan(\phi)}{n\ \sin(\phi)} = \frac{y'\ \tan(\phi')}{n'\ \sin(\phi')} \Longrightarrow y' = y\frac{n'}{n}\frac{\cos(\phi')}{\cos(\phi)} \tag{22}$$

El cociente $\cos(\phi')/\cos(\phi)$ varía con el ángulo de incidencia ϕ, de modo que la distancia y' no es la misma para otros rayos que divergen desde P bajo ángulos distintos que los representados en la figura. Esto equivale a decir que los rayos refractados no parecen propagarse desde un punto común.

Ahora bien, si consideramos a un observador que mira verticalmente hacia abajo desde un punto situado sobre el eje Y por encima de la superficie límite y suponemos que el cono de rayos que recibe queda limitado a un ángulo extremadamente pequeño, el cociente $\cos(\phi')/\cos(\phi)$ se aproxima a la unidad, con lo que la anterior ecuación se convierte en:

$$\boxed{y' = y\frac{n'}{n}} \tag{23}$$

Dicho de otro modo, un estrecho pincel de rayos próximos a la normal forma un punto imagen de P en P', y un observador mirando verticalmente hacia abajo ve imágenes bien definidas de objetos situados por debajo de su superficie a una profundidad aparente dada por la expresión (23).

Cuando la visual no es perpendicular a la superficie refringente, el caso resulta más complicado. No existe ningún punto desde el cual parezcan divergir los rayos refractados y no se forma una imagen puntual de P. Se dice que el pincel de rayos refractados es *astigmático*[5].

Una forma sencilla de poner de manifiesto este efecto se ilustra en la Figura 8, experiencia que ya era conocida por los griegos clásicos. Se coloca una moneda en el fondo de una taza vacía y se sitúa el ojo del observador en una posición tal que la moneda quede justamente oculta debajo del borde del recipiente. Si se vierte agua, la moneda parece elevarse y aparece a la vista.

[5]Aberración de un sistema óptico consistente en que la imagen de un punto objeto no es un punto sino dos rectas perpendiculares entre sí que se cruzan sin cortarse. La causa consiste en que la superficie de onda emergente no es esférica, sino que tiene dos centros de curvatura.

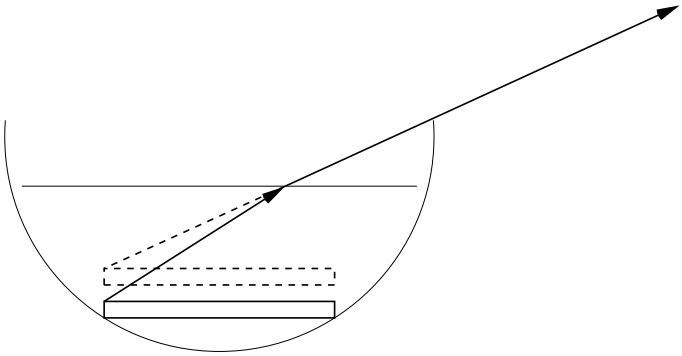

Figura 8: Imagen astigmática de un objeto sumergido debido a la refracción plana con incidencia oblicua.

2.6. Reflexión total.

Cuando un rayo luminoso viaja desde un medio de índice mayor a otro medio de índice menor, el rayo refractado se aleja cada vez más de la normal, como se ilustra en la Figura 9.

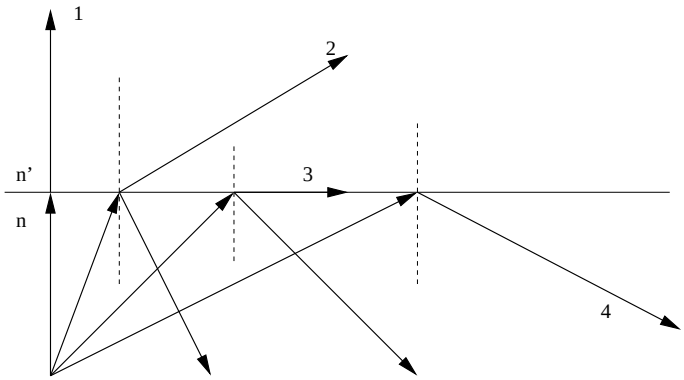

Figura 9: El ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción es de 90º se denomina ángulo límite.

En virtud de la Ley de Snell, podemos expresar la relación entre el ángulo de incidencia ϕ y el de refracción ϕ' mediante:

$$\sin(\phi') = \frac{n}{n'}\sin(\phi) \tag{24}$$

Puesto que el cociente n/n' es mayor que la unidad, $\sin(\phi)$ es menor que $\sin(\phi')$, y éste es igual a la unidad (es decir, $\phi' = 90^o$) para un cierto ángulo ϕ menor que

90º. Esto está representado en la Figura 9 para el rayo 3, el cual emerge rasante a la superficie formando un ángulo de refracción de 90º. El ángulo de incidencia para el cual el rayo refractado emerge tangente a la superficie se denomina *ángulo límite*. Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, el seno del ángulo de refracción calculado mediante la Ley de Snell es mayor que la unidad. Esto se interpreta diciendo que los rayos que inciden con un ángulo superior al límite no pasan al otro medio, sino que son *reflejados totalmente* en la superficie de separación. Esto sólo sucede si el índice del medio de incidencia es mayor que el índice del medio de transmisión.

Es preciso notar que la reflexión de la luz en una superficie límite no aparece repentinamente para el ángulo límite, sino que se aproxima a la reflexión total de un modo gradual. Cuando un rayo luminoso incide en la superficie de separación de dos medios transparentes bajo un ángulo menor que el límite, se producen *a la vez* reflexión y refracción.

El ángulo límite puede determinarse mediante la Ley de Snell haciendo que $\phi' = 90^o$, o lo que es lo mismo, $\sin(\phi') = 1$. Se tiene entonces:

$$\boxed{\sin(\phi_\ell) = \frac{n'}{n}} \tag{25}$$

2.7. Prismas de reflexión total.

Si se toma como índice de refracción típico para el vidrio el valor de 1.50, el ángulo límite para una superficie aire-vidrio resulta ser de unos 42º, que afortunadamente es algo inferior a 45º, lo que permite el uso de muchos instrumentos de óptica en forma de prisma con ángulos $45^o - 45^o - 90^o$ como superficies de reflexión total, como se ilustra en la Figura 10.

Las ventajas de los prismas de reflexión total sobre las superficies metálicas son, en primer lugar, que la luz es reflejada *totalmente*, mientras que ninguna superficie metálica refleja el 100 % de la luz incidente. En segundo lugar, que las propiedades reflectantes son permanentes y no se alteran por el deslustrado de la superficie. Contrarrestando estas ventajas, está el hecho de que hay alguna pérdida de luz por reflexión en las superficies por las que entra y sale la luz del prisma. Esta pérdida puede estimarse usando la expresión (10).

2.8. Refracción en lámina plana.

Supongamos que la luz incide bajo un ángulo φ sobre la superficie superior de una lámina transparente, como se ilustra en la Figura 11. Sea φ' el ángulo de refracción, n el

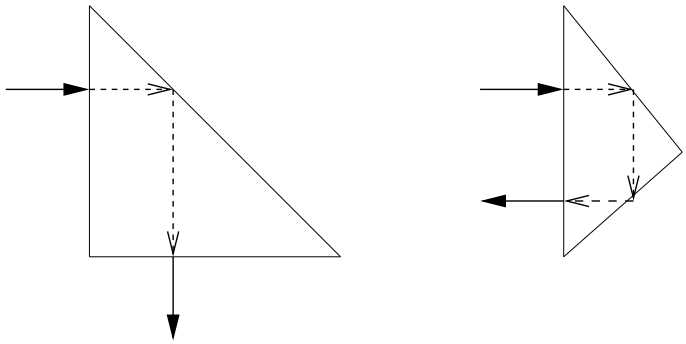

Figura 10: A la izquierda, un prisma de reflexión total; a la derecha, el llamado Prisma de Porro.

índice del medio donde está inmersa la lámina y n' el índice de la lámina, verificándose que $n < n'$. Por congruencia de triángulos, es evidente que el rayo emergente es paralelo al rayo incidente y que por lo tanto, no es desviado. Lo que sufre es un *desplazamiento*, que puede calcularse considerando el triángulo OHO'. En efecto, si el grosor de la lámina es h, la distancia OO' resulta ser $h/\cos(\varphi')$, y por lo tanto, el desplazamiento lateral se puede calcular mediante:

$$HO' = OO' \sin(\varphi - \varphi') = \boxed{\frac{h}{\cos(\varphi')} \sin(\varphi - \varphi')} \tag{26}$$

2.9. Refracción en un prisma.

Consideremos un rayo de luz monocromático que incide bajo un ángulo φ sobre la cara de un prisma, como se indica en la Figura 12. Sea n el índice de refracción del prisma, α el ángulo en el vértice y que el sistema está inmerso en aire. El problema consiste en calcular el ángulo de desviación δ, esto es, el ángulo que ha girado el rayo de luz con respecto a su trayectoria original.

El problema es inmediato, sin más que aplicar la ley de Snell en la primera superficie, calcular el ángulo de refracción, encontrar el ángulo de incidencia en la segunda superficie y aplicar de nuevo la ley de Snell para calcular el ángulo de refracción en la segunda superficie. Los detalles pueden encontrarse en [4] y se resumen de la siguiente forma. Del triángulo ONO' se deduce $\varphi' + \epsilon' + \widehat{ONO'} = 180^{\circ}$. Al ser la recta ON perpendicular a la recta OA, y la recta O'N perpendicular a la O'A, los ángulos subtendidos son iguales y por consiguiente $\widehat{ONO'} = 180^{\circ} - \alpha$, con lo que obtenemos $\varphi' + \epsilon' = \alpha$. La aplicación de

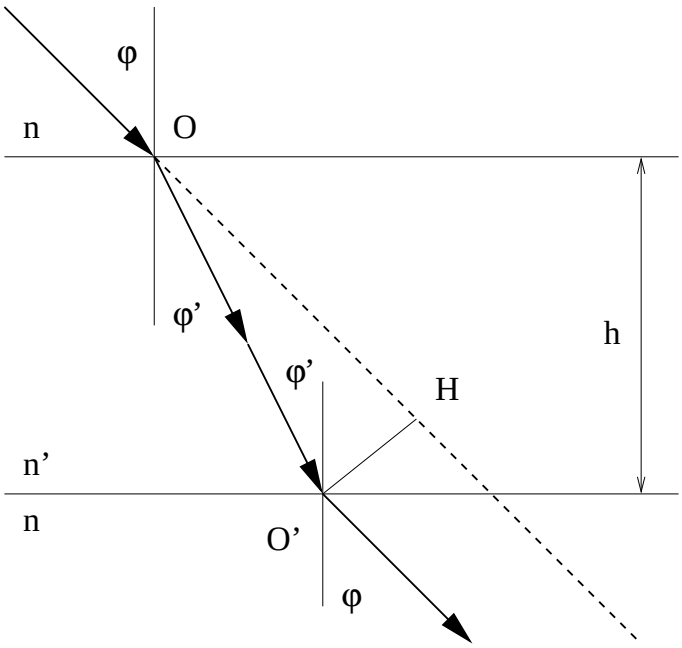

Figura 11: Refracción por una lámina de caras planas paralelas.

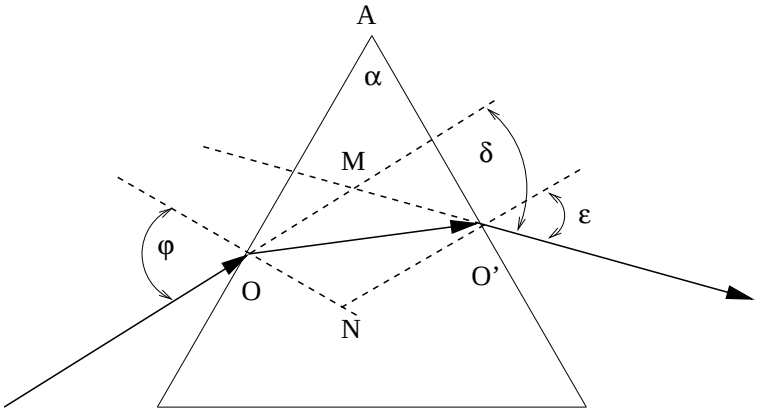

Figura 12: Desviación por un prisma.

la Ley de Snell al punto O nos indica $\sin(\varphi) = n\sin(\varphi')$, mientras que la misma Ley en el punto O' nos da $n\sin(\epsilon') = \sin(\epsilon)$. Además, se verifica que la desviación del rayo resulta ser:

$$\delta = \varphi + \epsilon - \alpha \tag{27}$$

Cuando el ángulo de incidencia φ disminuye, a partir de un valor grande, el ángulo de desviación δ decrece al principio y después aumenta, haciéndose mínimo cuando los rayos atraviesan el prisma simétricamente (esto es, cuando el rayo en el interior del prisma es perpendicular a la bisectriz del ángulo α). A dicho ángulo se le denomina *ángulo de desviación mínima* δ_m. En este caso es inmediato demostrar que se verifican las siguientes igualdades: $\epsilon' = \varphi'$, $2\varphi' = \alpha$, y $\delta_m = 2\varphi - \alpha$. Aplicando la Ley de Snell al punto O encontramos:

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \tag{28}$$

2.10. Dispersión.

Mientras que la velocidad de la luz en el vacío es la misma para todas las longitudes de onda, la velocidad en una sustancia material es distinta para las distintas longitudes de onda. Por consiguiente, el índice de refracción es función de la longitud de onda. Cuando la velocidad de una onda varía con la longitud de ésta, se dice que el medio es *dispersivo* o que se produce el fenómeno de *dispersión*. La dependencia del índice de refracción con la longitud de onda la da, de forma aproximada, la fórmula de Cauchy [6], que puede expresarse de la forma:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad \begin{cases} A = 1 + (Ne^2)\,/\,(2\epsilon_0 m\omega_0^2) \\ B = (2\pi^2 c^2 N e^2)\,/\,(\epsilon_0 m\omega_0^4) \end{cases} \tag{29}$$

siendo N el número de electrones por unidad de volumen; e la carga del electrón; ϵ_0 la permitividad del vacío; m la masa del electrón y ω_0 sería una frecuencia característica del espectro de emisión de la sustancia.

Con el fin de tener un método cuantitativo para determinar cuán dispersivo es un material transparente, se toman tres longitudes de onda del espectro de emisión del hidrógeno,

[6] Véase el ejemplo 21.10, página 871 de [3]

las llamadas líneas C, D y F de Fraunhofer, cuyas longitudes de onda son, respectivamente, $\lambda_C = 656{,}3$ nm, $\lambda_D = 589{,}0$ nm y $\lambda_F = 486{,}2$ nm. Con este patrón, se calculan los índices de refracción respectivos y se define la magnitud $\omega = (\mathrm{n_F} - \mathrm{n_C})/(\mathrm{n_D} - 1)$ como el *poder dispersivo* del material[7].

2.11. Arco iris.

El arco iris es producido por los efectos combinados de la refracción, dispersión y reflexión total de la luz del Sol por las gotas de lluvia. Cuando las condiciones para su observación son favorables, pueden verse dos arcos: el interior, llamado arco iris primario, más brillante, con el rojo en el exterior y el violeta en el interior, mientras que el arco exterior es más débil y los colores están invertidos. Analicemos en detalle cómo se produce el arco primario.

Consideremos un rayo de luz monocromático que incide en una gota de lluvia, como se ilustra en la Figura 13.

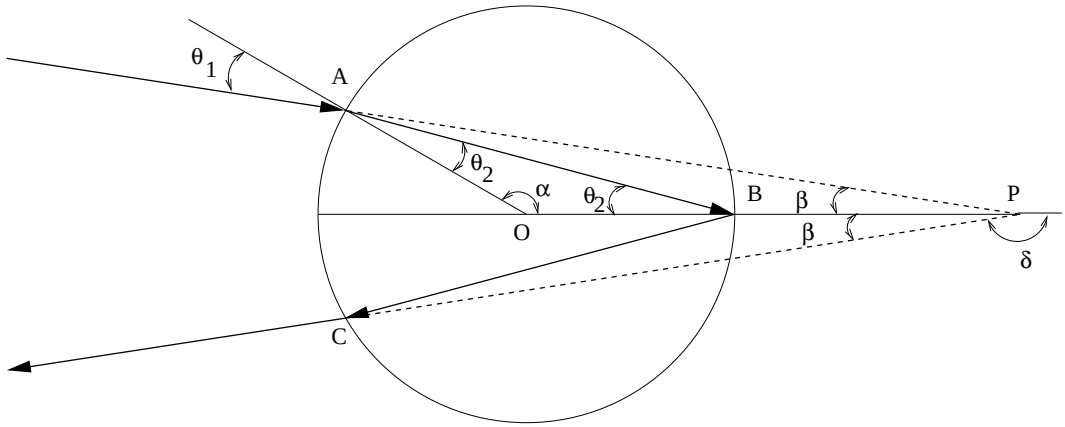

Figura 13: Refracción y reflexión de un rayo de luz monocromático en una gota de lluvia esférica.

Este rayo es refractado en A y reflejado, en parte, en B, saliendo refractado nuevamente en C. El ángulo de refracción θ_2 está relacionado con el de incidencia θ_1 mediante la Ley de Snell $\sin(\theta_1) = n\ \sin(\theta_2)$, donde n es el índice de refracción del agua y se supone

[7]Históricamente, esta magnitud está relacionada con la diferencia de las distancias focales de una lente delgada para las longitudes de onda de las rayas C y F de Fraunhofer, conocida como *aberración cromática longitudinal*.

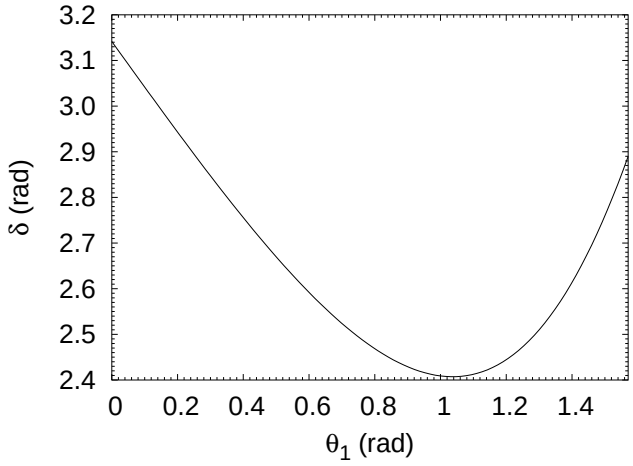

Figura 14: Gráfica de la ecuación (30) donde se aprecia el mínimo y el valor de la función en el mínimo.

que está rodeada de aire. El punto P es el de intersección del rayo incidente con el rayo emergente. Al ángulo δ se le llama *ángulo de desviación del rayo* y está relacionado con β mediante $\delta + 2\beta = \pi$. El ángulo 2β es el radio angular del arco iris. El objetivo es relacionar el ángulo de desviación δ con el de incidencia θ_1.

Analizando el triángulo AOB se obtiene $2\theta_2+\alpha = \pi$, mientras que a partir del triángulo AOP se tiene $\theta_1 + \beta + \alpha = \pi$. Combinando ambas, obtenemos $\beta = 2\theta_2 - \theta_1$. Esta relación nos permite expresar el ángulo de desviación como $\delta = \pi - 4\theta_2 + 2\theta_1$. Sustituyendo ahora θ_2 de la Ley de Snell en función del ángulo de incidencia θ_1, el ángulo de desviación δ se puede escribir de la forma:

$$\boxed{\delta \quad = \pi \quad + \quad 2 \quad \theta_1 \quad - \quad 4 \quad \arcsin\left(\frac{\sin(\theta_1)}{n}\right)} \tag{30}$$

Tomando para el índice de refracción del agua n el valor 1.333 (ver Tabla 1), el ángulo de desviación δ adquiere su valor mínimo cuando el ángulo de incidencia θ_1 vale aproximadamente unos 60º, como se ilustra en la Figura 14.

A la vista de la anterior Figura 14, podemos afirmar que el valor mínimo resulta ser $\delta = 138^{\circ}$. Este ángulo es el de *mínima desviación* y los rayos cercanos se desviarán casi de la misma forma. Por último, el radio angular del arco iris resulta ser $2\beta = \pi - \delta = 180^{\circ} - 138^{\circ} = 42^{\circ}$.

El color que se ve para cada radio angular concreto corresponde a la longitud de onda de la luz que tenga un ángulo de mínima desviación que permita a la luz alcanzar el ojo

viniendo desde las gotitas con este radio angular. Puesto que el índice de refracción del agua es menor para la luz roja que para la violeta, la función arcsin de la ecuación (30) es mayor para la luz roja que para la violeta. Por consiguiente, δ es menor para la luz roja que para la violeta y β es mayor para la roja que para la violeta. En consecuencia, la parte roja del arco iris está situada con un radio angular ligeramente mayor que la parte violeta del mismo.

3. Bibliografía

Referencias

[1] Francis W. Sears. *Fundamentos de Física III: Óptica.* Aguilar, Madrid, 1963.

[2] P.A. Tipler. *Física para la ciencia y la tecnología.*, volume 2. Editorial Reverté, Barcelona, 1999. ISBN 84-291-4382-3.

[3] M. Alonso and E.J. Finn. *Física. Volumen II: Campos y Ondas.* Aguilar, Madrid, 1974. ISBN 84-03-20234-2.

[4] J. Fernández and M. Pujal. *Iniciación a la Física*, volume 2. Editorial Reverté, Barcelona, 1985. ISBN 84-291-4273-8.