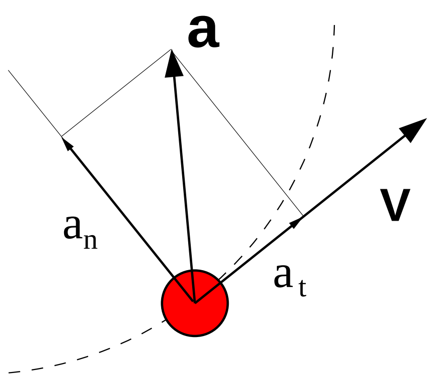
Componentes intrínsecas de la aceleración

OBJETIVOS

- Obtener la componente tangencial y normal del vector aceleración
- Ver que a_T produce un cambio en el módulo de $\vec{v}$
- Ver que a_N produce un cambio en la dirección de $\vec{v}$
- Obtener fórmulas para calcular a_N, a_T y ρ

DESARROLLO

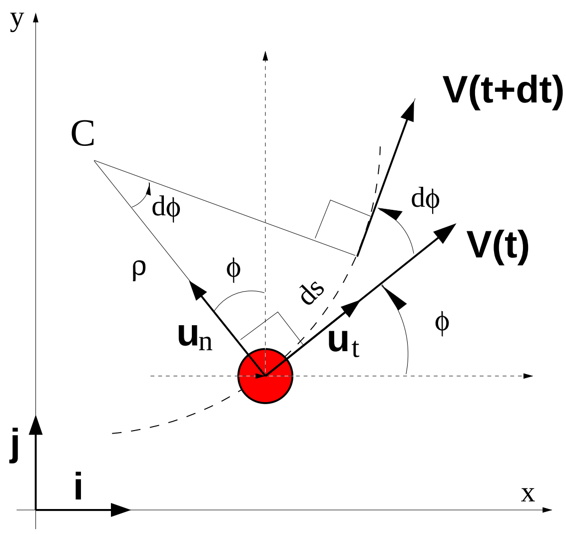
- En general la aceleración de una partícula tiene una componente tangencial (a_T) y otra normal (a_N) a la trayectoria.
- a_N y a_T son las **componentes intrínsecas** de la aceleración



Calculo de a_N y a_T:

Calcularemos a_N y a_T derivando el vector $\vec{v}$ expresado en la base $\vec{u}_T$ y $\vec{u}_N$:

- $\vec{u}_{\mathrm{N}}$ y $\vec{u}_{\mathrm{T}}$ son vectores unitarios perpendicular y paralelo a la trayectoria respectivamente.
- ρ es el radio de curvatura de la trayectoria.
- Para la velocidad en la base tangencial y normal tenemos: $\vec{v} = v\vec{u}_{\mathrm{T}}$.



calculando la derivada:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \tag{1}$$

Vemos ya que la componente tangencial de la aceleración es dv/dt, es decir, es la derivada del módulo de la velocidad con respecto del tiempo

Si la trayectoria es curvilínea, $\vec{u}_T$ varía con el tiempo y tenemos que calcular su derivada:

Cálculo de $d\vec{u}_T/dt$*:*

Primero expreso $\vec{u}_N$ y $\vec{u}_T$ en componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\vec{u}_T &= \cos(\phi)\ \vec{i} + \sin(\phi)\ \vec{j} \\ \vec{u}_N &= -\sin(\phi)\ \vec{i} + \cos(\phi)\ \vec{j}\end{aligned}$$

Y ahora derivo haciendo el cambio de variable $d/dt = d/d\phi \cdot d\phi/dt$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_T}{dt} &= \frac{d}{d\phi}(\cos(\phi)\ \vec{i} + \sin(\phi)\ \vec{j})\ \frac{d\phi}{dt} \\ &= (-\sin(\phi)\ \vec{i} + \cos(\phi)\ \vec{j})\ \frac{d\phi}{dt} = \vec{u}_N\ \frac{d\phi}{dt} \qquad (2)\end{aligned}$$

vemos que du_T/dt es perpendicular a la trayectoria

Nos falta calcular $d\phi/dt$:

Calculo de $d\phi/dt$*:*

Introducimos la longitud del arco recorrido por la partícula en el dt (ds):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\ \frac{ds}{dt} = v\ \frac{d\phi}{ds}$$

donde hemos usado que ds/dt es el módulo de la velocidad.

Si ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto, podemos usar que $ds = \rho\ d\phi$ (ver figura) y nos queda:

$$\frac{d\phi}{dt} = v\ \frac{d\phi}{\rho\ d\phi} = \frac{v}{\rho}$$

Sustituyendo esta última ecuación en (2) queda:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{u}_N \, \frac{d\phi}{dt} = \vec{u}_N \, \frac{v}{\rho}$$

Y para la aceleración total (ecuación (1) queda finalmente:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \, \vec{u}_T + v \, \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \, \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \, \vec{u}_N \qquad (3)$$

donde vemos que $a_T = dv/dt$ y $a_N = v^2/\rho$ siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria en el punto.

Hemos obtenido que:

- $a_T = dv/dt$ es responsable del cambio en el módulo de $\vec{v}$.
- $a_N = v^2/\rho$ produce un cambio en la dirección de la velocidad.
- En trayectorias rectilíneas ($\rho = \infty$), a_N se hace cero.
- Siempre que el vector velocidad cambia de dirección (trayectorias curvilíneas) $a_N \neq 0$.
- El radio de curvatura ρ está definido en cada punto y puede cambiar durante el movimiento.

Calculo numérico de a_T, a_N y ρ.

Es posible calcular fácilmente a_T, a_N y ρ si conocemos las componentes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$.

Efectivamente, por las propiedades del producto escalar y vectorial, tenemos:

$$a_T = a \cdot \cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \qquad ; \qquad a_N = a \cdot \sin(\theta) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v} \qquad ; \qquad \rho = \frac{v^2}{a_N} \qquad (4)$$