Descripción del movimiento en sistemas de referencia en rotación

OBJETIVOS

- Introducir el concepto de *operador derivada en base móvil*.
- Obtener las ecuaciones de transformación de las ecuaciones del movimiento entre dos sistemas con movimiento relativo de rotación.

DESARROLLO

Operador derivada en base móvil

Suponer un sistema de referencia M que se mueve respecto de otro sistema F con un movimiento general de rotación y translación.

Respecto del sistema F, los vectores de la base del sistema M ($\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ y $\vec{k}\,'$) se mueven y cambian con el tiempo.

Si calculamos respecto del sistema F la derivada de un vector expresado en la base M tendremos que tener en cuenta este hecho.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_F &= \frac{d}{dt}(x'\,\vec{i}\,' + y'\,\vec{j}\,' + z'\,\vec{k}\,') \\
&= \frac{dx'}{dt}\,\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k}\,' + x'\,\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\,\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\,\frac{d\vec{k}\,'}{dt} \\
&= \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_M + x'\,\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\,\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\,\frac{d\vec{k}\,'}{dt}
\end{aligned}
$$

Se puede ver que si el sistema M está rotando con velocidad angular $\vec{\omega}$ respecto de F, las derivadas de los vectores de la base se pueden expresar por:

$$
\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}\,' \qquad \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}\,' \qquad \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}\,'
$$

y nos queda para la derivada de $\vec{r}\,'$ respecto de la base F:

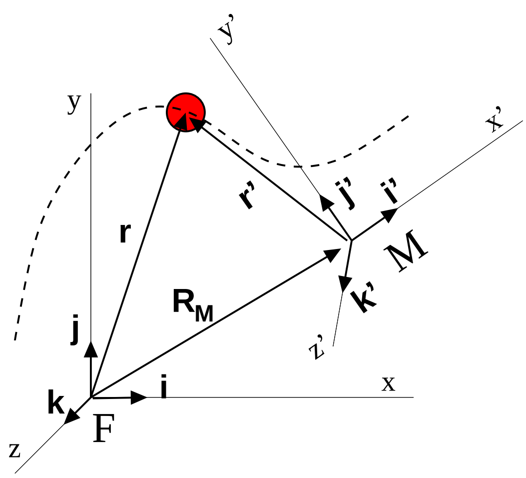
$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_F &= \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times(x'\,\vec{i}\,' + y'\,\vec{j}\,' + z'\,\vec{k}\,') \\ &= \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'\end{aligned}$$

Esta expresión se puede entender como un $operador\ vectorial$ (aplicado en este caso al vector $\vec{r}\,'$) que nos relaciona la derivada de un vector respecto de F con su derivada respecto de M.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times$$

Relación entre la velocidad medida en F y M

- M realiza una rotación de velocidad angular $\vec{\omega}$ respecto de F.
- Llamamos $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ a la posición de una partícula vista desde F y M respectivamente.
- $\vec{R}_M$ es la posición del sistema M respecto de F
- Se cumple la identidad vectorial: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}_M$.



Puedo obtener la relación entre $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$ aplicando el operador vectorial:

$$\begin{aligned}\vec{v} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F &= \left.\frac{d\vec{R}_M}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_F \\ &= \vec{V}_M + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \\ &= \vec{V}_M + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'\end{aligned}$$

Tenemos por lo tanto:

$$\vec{v} = \vec{V}_M + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

Relación entre la aceleración medida en F y M

Puedo obtener la relación entre $\vec{a}$ y $\vec{a}\,'$ derivando ahora la expresión anterior para la velocidad:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_F &= \left.\frac{d}{dt}(\vec{V}_M + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,')\right|_F \\ &= \vec{a}_M + \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_F + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_F\end{aligned}$$

Aplicando el operador derivada en base móvil a las derivadas de $\vec{r}'$ y $\vec{v}'$ y definiendo $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ (aceleración angular de M) nos queda:

$$\vec{a} = \vec{a}_M + \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\alpha} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

En el caso de que $\vec{\omega}$ sea constante y tomando origen común para los sistemas F y M nos queda:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

El término $2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ recibe el nombre de *ACELERACIÓN DE CORIOLIS*.

El término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ recibe el nombre de *ACELERACIÓN CENTRIPETA*.