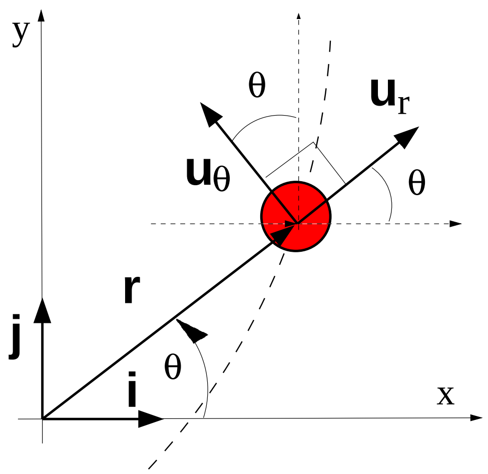
Componentes polares planas (cpp) de $\vec{v}$ y $\vec{a}$

OBJETIVOS

- Obtener la expresión de la componente radial y angular de $\vec{v}$.
- Obtener la expresión de la componente radial y angular de $\vec{a}$.
- Ver como se describen algunos movimientos en la base de coordenadas polares planas (cpp).

DESARROLLO

- $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ son dos vectores unitarios paralelo y perpendicular a $\vec{r}$ respectivamente.
- en esta base $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$



Calculo de $\vec{v}$ en la base de cpp.

Calcularemos $\vec{v}$ derivando el vector $\vec{r}$ expresado en la base $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \tag{1}$$

Vemos ya que la componente radial de la velocidad es dr/dt, es decir, es la derivada de la componente r con respecto del tiempo

En general, $\vec{u}_r$ varía con el tiempo y tenemos que calcular su derivada:

Cálculo de $d\vec{u}_r/dt$:

Primero expreso $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ en componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}\end{aligned}$$

Y ahora derivo haciendo el cambio de variable $d/dt = d/d\theta \cdot d\theta/dt$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j})\,\frac{d\theta}{dt} \\ &= (-\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j})\,\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta\,\frac{d\theta}{dt}\end{aligned} \tag{2}$$

vemos que $d\vec{u}_r/dt$ es perpendicular a la trayectoria

Sustituyendo en la ecuación (1) queda para la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

donde se ha utilizado la nomenclatura $dx/dt = \dot{x}$

Cálculo de $\vec{a}$ en cpp.

Para calcular la aceleración en cpp partimos de la expresión de $\vec{v}$ y derivamos respecto del tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)$$

Procediendo de forma similar al caso de la velocidad, se llega a:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

RESUMEN

Hemos obtenido:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

y

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$