Cinemática del Sólido Rígido (SR)

OBJETIVOS

- Introducir los conceptos de *sólido rígido, traslación, rotación* y *movimiento plano*.
- Deducir la ecuación de distribución de velocidades entre puntos del SR y el concepto de *centro instantáneo de rotación*.
- Poder resolver las velocidades de puntos del SR y la $\vec{\omega}$ en algunos movimientos planos.

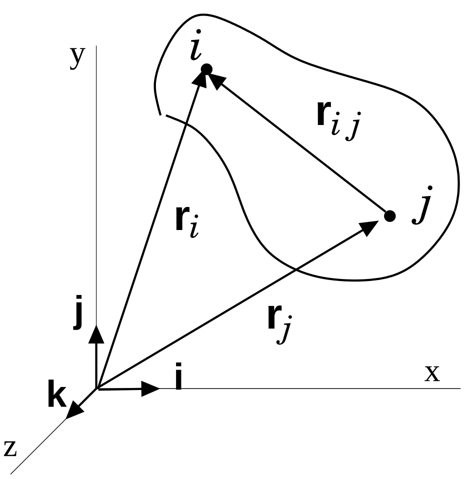
DESARROLLO

Concepto de sólido rígido

> Definimos un SR como un sistema de partículas en el que la distancia entre dos partículas cualesquiera del sistema permanece invariante en el transcurso del tiempo.

Matemáticamente podemos escribir esta condición por:

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}_i - \vec{r}_j| &= cte' \\
|\vec{r}_{ij}| &= cte' \\
(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 &= cte
\end{aligned}
$$



Condición cinemática de rigidez

El movimiento de los puntos del sólido no es totalmente libre debido a la condición de rigidez.

Podemos obtener una condición entre velocidades derivando la condición de rigidez:

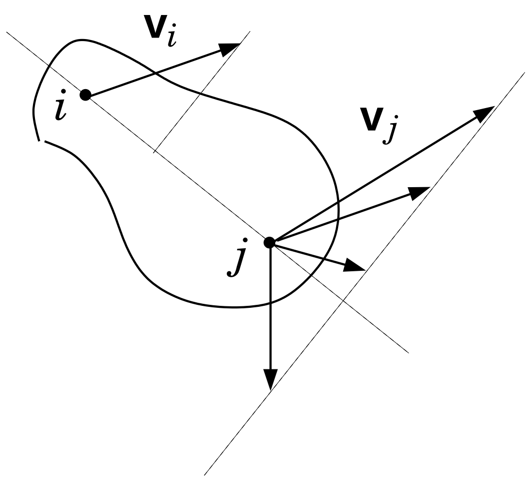
$$\begin{aligned}
(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 &= cte \\
\frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 &= 0 \\
\frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 &= 2\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\ \cdot\ \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_j}{dt}\right] = 0
\end{aligned}$$

Ninguno de los vectores de la ecuación anterior es necesariamente cero ni las restas que aparecen, por lo que debe ser cero el producto escalar:

$$\begin{aligned}
(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\ \cdot\ \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_j}{dt}\right] &= 0 \\
\vec{r}_{ij}\ \cdot\ (\vec{v}_i - \vec{v}_j &= 0 \\
\vec{r}_{ij}\ \cdot\ \vec{v}_{ij} &= 0 \\
\boxed{\vec{r}_{ij}\ \cdot\ \vec{v}_i = \vec{r}_{ij}\ \cdot\ \vec{v}_j}
\end{aligned}$$

Esta última condición recibe el nombre de condición cinemática de rigidez y tiene una interpretación geométrica clara:

Las proyecciones de los vectores velocidad $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_j$ sobre la recta que une el punto i y j del sólido son iguales.

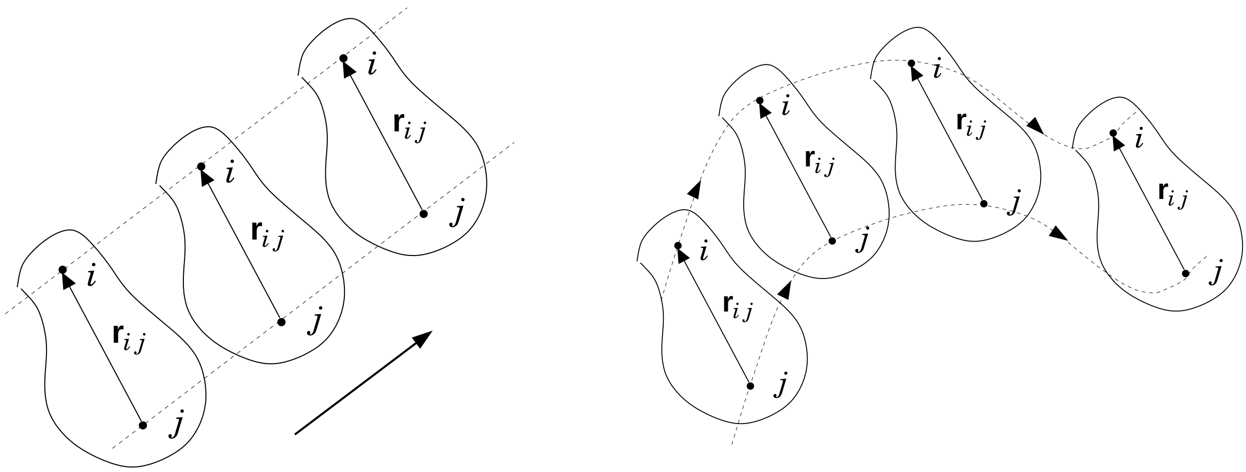


Movimiento de traslación del SR

Definición

Un SR realiza una traslación cuando un segmento rectilíneo definido por dos puntos cualesquiera del sólido permanece paralelo a si mismo durante el movimiento

Ver que esta definición incluye tanto movimientos rectilíneos como algunos curvilíneos.



Matemáticamente podemos deducir para una traslación:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \;=\; 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_j}$$

Es decir, en una traslación todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (y por lo tanto la misma aceleración)

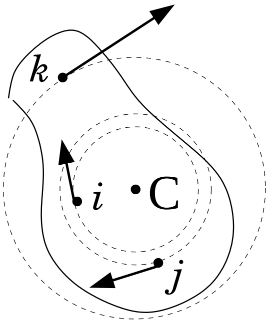
Basta con conocer el movimiento de un punto del sólido para describir completamente una traslación.

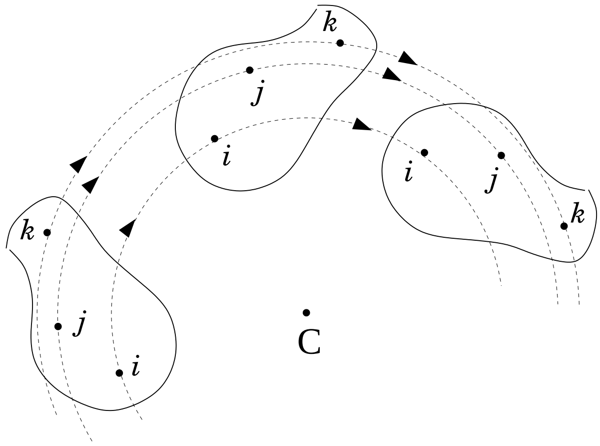
Movimiento de rotación del SR

Definición

> Un SR realiza una rotación alrededor de un eje cuando todos sus puntos describen trayectorias circulares centradas en dicho eje y contenidas en planos perpendiculares a este.

El eje de rotación puede atravesar el SR o ser exterior al este.

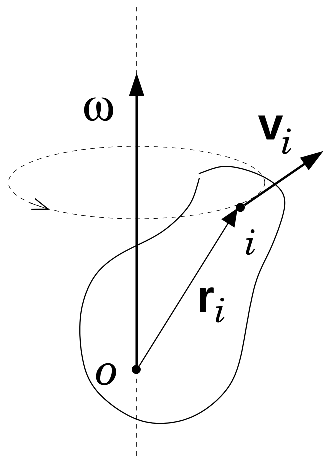




Para describir matemáticamente el movimiento de los puntos en una rotación podemos usar el vector velocidad angular de la rotación:

- Todos los puntos hacen una rotación con la misma $\vec{\omega}$
- La velocidad de cada punto vendrá dada por:

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$$



> Es decir, un movimiento de rotación queda determinado completamente por el vector velocidad angular $\vec{\omega}$
>
> Basta con conocer el vector $\vec{\omega}$ y su recta de aplicación para determinar completamente el movimiento de todos los puntos del SR en una rotación.

Movimiento plano del SR

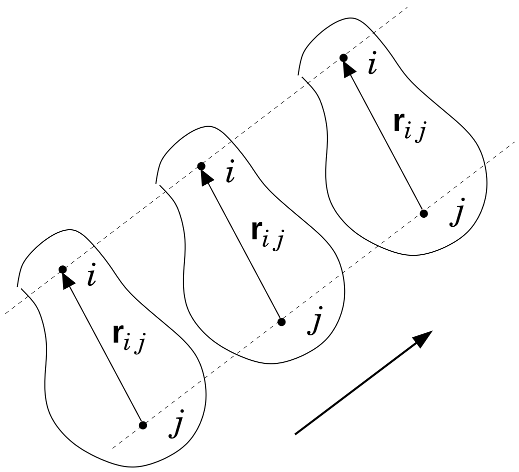
Definición

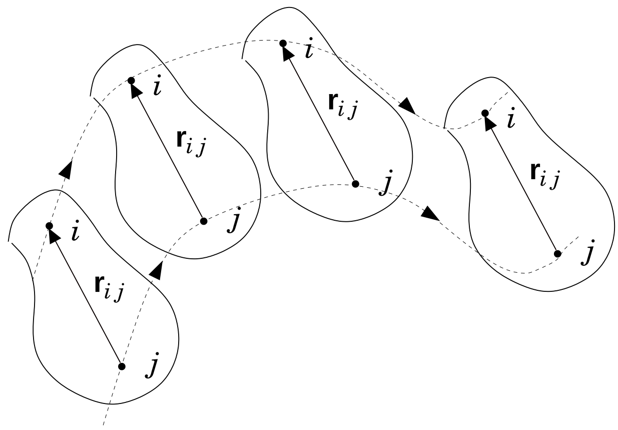
> Un SR realiza una movimiento plano si todos los puntos del SR se mueven describiendo trayectorias que están contenidas en planos paralelos entre sí y que son a su vez paralelos a un plano de simetría del sólido.

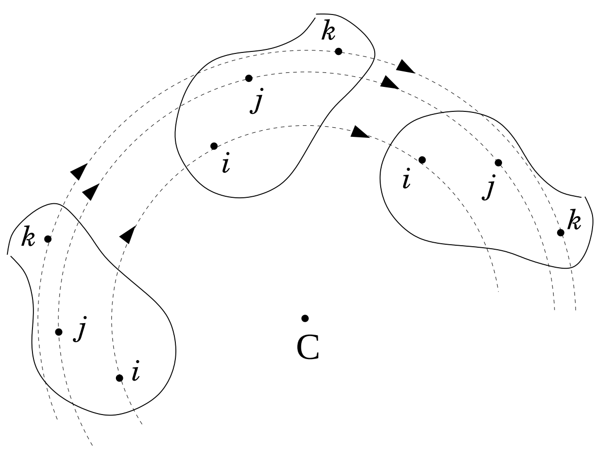
Un cuerpo plano que se mueve en el plano que contiene al cuerpo siempre realiza un movimiento plano.

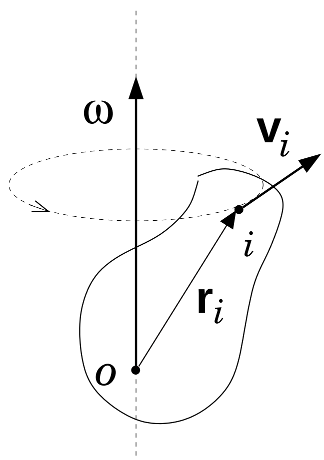
En Física I nos limitaremos a estudiar el movimiento plano.

Ver que en el movimiento plano los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ siempre serán perpendiculares al plano del movimiento.









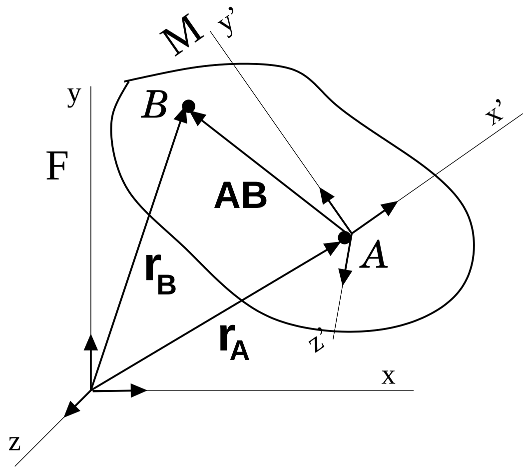
Distribución de velocidades en puntos del SR

Veremos ahora que cualquier movimiento de los puntos de un SR se puede reproducir mediante la suma de una traslación más una rotación.

Sea F un sistema fijo y M un sistema que se mueve como el SR.

Para las velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \left.\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right|_F \\ \vec{v}_B &= \left.\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right|_F \end{aligned}$$



Para relacionar $\vec{v}_A$ con $\vec{v}_B$ haré uso de la identidad vectorial $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$ y del operador derivada en base móvil.

$$\begin{aligned} \vec{v}_B = \left.\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right|_F &= \left.\frac{d(\vec{r}_A + \overrightarrow{AB})}{dt}\right|_F \\ &= \left.\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_F \\ &= \vec{v}_A + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Como el vector $\overrightarrow{AB}$ está fijo en la base M su derivada es cero y nos queda finalmente:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}}$$

Esta ecuación es válida para cualquier par de puntos del SR, y para cada uno habríamos obtenido ecuaciones similares:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC} \\ \vec{v}_E &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AE} \\ &\;\;\cdots \end{aligned}$$

Estas formulas demuestran que el movimiento de todos los puntos del SR se puede obtener mediante la suma de una traslación definida por $\vec{v}_A$ más una rotación definida por $\vec{\omega}$.

Centro instantáneo de rotación CIR

Se puede demostrar que cualquier movimiento plano de un SR plano es una rotación instantánea alrededor de un punto del espacio.

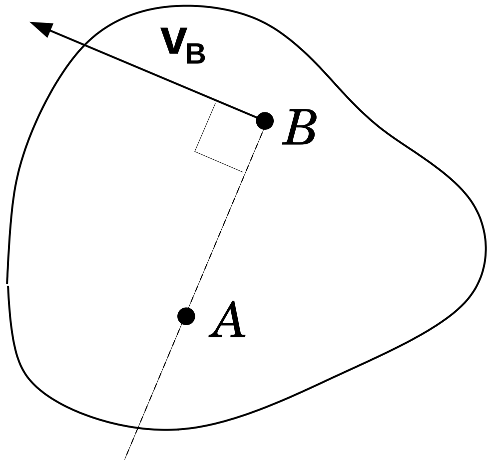
Esto es una consecuencia inmediata de la fórmula $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ y del hecho que $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento y por lo tanto a $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ y $\overrightarrow{AB}$.

Sea $\vec{v}_B$ la velocidad de un punto cualquiera del un SR en movimiento plano.

Relacionemos ahora $\vec{v}_B$ con la velocidad de otro punto situado en la recta perpendicular a $\vec{v}_B$ y que pasa por B.

Como $\vec{\omega}$ sale perpendicularmente del papel $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ ya tiene la dirección y el sentido de $\vec{v}_B$.

Ajustando la distancia AB podremos hacer también que $|\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}| = |\vec{v}_B|$.



En este caso la expresión $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ nos indica que la velocidad de A es cero.

La velocidad de cualquier otro punto del SR viene dada entonces por:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \\ \vec{v}_C &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC} \\ \vec{v}_E &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{AE} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Lo que indica que todos los puntos del SR hacen una rotación (al menos instantáneamente) respecto del punto A.

El punto A recibe el nombre de 'Centro Instantáneo de Rotación' (CIR)

Propiedades del CIR

- Todos los puntos realizan instantáneamente una rotación (sin traslación) alrededor del CIR.
- El CIR puede ser un punto del SR, pero también puede estar fuera del SR.
- En un movimiento plano el CIR siempre existe, pero puede cambiar su localización con el tiempo.
- Para localizar el CIR, basta con trazar las perpendiculares a la velocidad de dos puntos del SR y ver donde se cortan. El punto donde se corten es el CIR.
- Si el sólido tiene un punto fijo, éste será el CIR.
- El módulo de la velocidad de cada punto es $v = \omega\, d$, donde d es la distancia del punto al CIR. A más distancia de un punto al CIR, mayor será el módulo de su velocidad.