Introducció

1. Magnituds escalars i vectorials.
2. Concepte de força.
3. Principi d’inèrcia.
4. Principi d’acció–reacció.
5. Llei de la gravitació universal.

1. MAGNITUDS ESCALARS I VECTORIALS

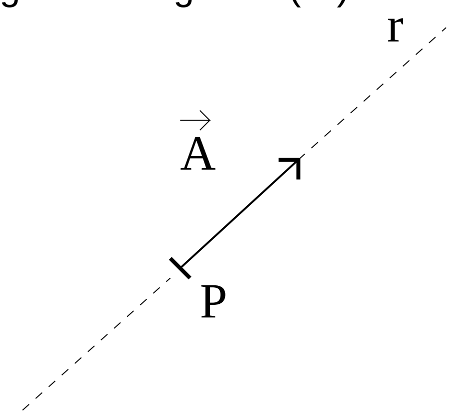
1.1. Definicions

- Magnituds escalars: temperatura, pressió, energia,...

- Magnituds vectorials: velocitat, camp elèctric, força,...

Vector: segment orientat amb

1. *Mòdul*: longitud del segment ($|\vec{A}|$, A)
2. *Direcció*: recta que conté al segment (r)
3. *Sentit*: orientació del segment sobre la recta suport
4. *Punt d'aplicació*: origen del segment (P)

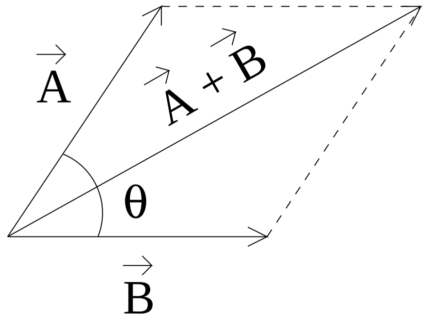


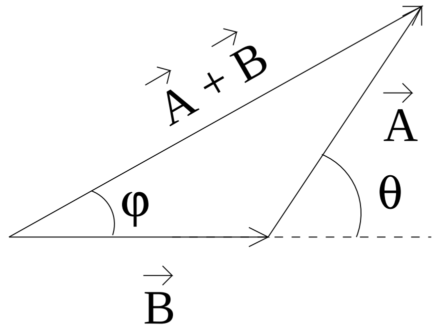
Tipus de vectors

- *Vectors fixes*: P és fixe
- *Vectors lliscants*: P pot lliscar per r
- *Vectors lliures*: P pot moure's per tot l'espai

1.2. Operacions amb vectors lliures

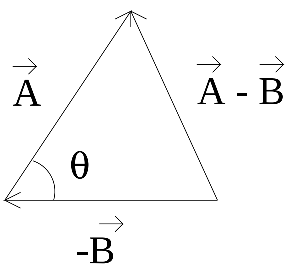
Suma de vectors





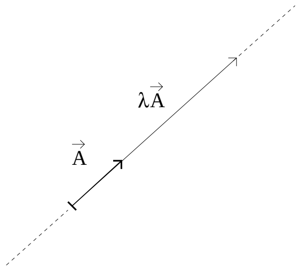
$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{A}{|\vec{A}+\vec{B}|}\sin\theta\right)$$



$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\ \cos\ \theta}$$

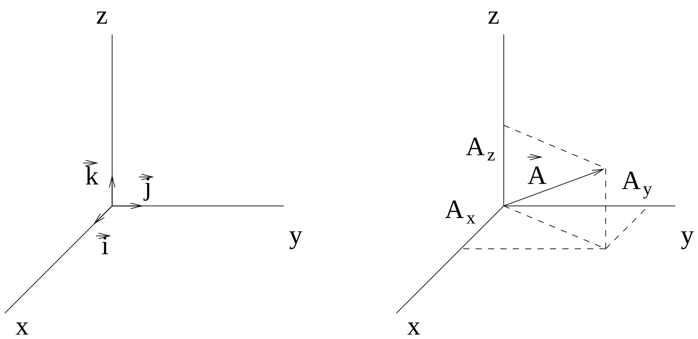
Producte per un escalar



$$\boxed{|\lambda\vec{A}| = \lambda|\vec{A}|}$$

- Quocient per un escalar: $\frac{\vec{A}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\vec{A}$
- Vector unitari en la direcció de $\vec{A}$:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} \Longrightarrow |\vec{u}_A| = \frac{|\vec{A}|}{A} = 1$$

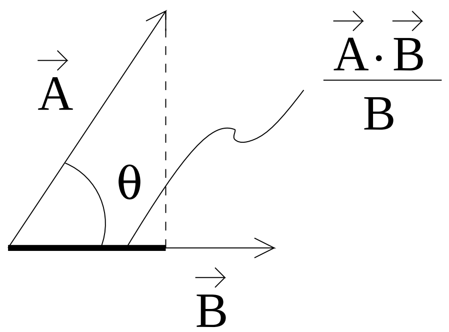


- Components cartesianes: $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$
- Operacions amb components cartesianes:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + (A_y + B_y)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{A} = (\lambda A_x)\,\vec{\imath} + (\lambda A_y)\,\vec{\jmath} + (\lambda A_z)\,\vec{k}$$

Producte escalar



$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\,\cos\,\theta}$$

- Condició de perpendicularitat:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\,\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

- En components cartesianes:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

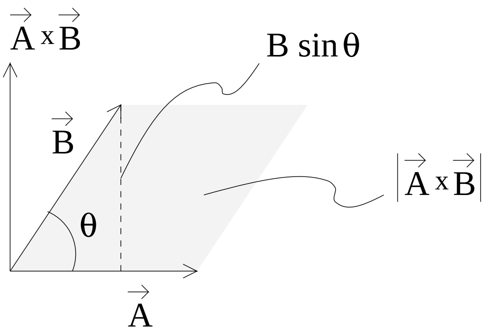
- Mòdul d'un vector:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = AA\,\cos\,0 = A^2$$
$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Longrightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- Angle entre dos vectors:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\,\cos\,\theta \Longrightarrow \theta = \arccos\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Producte vectorial



$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \vec{u}}$$

- Condició de paral.lelisme:

$$\theta = 0, \pi \Longrightarrow \sin\theta = 0 \Longrightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

- En components cartesianes:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- Producte mixte:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

- Doble producte vectorial: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

Derivada i integral d'un vector

- Vectors depenents d'un paràmetre:

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\,\vec{\imath} + A_y(t)\,\vec{\jmath} + A_z(t)\,\vec{k}$$

- Derivada d'un vector en components cartesianes:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dA_y}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dA_z}{dt}\,\vec{k}$$

- Integral d'un vector en components cartesianes:

$$\int \vec{A}(t)\,dt = \left(\int A_x(t)\,dt\right)\,\vec{\imath} + \left(\int A_y(t)\,dt\right)\,\vec{\jmath}$$

$$+ \left(\int A_z(t)\,dt\right)\,\vec{k} + \vec{C}$$

Circulació d'un vector

- Al llarg d'una corba oberta: $\displaystyle\int_{\vec{r}_1\,C}^{\vec{r}_2} \vec{A}\cdot d\vec{r}$
- Al llarg d'una corba tancada: $\displaystyle\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$

2. CONCEPTE DE FORÇA

- Forces fonamentals de la natura:
  - gravitatòria
  - elèctrica i magnètica
  - nuclear (feble i forta)

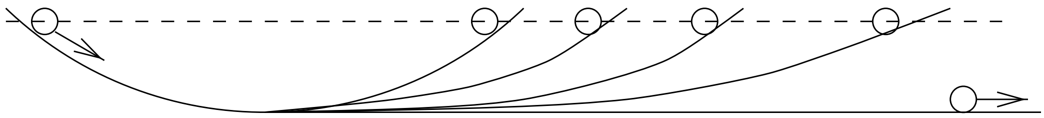
- Forces a nivell macroscòpic:
  - pes (a prop de la superfície terrestre)
  - reaccions (normal i fregament)
  - tensió (a cordes), de recuperació (a molles),...

- Classificació segons el rang de la interacció:
  - Forces de contacte: reaccions (normal i fregament),...
  - Forces a distància: pes,...

- Classificació segons l'efecte de la interacció:
  - Forces de lligam: tensió, normal,...
  - Forces actives: pes, fregament,...

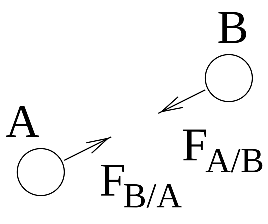
3. PRINCIPI D'INÈRCIA

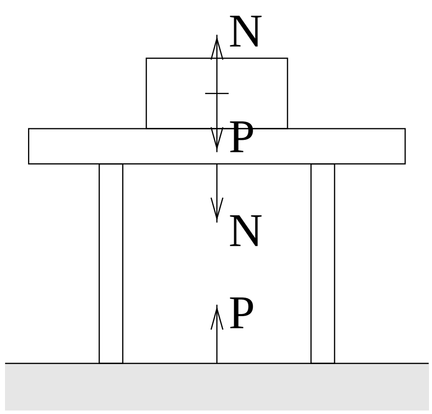
- Principi d'inèrcia: tot cos en repòs o amb moviment uniforme continuarå en aquest estat mentre la resultant de les forces que actuen sobre ell sigui nul.la.



4. PRINCIPI D'ACCIÓ–REACCIÓ

- Principi d'acció-reacció: tot cos que fa una força sobre un altre (acció), rep una força d'igual mòdul i direcció però de sentit contrari (reacció), feta per l'altre cos sobre ell.





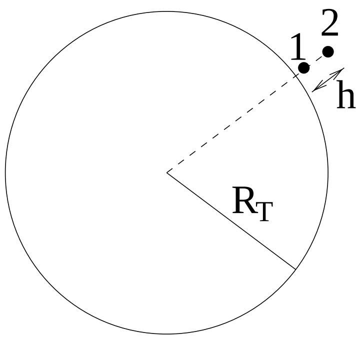
5. LLEI DE LA GRAVITACIÓ UNIVERSAL

- Llei de la gravitació universal:

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N\,m^2/kg^2$ constant de gravitació universal

- Pes a prop de la superfície terrestre:



$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{(R_T + h)^2}\vec{u}_r \simeq m\vec{g}$$

- Acceleració de la gravetat:

$$\boxed{g \equiv \frac{GM}{R_T^2}} = 9.81\ m/s^2$$

Estàtica

1. Estàtica de la partícula.
2. Estàtica del sòlid rígid.
3. Estructures articulades.
4. Mètode dels treballs virtuals.

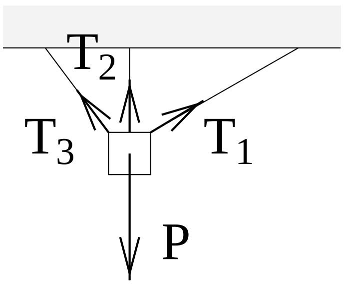
1. ESTÀTICA DE LA PARTÍCULA.

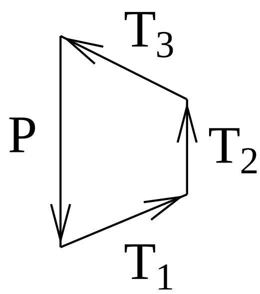
- Condicions d'equilibri estàtic per a una partícula en repòs inicial:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

- Mètode gràfic:

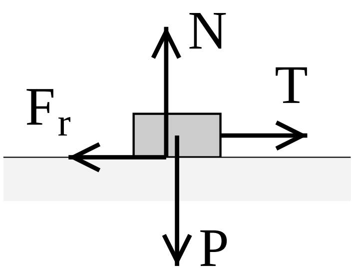
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \text{ al pla} \Longrightarrow \text{el polígon de forces ha de ser tancat}$$





Fregament

- Forces de reacció a la superfície de contacte entre dos sòlids:

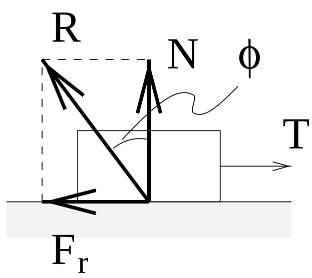


(1) $T - F_r = 0$

(2) $N - P = 0$

- Tipus de fregament:
  - Fregament dinàmic: $F_r = \mu_d\, N$
  - Fregament estàtic: $F_r \leq \mu_s\, N$

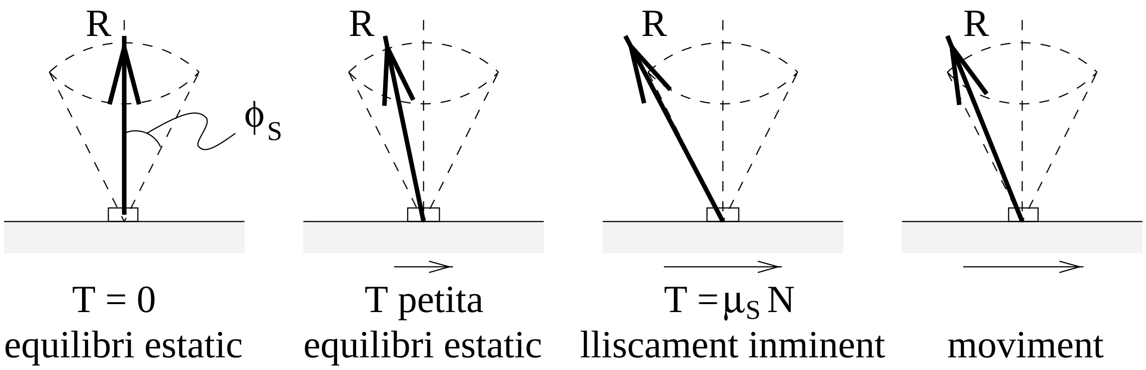
- Reacció total a la superfície de contacte:



$\phi = \arctan \frac{F_r}{N}$

angle de fregament

- Conus de fregament:

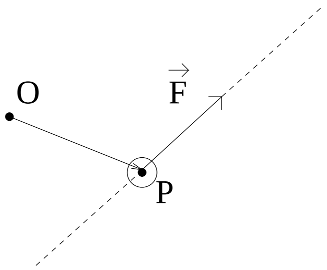


- Moviment inminent:

$$F_r = \mu_s\, N \implies \phi = \phi_s = \arctan\, \mu_s$$

2. ESTÀTICA DEL SÒLID RÍGID

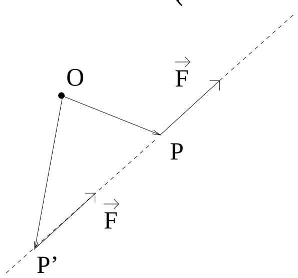
Moment d'una força respecte d'un punt

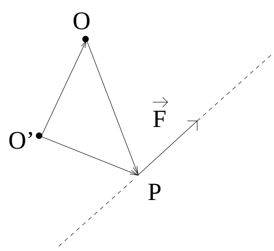


$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F}}$$

- $\vec{M}_O$ no depèn d'on s'aplica $\vec{F}$ al llarg de la seva línia d'acció:

$$\vec{M}'_O = \vec{OP'} \times \vec{F} = (\vec{OP} + \vec{PP'}) \times \vec{F} = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

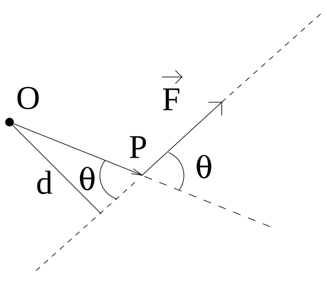




- Canvi de centre de reducció:

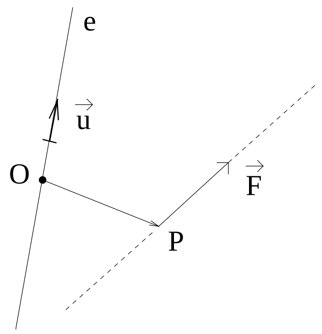
$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'P} \times \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{OP}) \times \vec{F} = \vec{O'O} \times \vec{F} + \vec{M}_O$$

- Recepta de càlcul:



$$|\vec{M}_O| = |\vec{OP}| F \sin\theta = Fd$$

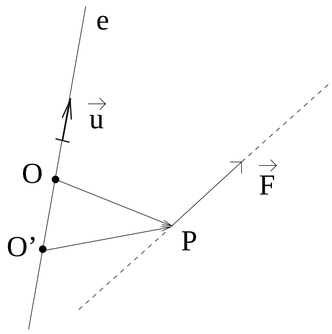
Moment d'una força respecte d'un eix



$$\boxed{M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}}$$

- M_e no depèn d'on s'aplica $\vec{F}$ al llarg de la seva línia d'acció:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = (\vec{O'P} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = \left((\vec{O'O} + \vec{OP}) \times \vec{F} \right) \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$



Sistema de forces

- Resultant i moment resultant:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i$$

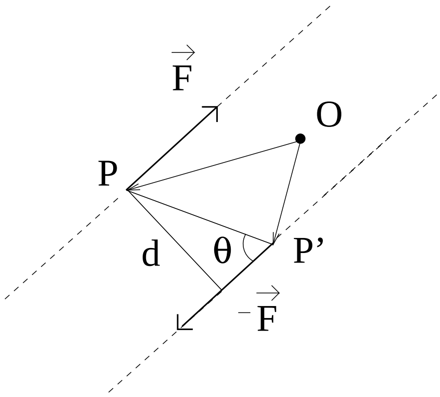
- Canvi de centre de reducció:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{O'P_i} \times \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{O'O} + \vec{OP_i} \right) \times \vec{F_i}$$

$$= \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

Parell de forces

- Parell de forces: sistema de dues forces paral.leles d'igual mòdul i sentit contrari:



- El moment resultant d'un parell de forces no depèn del centre de reducció:

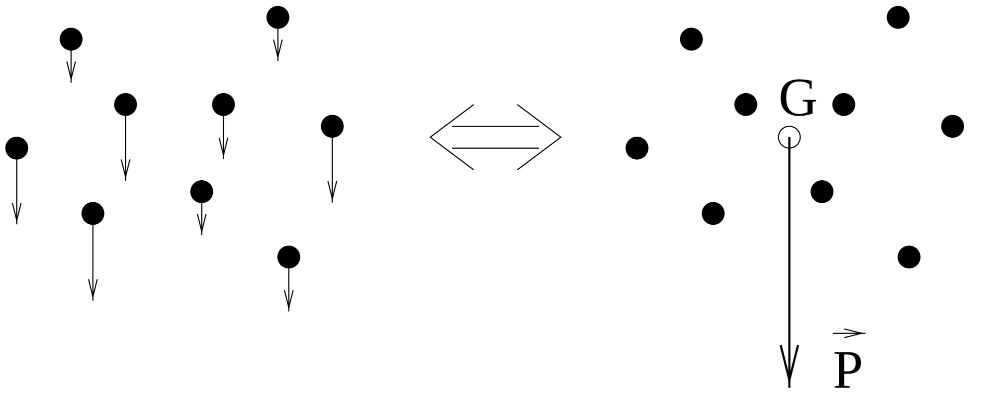
$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} + \vec{OP'} \times (-\vec{F}) = (\vec{OP} - \vec{OP'}) \times \vec{F} = \vec{P'P} \times \vec{F}$$

- Mòdul del moment resultant d'un parell de forces:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{P'P}| F \sin\theta = Fd$$

Centre de gravetat

- Sistema de partícules a prop de la superfície terrestre:



- $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$: pes total del sistema.

- Punt d'aplicació de $\vec{P}$: centre de gravetat.

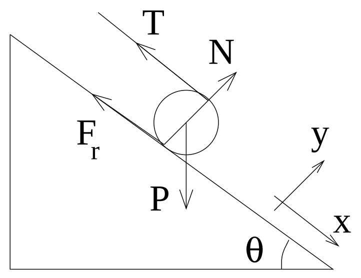
$$\vec{M}_G = \vec{0} = \vec{M}_O + \vec{P} \times \vec{OG} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i - \vec{OG} \times \sum_i \vec{P}_i$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{OG} = \frac{\sum_i P_i \vec{r}_i}{P}}$$

- Condicions d'equilibri estàtic ($Q \equiv$ qualsevol punt del sòlid):

$$\sum \vec{F} = 0, \qquad \sum M_Q = 0$$

- Exemple:

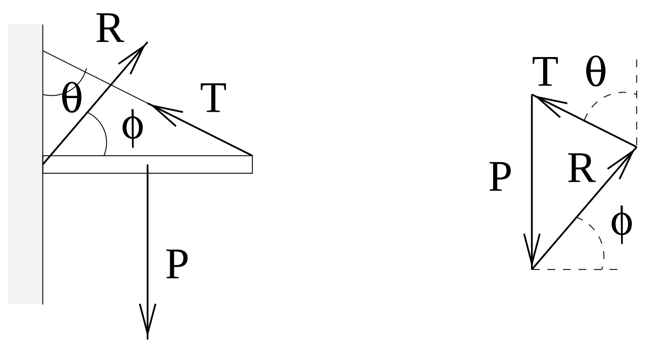


(1) $P \sin\theta - F_r - T = 0$

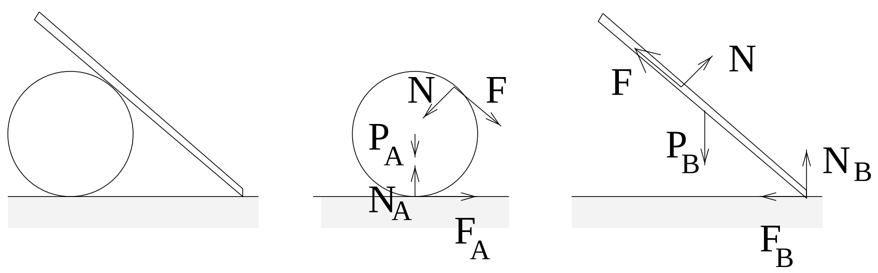
(2) $N - P\cos\theta = 0$

(3) $T\,R - F_r\,R = 0$

- Mètode gràfic:

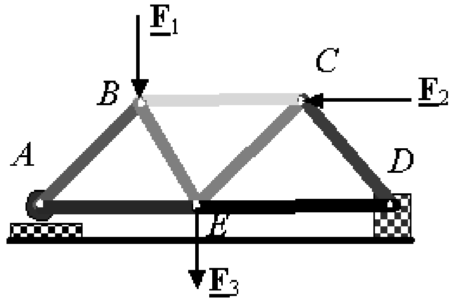


- Sistema de sòlids rígids.



3. Estructures articulades

- Tipus de contactes: superfícies, anclatges i articulacions
- Estructura articulada: conjunt d'elements rígids rectes (*membres*) units pels seus extrems (*nusos*):



- Mètode dels nusos: $\sum \vec{F} = 0$ sobre cada nus
- Mètode de les seccions: $\sum \vec{F} = 0$ sobre cada tros de l'armadura

4. Mètode dels treballs virtuals

- Cada punt del sòlid es desplaça virtualment $\delta\vec{r}_i$:

Condició d'equilibri: $\boxed{\delta W_{ext} = \sum \vec{F}_i^{ext} \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$

Cinemàtica

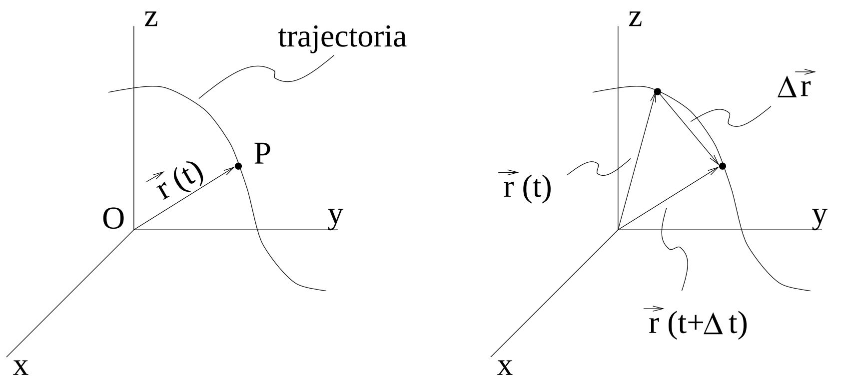
1. Cinemàtica de la partícula.
2. Descripció del moviment en referències mòbils.
3. Cinemàtica plana del sòlid rìgid.

1. CINEMÀTICA DE LA PARTÍCULA

1.1. Descripció del moviment

- Sistema de referència (SR): O, $\{x, y, z\}$.
- Vector de posició : $\vec{r} = \vec{OP} = \vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \quad [L]$$



- Velocitat mitjana: $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad [L][T]^{-1}$
- Velocitat instantània:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

- Acceleració mitjana: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad [L][T]^{-2}$
- Acceleració instantània:

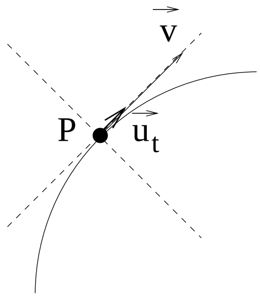
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

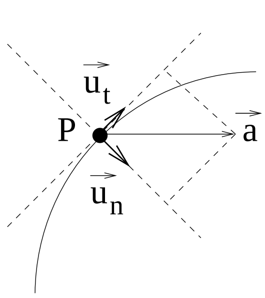
1.2. Components intrínseques del moviment

- $\vec{v}, \vec{a}$ en components cartesianes:

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$





- $\{\vec{u}_t, \vec{u}_n\}$: base intrínseca o mòbil $\rightarrow$ pla oscul.lador.
- $\vec{v}, \vec{a}$ en components intrínseques:

$$\vec{v} = v\vec{u}_t \qquad |\vec{v}| = v$$

$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

- Components intrínseques de l'acceleració:

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

(ρ: radi de corbatura al punt P)

- Casos particulars:
  - $\rho = \infty \Longrightarrow a_n = 0$ (moviment rectilini)
  - $\rho = R = ct \Longrightarrow a_n = \frac{v^2}{R}$ (moviment circular)

    * $v = ct \Longrightarrow a_t = 0$ (mov. circular uniforme)
    * $v \neq ct \Longrightarrow a_t \neq 0$ (mov. circular no uniforme)

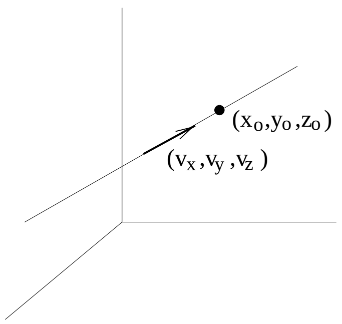
1.3. Integració de les equacions del moviment

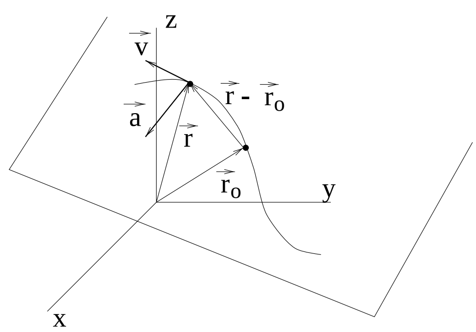
Acceleració nul.la

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = ct$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) - \vec{r}(t=0) = \int_0^t \vec{v}dt = \vec{v}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \Longrightarrow \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z} \Longrightarrow \boxed{\text{mov. rectilini}}$$





Acceleració constant

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = ct \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- $\vec{r} - \vec{r}_0$ sempre en el mateix pla $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{moviment pla}}$
- $\vec{v} \times \vec{a} = (\vec{v}_0 + \vec{a}t) \times \vec{a} = \vec{v}_0 \times \vec{a}$ constant $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{moviment pla}}$

1.4. Casos particulars

Moviment rectilini

- Triem l'eix X com el del moviment: $v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}$
- Casos:
  - $a = a(t) \longrightarrow v = v_0 + \int_0^t a(t)dt$
  - $a = a(x) \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a(x)dx$$

  - $a = a(v)$

$$dx = \frac{v}{a}dv \quad \Longrightarrow \quad x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}dv$$

- Moviment rectilini uniformement accelerat:

$$a = ct \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}$$

<u>Moviment parabòlic</u>

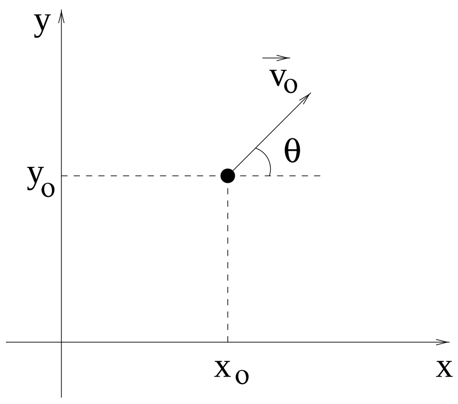
- Moviment de cossos en la superfície terrestre:

$$a = g = ct \Longrightarrow \text{moviment pla}$$

- Equacions del moviment:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v_0} + \vec{a} t \\ \vec{r} &= \vec{r_0} + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \end{aligned}$$

- Paràmetres del moviment:



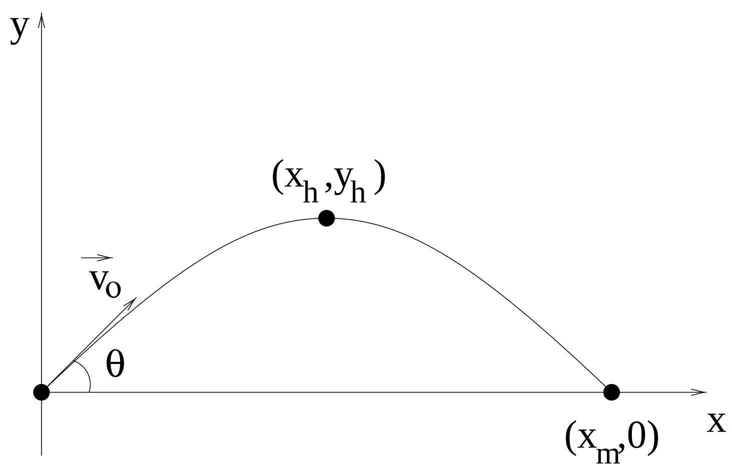
$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= x_0\, \vec{\imath} + y_0\, \vec{\jmath} \\ \vec{v}_0 &= v_0\, \cos\theta\, \vec{\imath} + v_0\, \sin\theta\, \vec{\jmath} \\ \vec{a} &= -g\, \vec{\jmath} \end{aligned}$$

- Equació de la trajectòria:
  - Forma paramètrica:

$$x = x_0 + v_0 \cos\theta t$$
$$y = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

  - Forma implícita: ($x_0 = y_0 = 0$)

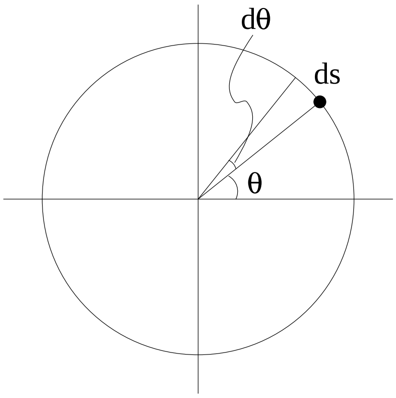
$$y = tg\theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 = ax - bx^2$$



- abast màxim: $$\boxed{x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$
$$t_m = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$
- alçada màxima: $$x_h = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} = \frac{x_m}{2}$$
$$\boxed{y_h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$
$$t_h = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{t_m}{2}$$

Moviment circular

- $\rho = R = ct \Longrightarrow a_n = \frac{v^2}{R}$
  - $v = ct \Longrightarrow a_t = 0,\ a_n = ct \Longrightarrow$ mov. circular uniforme
  - $v \neq ct \Longrightarrow a_t \neq 0,\ a_n \neq ct$



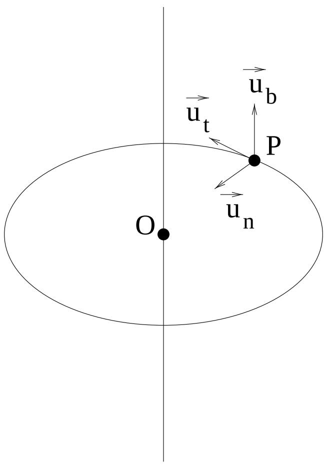
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$ds = Rd\theta$$

- velocitat angular: $\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad [T]^{-1}$
- vector velocitat angular:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{u}_b, \quad \vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$$

- $\vec{u}_b$: vector unitari binormal



$$\vec{u}_t = \vec{u}_n \times \vec{u}_b$$

- $\vec{v}$ és el moment de $\vec{\omega}$ respecte de P:

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = (\omega R)(\vec{u}_n \times \vec{u}_b) = (R\vec{u}_n) \times \omega\vec{u}_b = \vec{PO} \times \vec{\omega}$$

- Relació entre $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$: $\vec{PO} = -\vec{r} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$
- acceleració angular: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad [T]^{-2}$
- $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_t = R\alpha}$

- Moviment circular uniformement accelerat:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ct \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

- Components intrínseques i radi de corbatura:

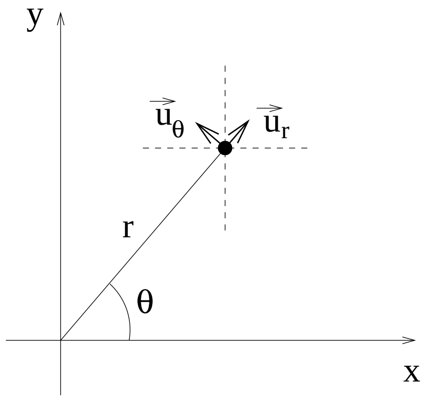
$$\vec{v} = v\vec{u}_t, \quad \vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = va_t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = va_n\vec{u}_b \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}}$$

Sistema de coordenades polars



$$x = r\,\cos\,\theta$$
$$y = r\,\sin\,\theta$$

- Base ortonormal polar:

$$\vec{u}_r = \cos\,\theta\,\vec{\imath} + \sin\,\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\,\theta\,\vec{\jmath}$$

- $\vec{u}_r$ i $\vec{u}_\theta$ no són constants:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r$$

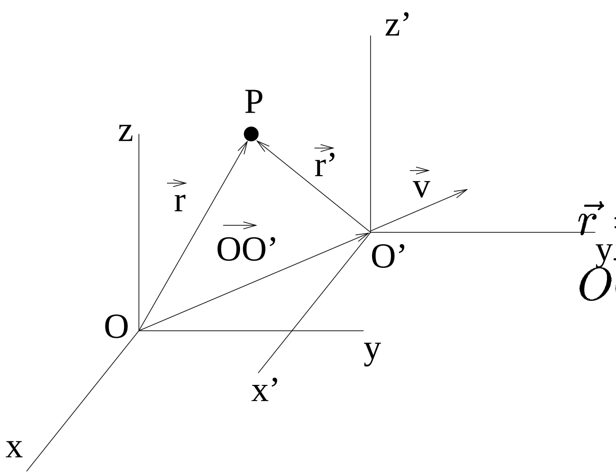
- $\vec{r}$, $\vec{v}$ i $\vec{a}$ en components polars:

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$
$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\,\vec{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\,\vec{u}_\theta$$

2. DESCRIPCIÓ DEL MOVIMENT EN REFERÈNCIES MÒBILS

2.1. Transformació de Galileu

- SR inercials: aquells que es desplacen a velocitat constant els uns respecte els altres.
- Descripció de moviments des de dos SR inercials:



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{OO'}$$
$$\vec{OO'} = \vec{V}t$$

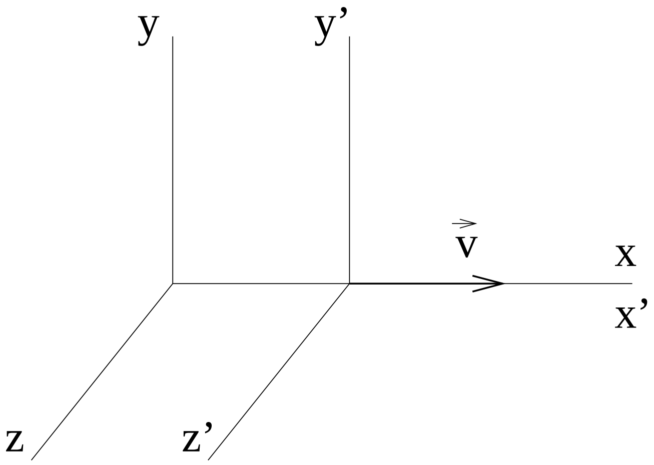
$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t}$ transformacions de Galileu

$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}}$ llei de composició de velocitats

$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$ principi de relativitat de Galileu

- Principi de relativitat de Galileu: les lleis de la mecànica són les mateixes en tots els SR inercials.

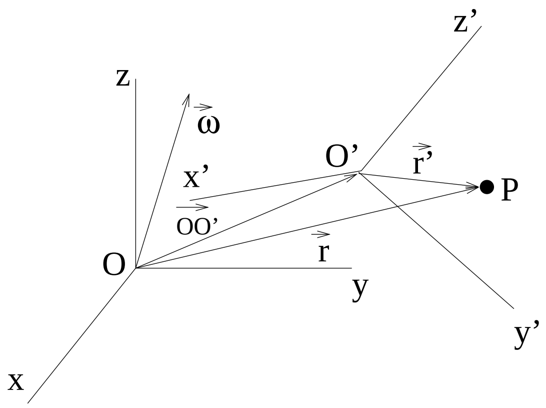
- Però això també ha de passar amb les altres lleis de la física! (e.g. amb l'electromagnetisme)



TR. GALILEU	TR. LORENTZ
$x' = x - vt$	$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\longrightarrow$ teoria de la relativitat d'Einstein

2.2. Sistemes de referència en rotació



O, {x,y,z} SR fixe

O', {x',y',z'} SR mòbil

- Relació entre les velocitats:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

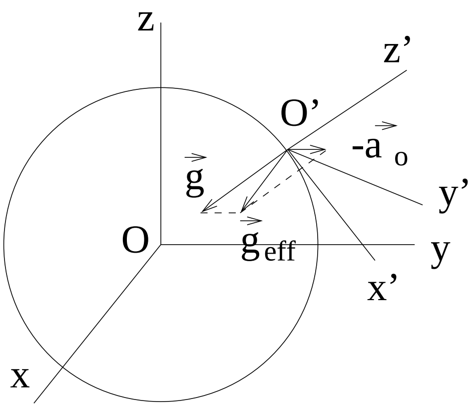
- Relació entre les acceleracions:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

- Acceleració de Coriolis: $\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$

- Exemple 1: gravetat efectiva a la superfície terrestre:

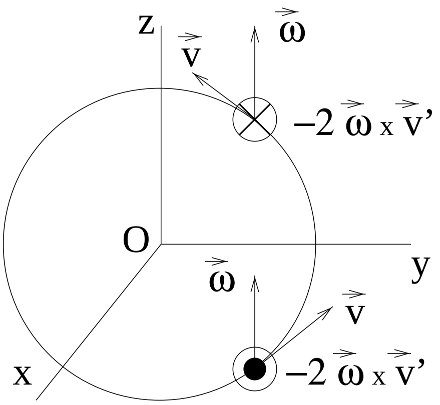
$$\vec{r}\,' = 0,\ \vec{v}\,' = 0\ \Rightarrow\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0$$



$$\vec{a} = \vec{g}$$
$$\vec{a}\,' = \vec{g}_{eff}$$

- Exemple 2: efecte Coriolis a la superfície terrestre:

$$\vec{r}\,' = 0\ \Rightarrow\qquad \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0 + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$
$$\vec{a}\,' = \vec{g}_{eff} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

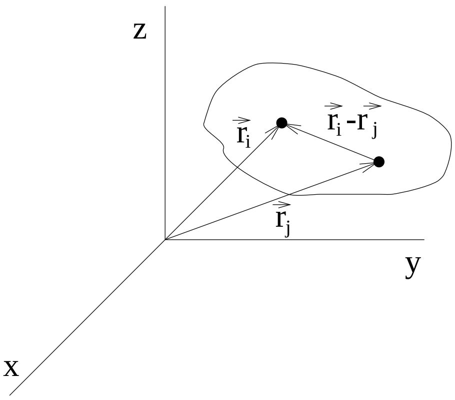


  - Hemisferi nord: els mòbils tendeixen a anar cap a la dreta.
  - Hemisferi sud: els mòbils tendeixen a anar cap a la esquerra.

3. CINEMÀTICA PLANA DEL SÒLID RÍGID

3.1. Condicions de rigidesa

- Sòlid rígid: sistema de partícules on la distància entre dues partícules qualsevols és sempre la mateixa.
- Condició geomètrica de rigidesa:

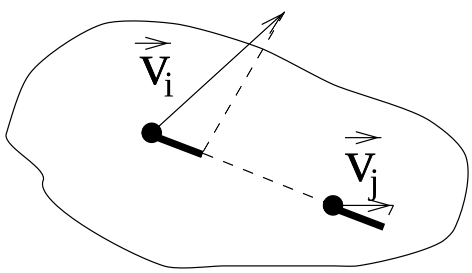


$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = ct$$

- Condició cinemàtica de rigidesa:

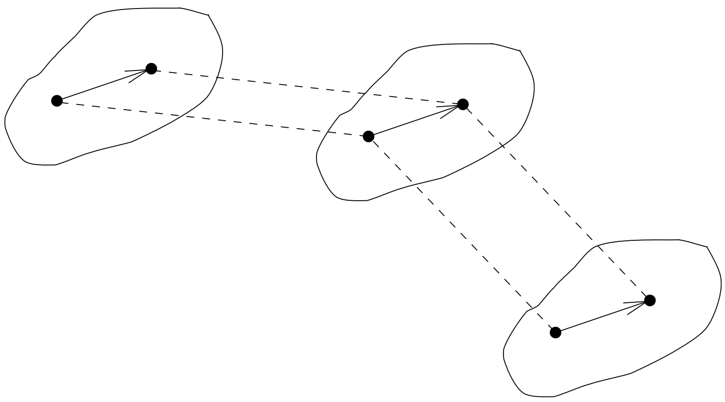
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{r}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = 0 \Longrightarrow \vec{u}_{ij} \cdot \vec{v}_i = \vec{u}_{ij} \cdot \vec{v}_j$$



3.2. <u>Moviment de trasl.lació</u>

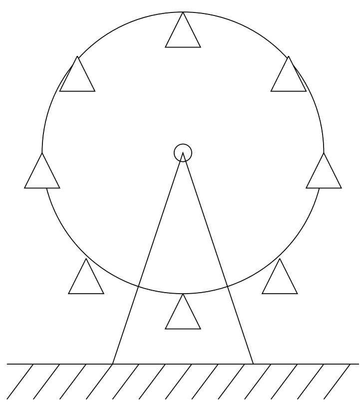
- Definició 1: moviment en el qual tot segment definit per dos punts qualsevols del sòlid rígid manté la direcció constant.



$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = ct \Longrightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_j}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_j$$

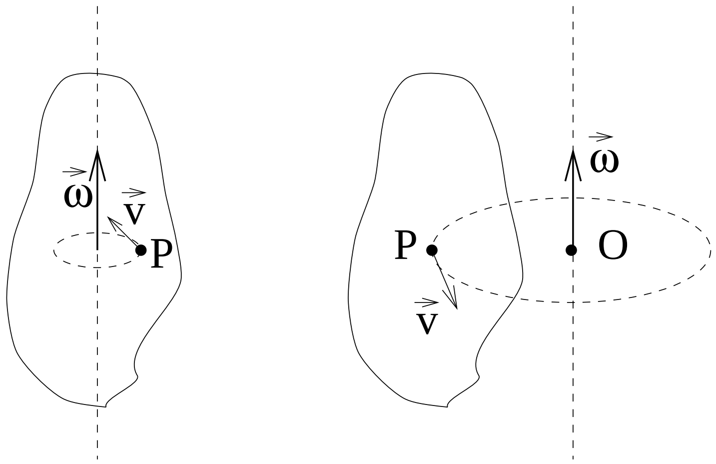
- Definició 2: moviment en el qual totes les partícules del sòlid rígid tenen la mateixa velocitat $\rightarrow$ velocitat de trasl.lació del sòlid rígid.

- El moviment de trasl.lació no té per què ser rectilini:



3.3. Moviment de rotació

- Moviment en el qual totes les partícules del sòlid rígid descriuen una trajectòria circular entorn del mateix eix:

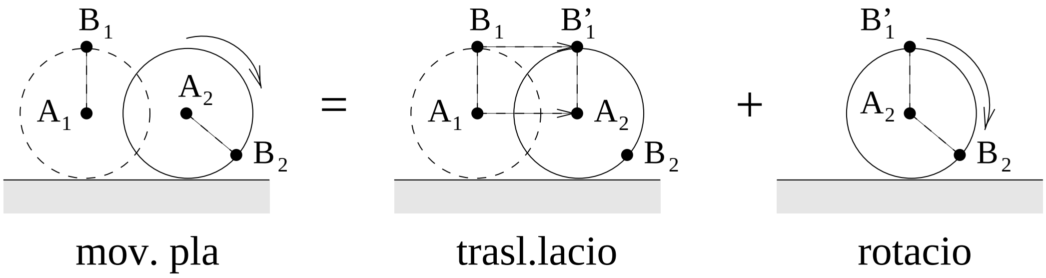


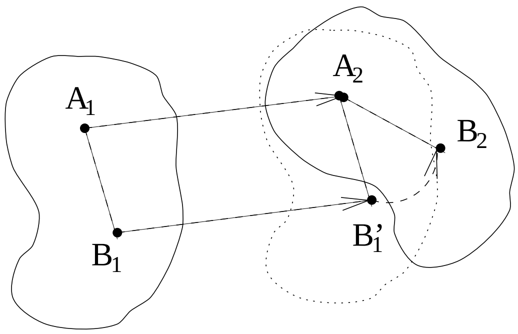
- Rigidesa $\Rightarrow$ totes les partícules del sòlid rígid tenen la mateixa velocitat angular $\rightarrow$ velocitat angular del sòlid rígid.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{PO} \times \vec{\omega}$$

3.4. Distribució de velocitats en el sòlid rígid

- Tot moviment pla pot descomposar-se en una trasl.lació més una rotació.





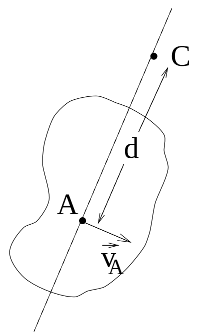
- Llei de distribució de velocitats:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \implies \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}}$$

3.5. Centre instantani de rotació

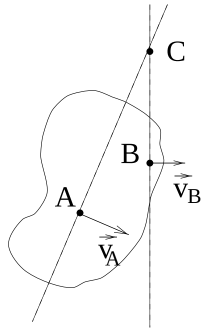
- Definim un punt C al pla de moviment del sòlid rígid segons:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{CA} \longrightarrow v_A = \omega |CA| \longrightarrow d = |CA| = \frac{v_A}{\omega}$$



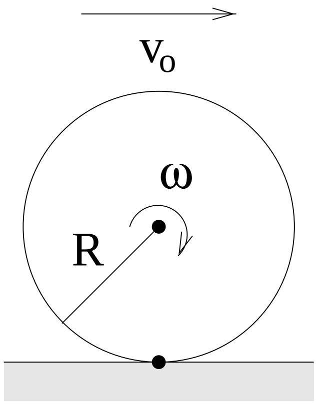
- Tot punt del sòlid rígid efectúa un moviment de rotació al voltant de C:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times \vec{CA} + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times \vec{CB}$$

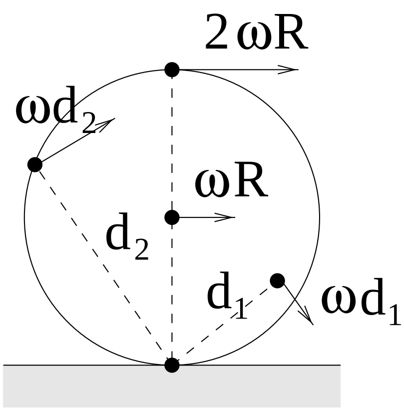


- C: centre instantani de rotació (CIR) del sòlid rígid.
- Si el CIR és un punt del sòlid rígid, té velocitat nul.la.

- Exemple: moviment de rodadura.



  - Relació v_0, ω?.
  - CIR de la roda: punt de contacte amb el terra.



  - Relació entre v_0 i ω:

$$\boxed{v_0 = \omega R}$$

3.6. Distribució d'acceleracions en el sòlid rígid

- Llei de distribució d'acceleracions:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{AB}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})}$$

- Cas particular del moviment pla:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{AB}) - \omega^2 \vec{AB}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB}}$$

Dinàmica de la partícula

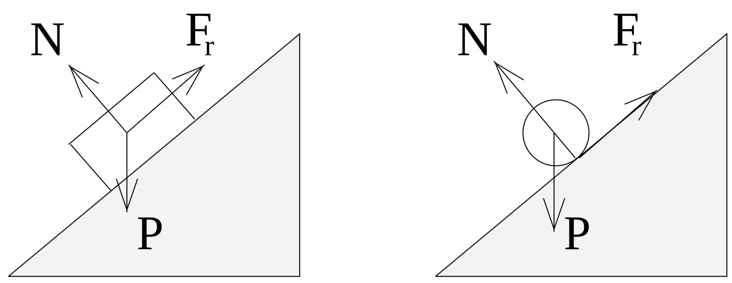
1. Introducció. Lleis de Newton.
2. Quantitat de moviment i impuls lineal.
3. Moment cinètic i impuls angular.
4. Sistemes no inercials. Forces d'inèrcia.
5. Moviments interdependents.
6. Treball i energia.
7. Forces centrals.
8. Gravitació.

1. Introducció. Lleis de Newton

- Cinemàtica $\longrightarrow$ descripció del moviment $\longrightarrow$ acceleracions

  Dinàmica $\longrightarrow$ causes del moviment $\longrightarrow$ forces

- Diagrama de sòlid lliure:

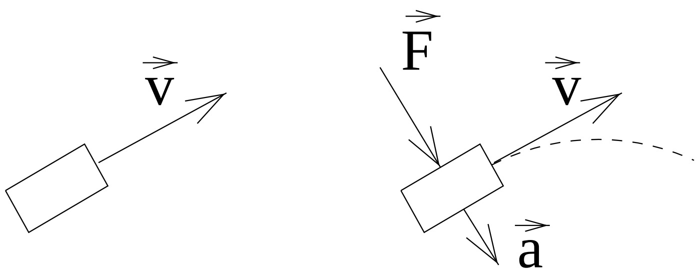


Lleis de Newton

- 1a llei (principi de inèrcia): tot cos en repòs o amb moviment uniforme continuarà en aquest estat mentre la resultant de les forces que actuen sobre ell sigui nul.la.

- 2ona llei: el conjunt de les forces que actúen sobre un cos provoquen una acceleració directament proporcional a la seva resultant

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$



$\star$ Constant de proporcionalitat (m) $\rightarrow$ massa de l'objecte

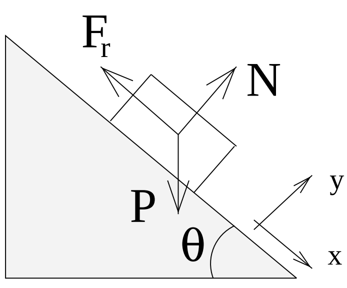
$$m \rightarrow [M] \Rightarrow F \rightarrow [MLT^{-2}]$$

- 3a llei (principi d'acció-reacció): tot cos que fa una força sobre un altre (acció), rep una força d'igual mòdul i direcció però de sentit contrari (reacció), feta per l'altre cos sobre ell.

- Problema de la dinàmica:

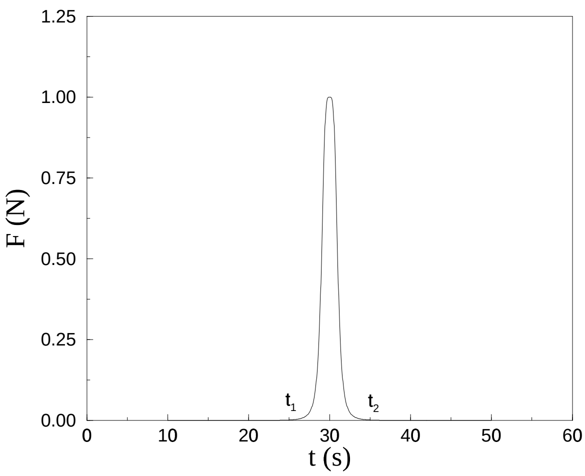
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \longrightarrow \quad \vec{r}(t)$$

- Exemple: cos lliscant per un pla inclinat:



$$N = P_y = P\cos\theta$$
$$P_x - F_r = P\sin\theta - \mu_d N = ma$$

2. QUANTITAT DE MOVIMENT I IMPULS LINEAL



- Impuls lineal:

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$$

- Quantitat de moviment (o moment lineal):

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt}\, dt = \int_{v_1}^{v_2} m d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

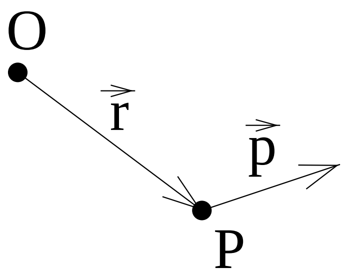
$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \longrightarrow \vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad [MLT^{-1}]$$

- 2ona. llei de Newton en terms de $\vec{p}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Longrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. MOMENT CINÈTIC I IMPULS ANGULAR

- Moment cinètic (o moment angular):



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

- Variació temporal de $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \Longrightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Impuls angular:

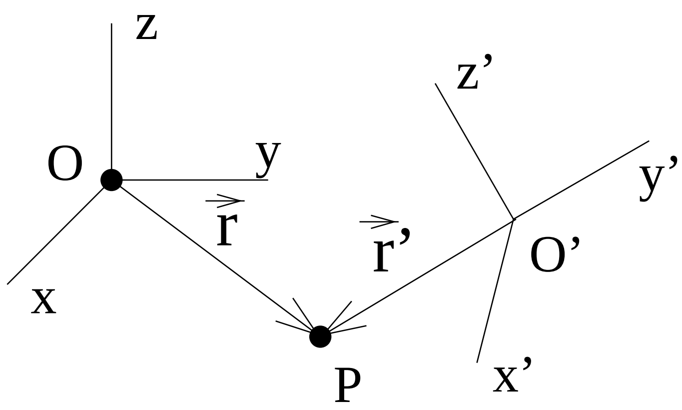
$$\vec{\mathcal{I}}_a = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \int_{L_1}^{L_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

4. SISTEMES NO INERCIALS. FORCES D'INÈRCIA

- 2ona. llei de Newton $\rightarrow$ $\vec{F} = m\vec{a}$
  - $\vec{F}$ no depèn del SR.
  - $\vec{a}$ depèn del SR (si és no inercial)

  $\Rightarrow$ les lleis de Newton no són vàlides en SR no inercials.

- "2ona. llei de Newton" per un SR no inercial:

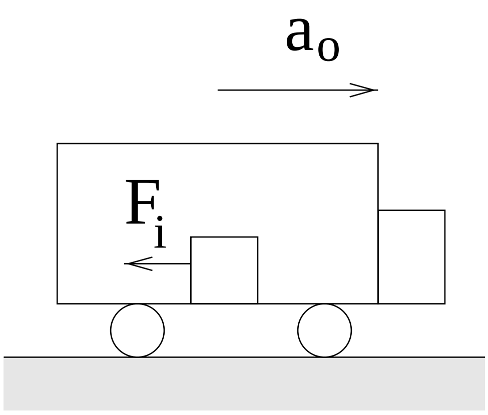


$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$$
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}\,' + m\vec{a}_0$$
$$\Rightarrow \quad \vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}\,' \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}\,'$$

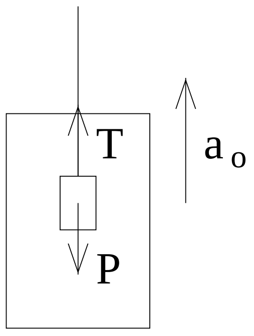
$\boxed{\vec{F}_i = -m\vec{a}_0}$ força d'inèrcia

- Exemple 1: camió accelerant



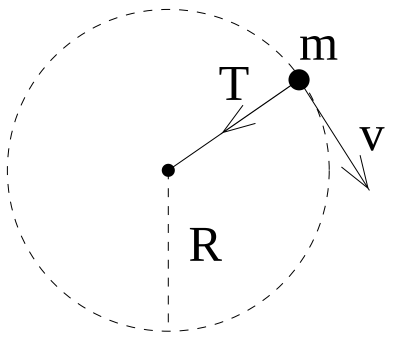
$$F_i = -ma_0$$

- Exemple 2: ascensor pujant amb acceleració



$$T - P = ma_0 \quad \text{des del terra}$$
$$T - P - ma_0 = 0 \quad \text{des de l'ascensor}$$

- Exemple 3: cos en moviment circular



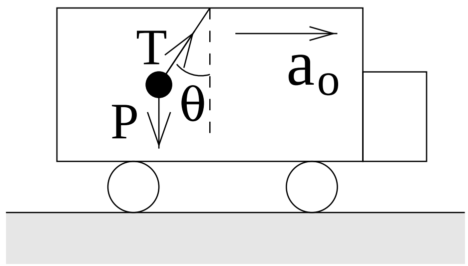
$T = m\frac{v^2}{R}$ des del terra

$\rightarrow$ (força centrípeta)

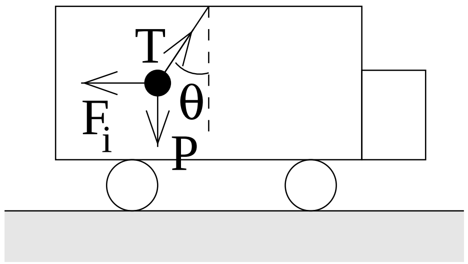
$T - m\frac{v^2}{R} = 0$ des del cos

$\rightarrow$ (força centrífuga)

- Exemple 4: pèndol en un SR no inercial

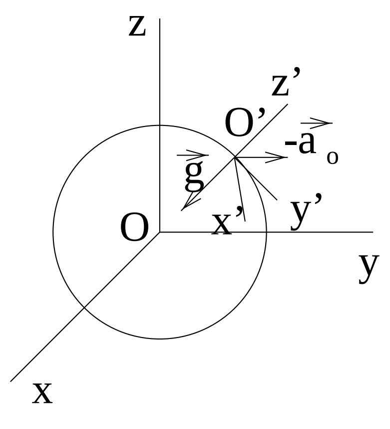


$$T\cos\theta - P = 0$$
$$T\sin\theta = ma_0$$
(des del terra)



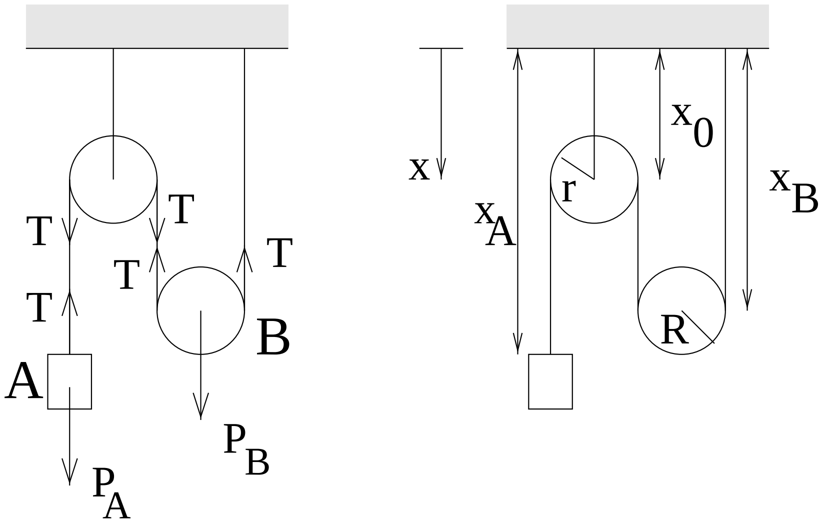
$$T\cos\theta - P = 0$$
$$T\sin\theta + F_i = 0, \quad F_i = -ma_0$$
(des del camió)

- Exemple 5: la terra



$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}\,' + \vec{a}_0 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,')$$
$$\vec{F} - m\vec{a}_0 - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = m\vec{a}\,'$$

5. MOVIMENTS INTERDEPENDENTS



- Llei de Newton per A i B:

$$P_A - T = m_A a_A$$
$$P_B - 2T = m_B a_B$$

- Falta una equació (tenim 3 incògnites: T, a_A i a_B).
- La corda que uneix A amb el sostre ha de mantenir constant la seva longitud L:

$$L = (x_A - x_0) + \pi r + (x_B - x_0) + \pi R + x_B = ct$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_A = -2a_B}$$

6. TREBALL I ENERGIA

- Si la força és constant mentre es produeix el desplaçament $\Delta\vec{r}$, es defineix el treball com:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}} \qquad [ML^2T^{-2}]$$

- Casos particulars:
  - $\vec{F} \perp \Delta\vec{r} \;\Rightarrow\; W = 0$ (mínima efectivitat)
  - $\vec{F} \parallel \Delta\vec{r} \;\Rightarrow\; W = F\Delta r$ (màxima efectivitat)
- Si la força no és constant:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

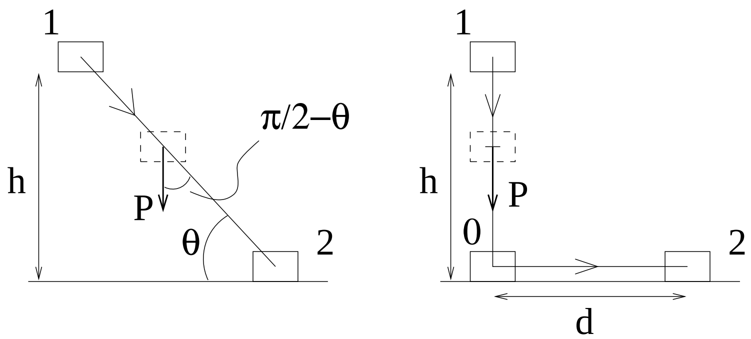
- Potència:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad [ML^2T^{-3}]$$

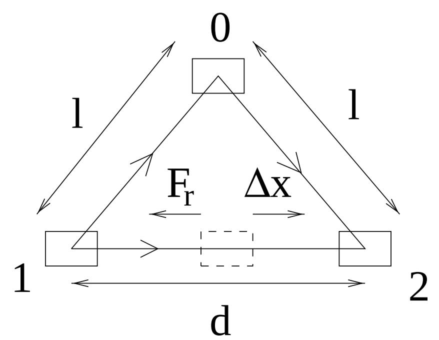
- Força conservativa: aquella per la qual el treball realitzat per anar d'un punt a un altre no depèn del camí recorregut:

$$\int_{\vec{r}_1\ (I)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1\ (II)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- Exemples:
  - de força conservativa: pes



  - de força no conservativa: fregament



- Forces conservatives: gravitatòria, elèctrica, elàstica,...
- Forces no conservatives: magnètica, fregament,...

- Teorema del treball-energia:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

  - Energia cinètica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad [ML^2T^{-2}]$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{W_{1\to 2} = T_2 - T_1}$$

- Si la força és conservativa:

  - Energia potencial:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad [ML^2T^{-2}]$$

$$\Longrightarrow \quad W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(U_2 - U_1)$$

- Exemples d'energia potencial:

  - Energia potencial gravitatòria: $U = mgh$.
  - Energia potencial elàstica: $U = \frac{1}{2}kx^2$.

- Principi de conservació de l'energia mecànica

  (quan totes les forces que fan treball són conservatives):

$$W = T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E} \quad \text{energia mecànica}$$

- Teorema generalitzat del treball-energia

  (quan hi ha forces no conservatives que fan treball):

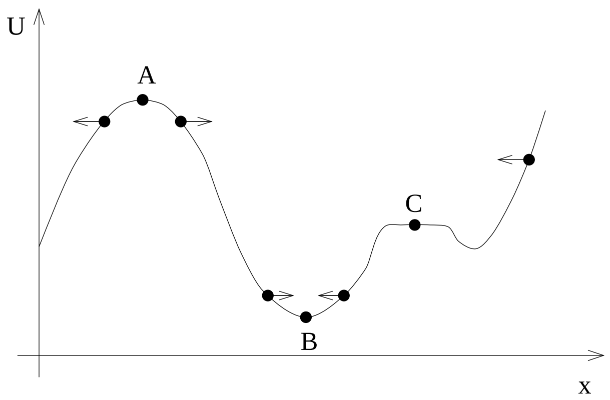
$$W = T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1) + W_{nc}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{T_1 + U_1 + W_{nc} = T_2 + U_2}$$

- Llei de conservació de l'energia: l'energia no es crea ni es destrueix, només es transforma.
  - Tipus d'energia: gravitatòria, tèrmica, química, elèctrica, magnètica, elàstica,...

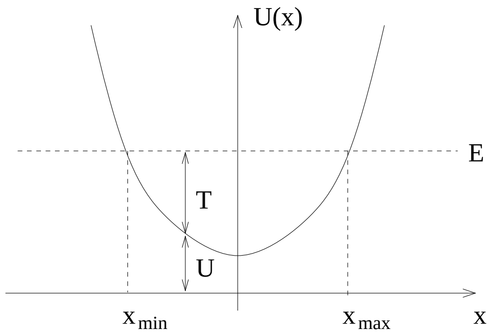
- Diagrames d'energia potencial (en 1 dimensió):

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \iff F(x) = -\frac{dU}{dx}$$



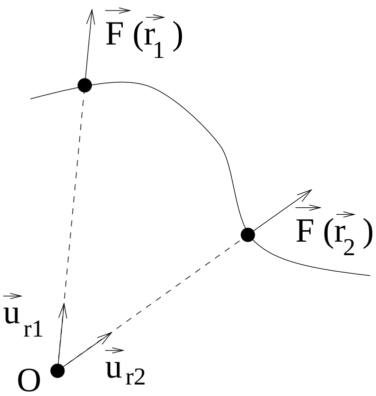
- Punts d'equilibri:
  * A: equilibri inestable
  * B: equilibri estable
  * C: equilibri indiferent

- Anàlisi del moviment: $E = T + U, \;\; T = \frac{1}{2}mv^2 > 0$



- $x > x_{max} \Rightarrow U > E \quad \Rightarrow T < 0 \quad \Rightarrow$ impossible
- $x = 0 \quad \Rightarrow U = U_{min} \Rightarrow T = T_{max}$
- $x = x_{max} \Rightarrow U = U_{max} \Rightarrow T = 0 \quad \Rightarrow$ punt de retorn

7. FORCES CENTRALS

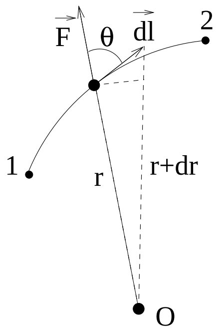


$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\vec{u}_r$

O: centre de forces

$\vec{r}$: radi vector

- Tota força central és conservativa:



$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr$$

- El moment cinètic respecte al centre de forces es conserva:

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L}_0 = ct$$

  - la trajectòria és plana.
  - la velocitat d'escombrada del radi vector és constant:

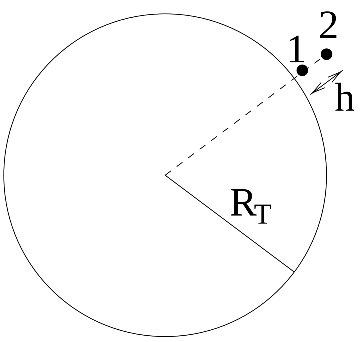
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{L}{2m} = ct$$

8. GRAVITACIÓ

- Llei de la gravitació universal: $\boxed{\vec{F} = -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r}$
- La força de gravitació és central, i per tant conservativa. Podem definir una energia potencial gravitatòria:

$$U_g(r) = -G\,\frac{M\,m}{r}$$

- Aproximació de U_g a prop de la superfície terrestre:

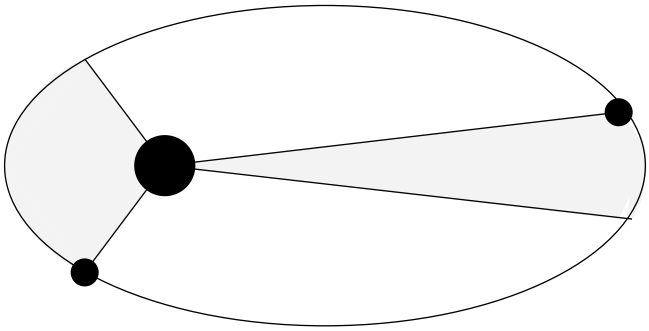


$$r_2 - r_1 = h \ll R_T$$

$$U_g(r_2) - U_g(r_1) = -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \simeq \frac{GM}{R_T^2}mh$$

$\Rightarrow \boxed{U_g(h) = mgh}$ $\quad g \equiv \frac{GM}{R_T^2}$ $\quad$ acceleració de la gravetat

- Lleis de Kepler:
  - Els planetes descriuen òrbites el.líptiques al voltant del sol, que és un dels focus de l'el.lipse.



  - La velocitat areolar del planetes és constant.
  - Els periodes T_1 i T_2 de dos planetes que descriuen òrbites al voltant del sol amb semieixos majors a_1 i a_2 es relacionen mitjançant:

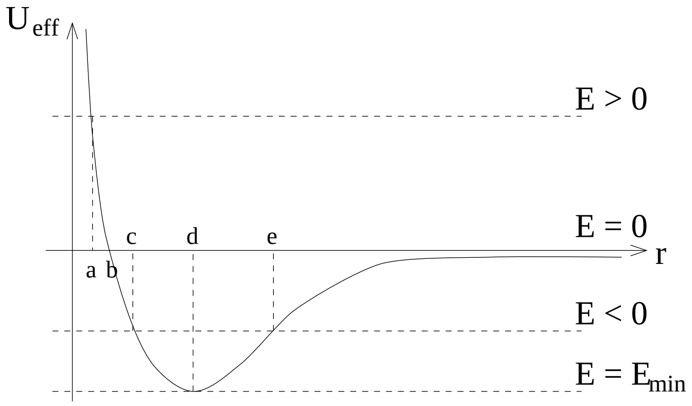
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

- Energia potencial efectiva:

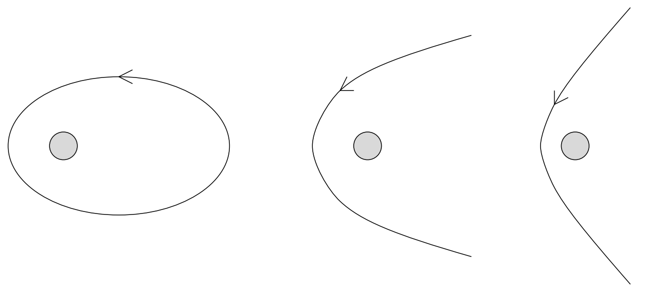
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow \; E = \frac{1}{2}mv_r^2 + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

- Diagrama d'energia:



  - $E > 0$: òrbita hiperbòlica
  - $E = 0$: òrbita parabòlica
  - $E < 0$: òrbita el.líptica
  - $E = E_{min}$: òrbita circular



- Velocitat d'escape:

$$E = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

A la superfície de la terra $v_e = 11.2\ km/s$.

Dinàmica dels sistemes de partícules

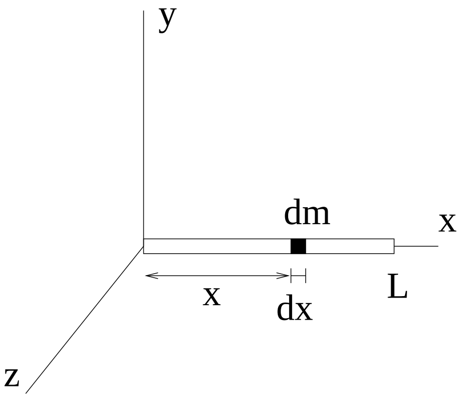
1. Centre de massa.
2. Quantitat de moviment d’un sistema de partícules.
3. Moment angular d’un sistema de partícules.
4. Treball i energia.
5. Xocs.

1. CENTRE DE MASSA

- Sistema de partícules: $\{m_i, \vec{r}_i\}, \quad i = 1, \ldots, N$.
- Centre de massa:

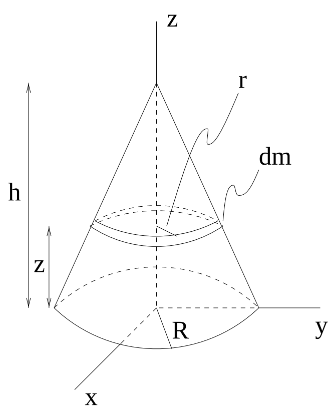
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

- Exemple 1: CM d'una barra homogènia de longitud L:



$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm$$
$$= \frac{1}{M} \int_0^L x \frac{M}{L} dx = \frac{L}{2}$$

- Exemple 2: CM d'un conus homogèni d'alçada h:



$$x_{cm} = y_{cm} = 0$$
$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dm$$
$$= \frac{1}{M} \int z \frac{M}{1/3 \pi R^2 h} dV = \frac{h}{4}$$
$$dV = \pi \frac{R^2 (h-z)^2}{h^2} dz$$

2. QUANTITAT DE MOVIMENT D'UN SISTEMA DE PARTÍCULES

- Definició: $\boxed{\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i}$
- Variació temporal de $\vec{p}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ext} \implies \boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Llei de conservació de la quantitat de moviment:

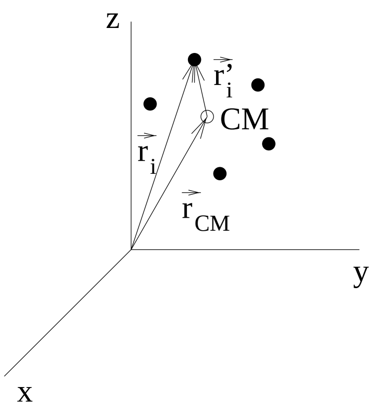
$$\vec{F}_{ext} = 0 \iff \vec{p} = const.$$

- En termes del centre de massa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}; \quad \vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}; \quad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$\implies \vec{F}_{ext} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = M\vec{a}_{cm} \implies \boxed{\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}}$$

- Quantitat de moviment respecte al centre de massa:



$$\vec{p}\,' = \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = \sum_i m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) = 0$$

$$\implies \boxed{\vec{p}\,' = 0}$$

3. Moment angular d'un sistema de partícules

- Moment angular d'un SP respecte a un punt O:

$$\boxed{\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

- Variació temporal de $\vec{L}_O$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{M}_O^{ext} \implies \boxed{\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}}$$

- Llei de conservació del moment angular:

$$\boxed{\vec{M}_O = 0 \iff \vec{L}_O = const.}$$

- Relació entre moments respecte a dos punts:

$$\vec{M}_A^{ext} = \vec{M}_B^{ext} + \vec{AB} \times \vec{F}^{ext}$$

4. TREBALL I ENERGIA

- Teorema del treball-energia: $W = \Delta T$

  treball total $W = \sum_k W_k = \sum_k \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k$

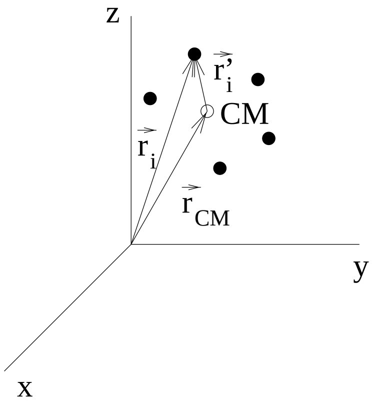
  energia cinètica total $T = \sum_k T_k = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2$

- Llei de conservació de l'energia mecànica:

$$\vec{F}_i^{int}, \vec{F}_i^{ext} \text{ conservatives } \forall i \implies E = T + U = const$$

  essent $U = \sum_i U_i$.

- En termes del centre de massa:



$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i\,' + \vec{v}_{cm})^2 \end{aligned}$$

$$\implies T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + T'$$

5. Xocs

- X‘operfectament elàstic (en una dimensió):

  p const $\Rightarrow \; m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

  E const $\Rightarrow \; \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

$$\Longrightarrow \; m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$
$$(v_1' - v_2') = -(v_1 - v_2)$$

- X‘ono elàstic:

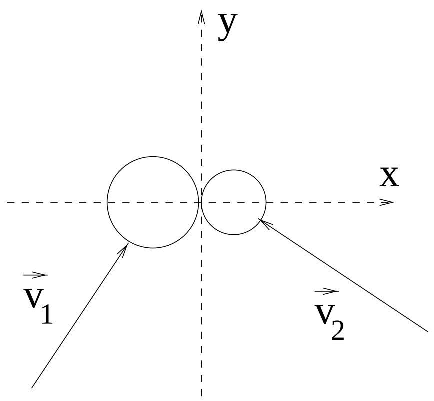
$$(v_1' - v_2') = -e(v_1 - v_2), \quad 0 \leq e \leq 1$$

  e: coeficient de restitució.

  - $e = 1$: x‘operfectament elàstic.
  - $e = 0$: x‘operfectament inelàstic:

$$e = 0 \;\Rightarrow\; v_1' = v_2' = v' \;\Rightarrow\; m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

- Xocs oblicus en dos dimensions:

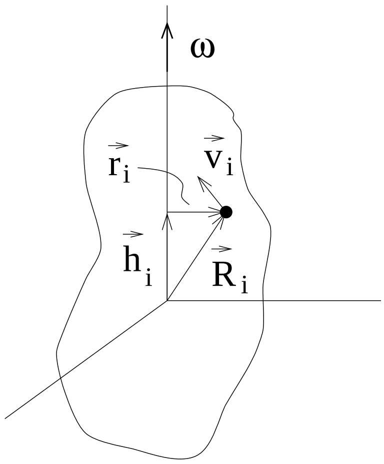


$$v_{1x}' - v_{2x}' = -e\,(v_{1x} - v_{2x})$$
$$v_{1y}' = v_{1y}$$
$$v_{2y}' = v_{2y}$$

Dinàmica plana del sòlid rígid

1. Rotació entorn d'un eix fixe.
2. Càlcul de moments d'inèrcia. Teorema de Steiner.
3. Equacions del moviment pla d'un sòlid rígid.
4. Treball i energia.
5. Percussió.

1. ROTACIÓ ENTORN D'UN EIX FIXE.



$$\vec{R}_i = \vec{r}_i + \vec{h}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$L_z = \vec{L} \cdot \vec{k} = \left[\sum_i \left(\vec{r}_i + \vec{h}_i \right) \times m_i \vec{v}_i \right] \cdot \vec{k} = \sum_i r_i m_i v_i$$

$$v_i = \omega r_i \implies L_z = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega = I\omega$$

- Moment d'inèrcia:

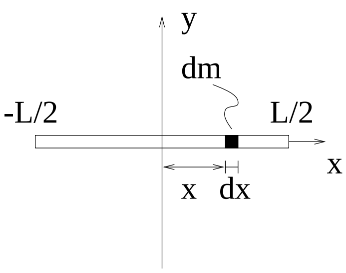
$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2} \qquad \boxed{I = \int r^2 \, dm}$$

- Radi de gir:

$$I = m\, d^2 \implies d = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

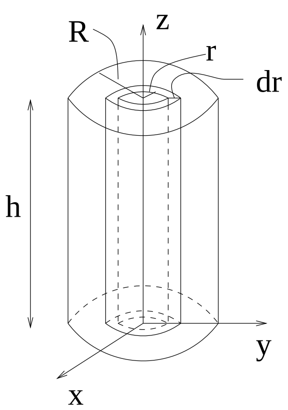
2. CÀLCUL DE MOMENTS D'INÈRCIA

- Exemple 1: barra homogènia de longitud L i massa M.



$$I = \int x^2\, dm$$
$$= \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, \frac{M}{L}\, dx = \frac{1}{12} M L^2$$

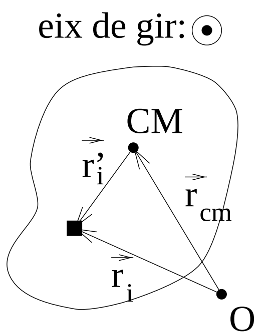
- Exemple 2: cilindre de massa M i radi R.



$$I = \int r^2\, dm$$
$$= \int r^2\, \frac{M}{\pi R^2 h}\, dV = \frac{1}{2} M R^2$$

$$dV = 2\pi r h dr$$

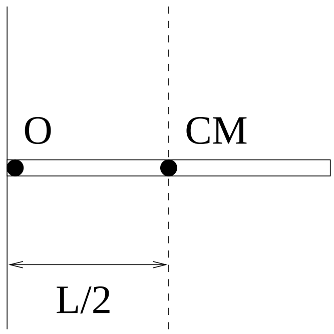
- Teorema de Steiner (per un sòlid pla):



$$I_O = \sum_i m_i r_i^2$$
$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i\,' + \vec{r}_{cm})^2$$

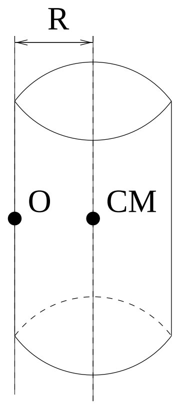
$$\Longrightarrow \boxed{I_O = I_{cm} + M d^2}$$

- Exemple 3: moment d'inèrcia d'una barra homogènia de longitud L i massa M respecte a un eix que és perpendicular a la barra i passa per un dels seus extrems.



$$I_O = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

- Exemple 4: moment d'inèrcia d'un cilindre de massa M i radi R respecte a un eix paral.lel al seu eix de simetria i que passa per la seva perifèria.



$$I_O = I_{cm} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

3. EQUACIONS DEL MOVIMENT PLA D'UN SÒLID RÍGID

- Per la trasl.lació:

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{cm}}$$

- Per la rotació:

$$L_z = I\omega \implies \boxed{M_Q^{ext} = \frac{dL_Q}{dt} = I_Q\alpha}$$

  on Q = CIR o CM.

- Equacions del moviment pla:

$$\sum F_x^{ext} = Ma_{cm,x}$$
$$\sum F_y^{ext} = Ma_{cm,y}$$
$$\sum M_Q^{ext} = I_Q\alpha$$

4. TREBALL I ENERGIA

- En un sòlid rígid, el treball de les forces interiors és nul:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = ct \;\Rightarrow\; \sum_k \vec{F}_k^{int} \cdot \Delta\vec{r}_k = 0 \;\Rightarrow\; W = W^{ext} = \Delta T$$

- Energia cinètica d'un sòlid rígid:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

si O és un punt fixe (CIR) o el centre de massa:

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} M v_O^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

  - Respecte al centre de massa: trasl.lació + rotació

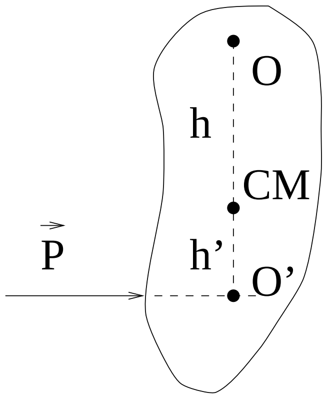
$$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

  - Respecte a un eix fixe o al CIR: només rotació

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

5. Percussió

- Percussió: força impulsiva aplicada sobre un sòlid rígid durant un interval breu de temps.
- Centre de percussió: punt del sòlid no afectat per la percussió.



$$F = \frac{\Delta p_{cm}}{\Delta t} \Rightarrow v_{cm} = \frac{F\Delta t}{M}$$

$$Fh' = \frac{\Delta L_{cm}}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{F\Delta t h'}{I_{cm}}$$

$$v_{cm} = \omega h \Longrightarrow \boxed{h' = \frac{I_{cm}}{Mh}}$$

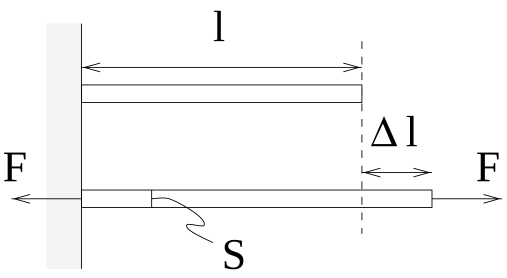
Elasticitat

1. El sòlid real.
2. Deformacions sota esforços normals.
3. Deformacions sota esforços tangents.
4. Energia elàstica.

1. El sòlid real.

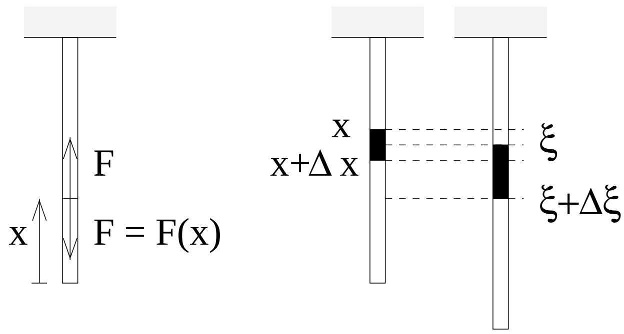
- Esforç normal: força per unitat d'àrea feta perpendicularment a una secció donada d'un sòlid.

- Deformació unitària longitudinal: variació relativa de la longitud del cos en la direcció de l'esforç normal.



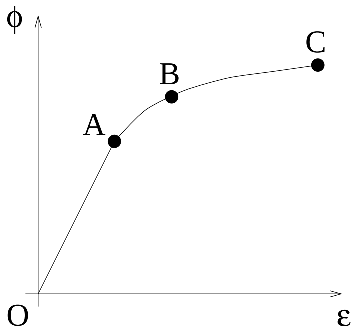
$$\phi = \frac{F}{S} \quad [ML^{-1}T^{-2}]$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

- L'esforç pot variar al llarg del cos:



$$\phi(x) = \frac{F(x)}{S} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{d\xi}{dx}$$

- Corba de resposta $\phi(\varepsilon)$ d'un sòlid típic:

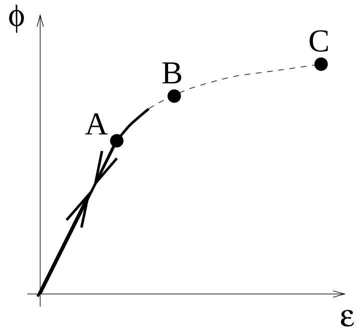


A: límit de proporcionalitat

B: límit elàstic

C: límit de fractura

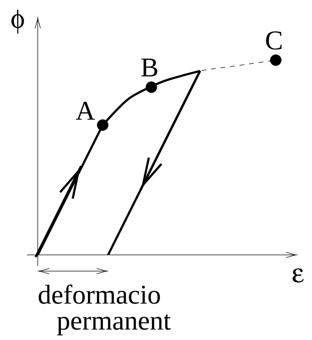
- Zona OB: comportament elàstic



zona OB gran $\longrightarrow$ material elàstic

zona OB petita $\longrightarrow$ material plàstic

- Zona BC: comportament plàstic (histèresi elàstica)



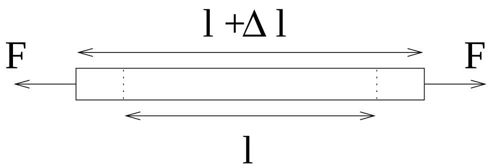
zona BC gran $\longrightarrow$ material dúctil

zona BC petita $\longrightarrow$ material fràgil

- Zona OA: comportament proporcional
  - Llei de Hooke: $\boxed{\phi = \mathcal{Y}\varepsilon}$ ($\mathcal{Y}$: mòdul de Young)

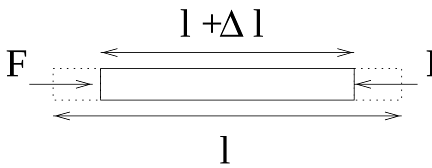
2. DEFORMACIONS SOTA ESFORÇOS NORMALS.

- Deformacions longitudinals.
  - Tracció:



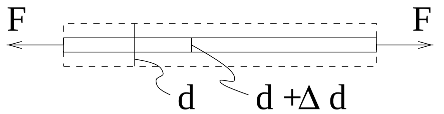
$$\varepsilon > 0, \quad \phi > 0$$
$$\Longrightarrow \phi = \mathcal{Y}\varepsilon$$

  - Contracció:



$$\Delta l < 0 \rightarrow \varepsilon < 0, \quad \phi < 0$$
$$\Longrightarrow \phi = \mathcal{Y}\varepsilon$$

- Deformacions transversals.

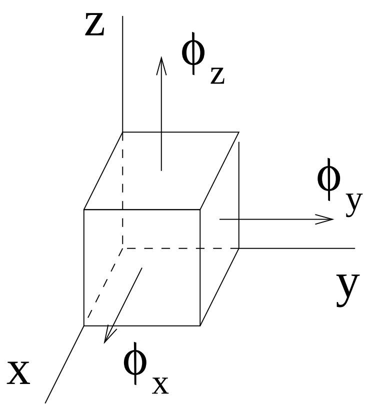


$$\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d}$$

  - La relació entre ε_t i ε és una constant del material:

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \quad \text{coeficient de Poisson}$$

- Deformacions volumètriques:



$$\varepsilon_x = \frac{\phi_x - \sigma(\phi_y + \phi_z)}{\mathcal{Y}}$$

  – Variació de volum:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\sigma}{\mathcal{Y}} \left(\phi_x + \phi_y + \phi_z\right)$$

  – Compressió uniforme: $\phi_x = \phi_y = \phi_z = -P$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3(1-2\sigma)}{\mathcal{Y}} P$$

  – Mòdul de compressibilitat:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{B} P, \qquad B = \frac{\mathcal{Y}}{3(1-2\sigma)}$$

  – Màxim valor del coeficient de Poisson:

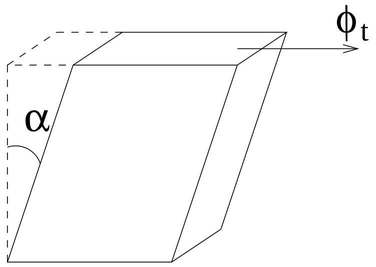
$$B > 0 \implies \sigma < \tfrac{1}{2}$$

  – Límit de sòlid rígid:

$$\mathcal{Y} \to \infty, \quad \sigma \to 0, \quad B \to \infty$$

3. DEFORMACIONS SOTA ESFORÇOS TANGENTS.

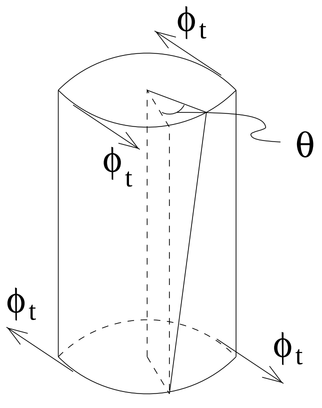
- Esforç tangent: el paral.lel a la superfície sobre la que actúa.
- Cisellament:



$$\boxed{\phi_t = G\alpha}$$

  - Mòdul de rigidesa: $G = \frac{\mathcal{Y}}{2(1+\sigma)}$

- Torsió:



$$\boxed{M = \tau\theta}$$

  - τ: constant de torsió

$$\tau = G\frac{\pi R^4}{2l}$$ per un fil cilíndric.

4. ENERGIA ELÀSTICA.

- Energia per tracció:

$$\phi = \mathcal{Y}\varepsilon \implies \frac{F}{S} = \mathcal{Y}\,\frac{x}{L}$$

$$\Delta U = \int dW = \int_0^{\Delta l} F\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{Y}S}{L}\,(\Delta l)^2$$

- Energia per torsió:

$$M = \tau\theta \implies rF = \tau\theta$$

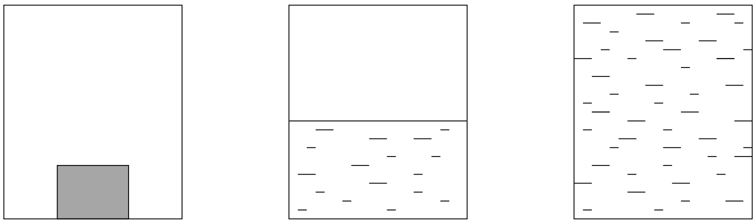
$$\Delta U = \int dW = \int_0^{\theta} F\,r\,d\theta = \frac{1}{2}\,\tau\theta^2$$

Estàtica de fluids

1. Propietats dels fluids.
2. Pressió en un fluid.
3. Equilibri d'un fluid en un camp gravitatori.
4. Principi de Pascal.
5. Principi d'Arquímedes.

1. PROPIETATS DELS FLUIDS.

- Estats d'agregació de la matèria: sòlid, líquid i gas.



SOLID	LIQUID	GAS
volum propi forma propia	volum propi forma adaptable	volum adaptable forma adaptable

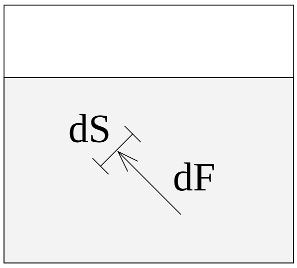
- En termes de l'atracció intermolecular i la posició de les molècules:
  - Sòlid: atracció forta - posicions aprox. fixes
  - Líquid: atracció intermitja - separació aprox. fixa
  - Gas: atracció feble - moviment aprox. lliure

- En termes del mòdul de rigidesa:
  - Sòlids: mòdul de rigidesa gran.
  - Fluids: mòdul de rigidesa molt petit.

- Fluids perfectes: mòdul de rigidesa idènticament nul.

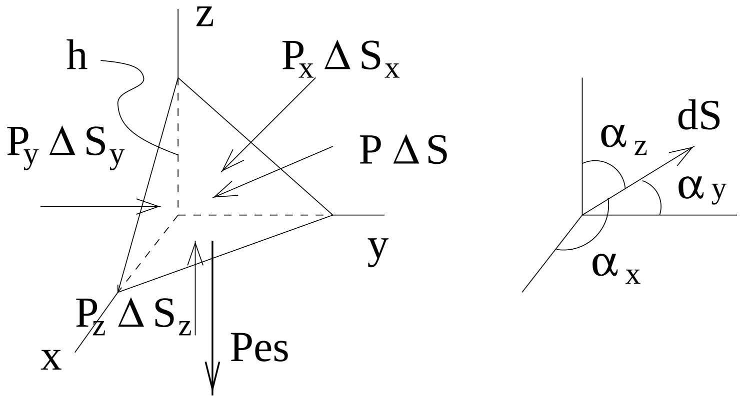
2. PRESSIÓ EN UN FLUID.

- En un fluid perfecte en equilibri no poden haber-hi esforços tangents.



$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{densitat} \quad [ML^{-3}]$$
$$P = \frac{dF}{dS} \quad \text{pressió} \quad [ML^{-1}T^{-2}]$$

- P està ben definida (no depèn de la orientació de dS):



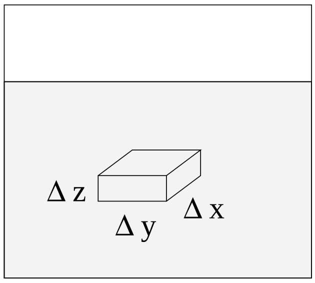
– Condició d'equilibri estàtic: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

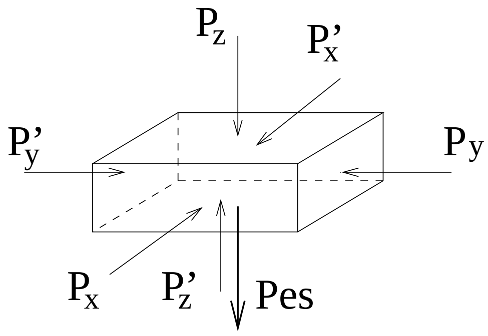
$$P_x \Delta S_x - P \Delta S \cos \alpha_x = 0$$
$$P_y \Delta S_y - P \Delta S \cos \alpha_y = 0$$
$$P_z \Delta S_z - P \Delta S \cos \alpha_z - \frac{1}{3} \rho h \Delta S_z g = 0$$

– Per $h \to 0$, i donat que $\frac{\Delta S_i}{\Delta S} = \cos \alpha_i$,

$$P_x = P_y = P_z = P \qquad \forall \, (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$$

3. EQUILIBRI D'UN FLUID EN UN CAMP GRAVITATORI.



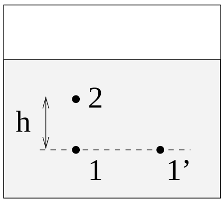


- Fluid en equilibri: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

  $P'_x = P_x,\ P'_y = P_y,\ P'_z = P_z + \rho g \Delta z \implies \boxed{dp = -\rho g dz}$

- Casos particulars:

  - Fluid incompressible: $\rho = const.$

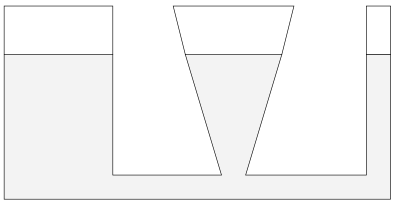


$$P_1 = P_{1'} = P_2 + \rho g h$$

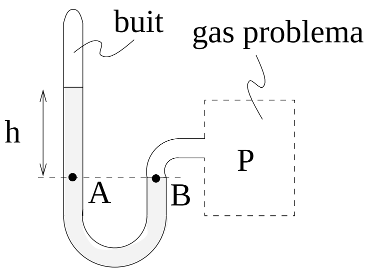
  - Fluid compressible: $\rho \neq const.$

    Atmosfera: $\rho = \rho_0\, e^{-\beta\, z} \implies P = \frac{\rho_0\, g}{\beta}\, e^{-\beta\, z}$

- Principi dels tubs comunicants:

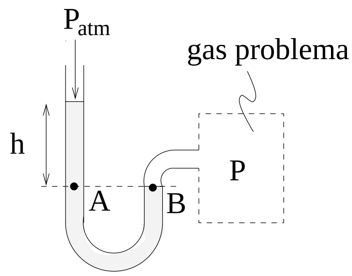


- Instruments per mesurar la pressió:
  - Manòmetres:
    * de tub tancat



$$P_B = P_A \implies \boxed{P = \rho\, g\, h}$$

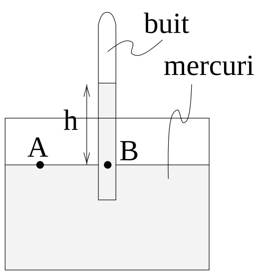
    * de tub obert



$$P_B = P_A \implies P = P_{atm} + \rho\, g\, h$$
$$\boxed{P - P_{atm} = \rho\, g\, h}$$

($P - P_{atm}$: pressió manomètrica)

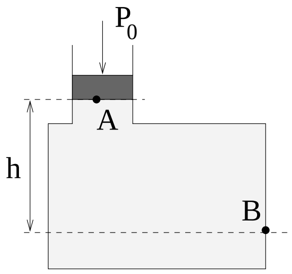
  - Baròmetres:
    * de Torricelli



$$P_A = P_B \implies \boxed{P_{atm} = \rho\, g\, h}$$

4. PRINCIPI DE PASCAL.

- Per un fluid incompressible:

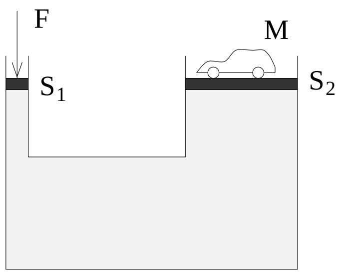


$$P_0 = 0 \implies P_B = P_A + \rho\, g\, h$$

$$P_0 \neq 0 \implies P'_B = (P_A + P_0) + \rho\, g\, h = P_B + P_0$$

- Principi de Pascal: en un fluid incompressible en equilibri estàtic, la pressió es transmet per igual a tots els seus punts.

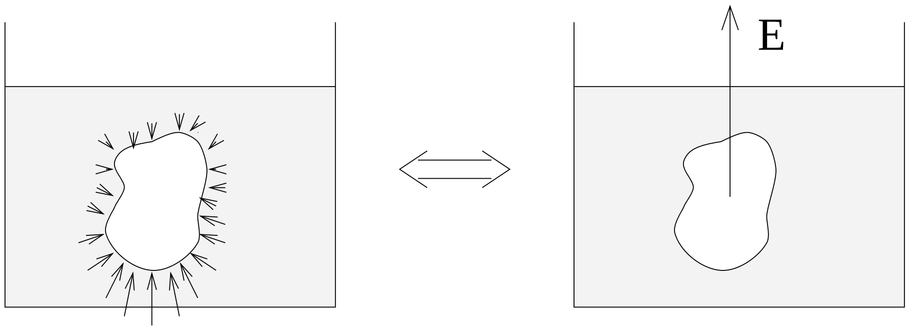
- Aplicació: premsa hidràulica.



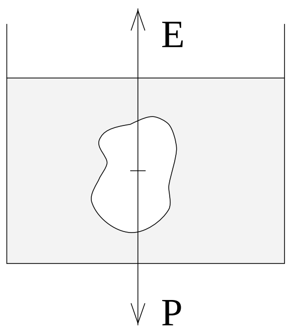
$$\frac{F}{S_1} = \frac{M\,g}{S_2} \implies F = \frac{S_1}{S_2} M g$$

$$S_1 << S_2 \implies F << M g$$

5. PRINCIPI D'ARQUÍMEDES.



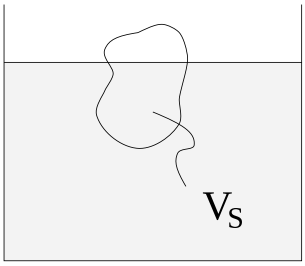
- E: empenta d'Arquímedes.
- Principi d'Arquímedes: l'empenta és igual al pes del fluid desallotjat.
- Criteri de flotació:



$$E = \rho V g$$
$$P = \rho_c V g$$

- $\rho_c > \rho \implies P > E \implies$ el cos s'enfonsa.
- $\rho_c = \rho \implies P = E \implies$ el cos flota.
- $\rho_c < \rho \implies P < E \implies$ el cos puja.

- Flotació parcial:

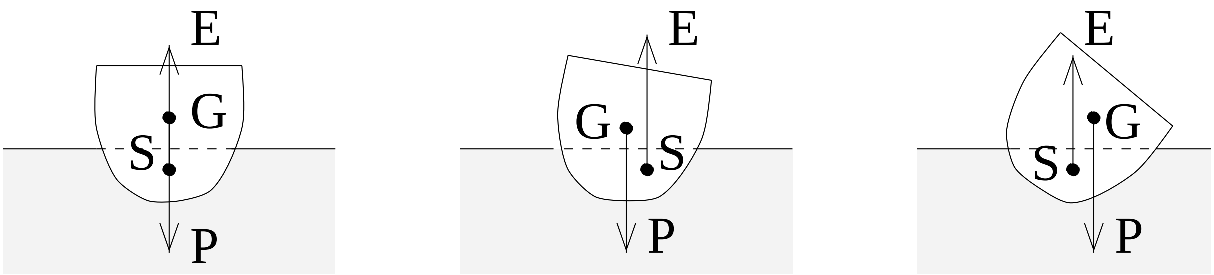


$$E = \rho\, V_S\, g$$
$$P = \rho_c\, V\, g$$

$$P = E \implies V_S = V\ \frac{\rho_c}{\rho}$$

- Punt d'aplicació de l'empenta: centroide de la part submergida.

- Exemple: flotació d'un vaixell.



G: centre de gravetat del vaixell

S: centre de gravetat de la part submergida

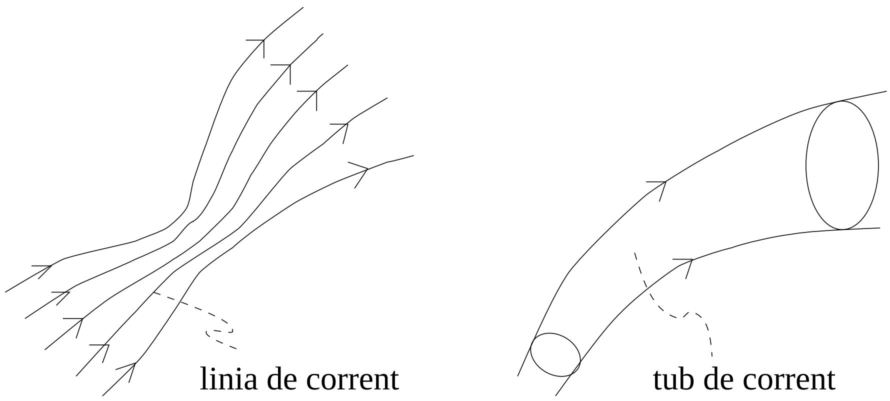
Dinàmica de fluids

1. Moviment d’un fluid.
2. Equació de continuïtat.
3. Equació de Bernouilli.
4. Llei de Torricelli.
5. Flux viscòs.

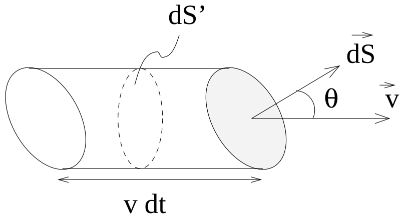
1. MOVIMENT D'UN FLUID.

- Descripcions del moviment d'un fluid.
  - Descripció de Lagrange: partícules fluïdes.
  - Descripció d'Euler: $\vec{v}(x, y, z, t)$, $P(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$.
- Tipus de fluxos:
  - Segons les propietats dels camps $\vec{v}$, P, i ρ:
    * Flux estacionari: $\vec{v}(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $\rho(x, y, z)$.
    * Flux uniforme: $\vec{v}(t)$.
    * Flux incompressible: $\rho(x, y, z, t) = \rho = const.$
  - Segons el comportament de làmines de fluid:
    * Flux laminar: les làmines no es barregen.
    * Flux turbulent: les làmines es barregen.
  - Segons la velocitat angular del fluid.
    * Flux rotacional: vel. angular no nul.la.
    * Flux irrotacional: vel. angular nul.la.
  - Segons el mòdul de rigidesa:
    * Flux ideal: $G = 0$.
    * Flux viscòs: $G \neq 0$.

- Descripció gràfica:



- Caracterització del moviment d'un fluid.
  - Flux: massa de fluid que travessa una superfície per unitat de temps.



$$dV = v\,dt\,dS' = v\,dt\,dS\,\cos\theta$$
$$= \vec{v}\cdot d\vec{S}\,dt$$

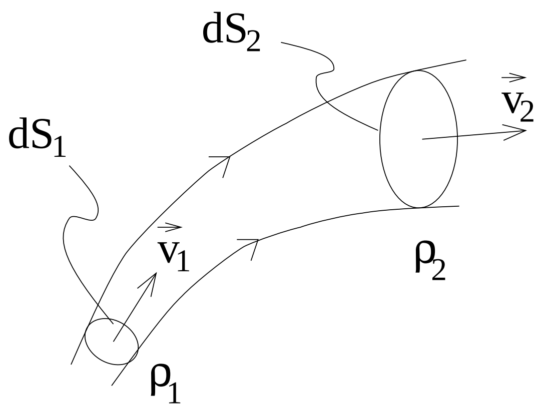
$$d\phi = \frac{dm}{dt} = \rho\,\vec{v}\cdot d\vec{S} \implies \boxed{\phi = \int_S \rho\,\vec{v}\cdot d\vec{S}} \quad [MT^{-1}]$$

  - Cabal: volum de fluid que travessa la superfície per unitat de temps.

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \vec{v}\cdot d\vec{S} \implies \boxed{Q = \int_S \vec{v}\cdot d\vec{S}} \quad [L^3T^{-1}]$$

(Flux incompressible: $\phi = \rho Q$).

2. EQUACIÓ DE CONTINUÏTAT.



$$\phi_1 = \phi_2 \implies \boxed{\rho_1\, v_1\, dS_1 = \rho_2\, v_2\, dS_2}$$

- Casos particulars:
  - Flux incompressible ($\rho_1 = \rho_2$)

$$v_1\, dS_1 = v_2\, dS_2$$

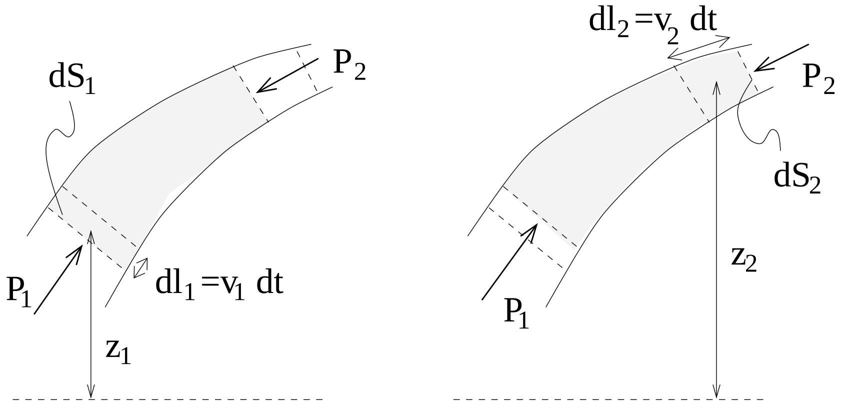
  - Flux ideal (v constant a S)

$$\rho_1\, v_1\, S_1 = \rho_2\, v_2\, S_2$$

  - Flux ideal i incompressible:

$$\boxed{v_1\, S_1 = v_2\, S_2}$$

3. EQUACIÓ DE BERNOUILLI.



- Treball realitzat per les forces de pressió P_1 i P_2:

$$dW = P_1\, dS_1\, dl_1 - P_2\, dS_2\, dl_2 = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) dm$$

- Increment d'energia mecànica:

$$dE = dm\, g\, (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\, dm\, (v_2^2 - v_1^2)$$

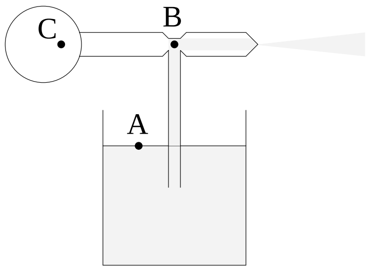
- Teorema del treball-energia:

$$dW = dE \implies \frac{P_1}{\rho_1} + g\, z_1 + \frac{1}{2}\, v_1^2 = \frac{P_2}{\rho_2} + g\, z_2 + \frac{1}{2}\, v_2^2$$

$$\implies \boxed{P + \rho\, g\, z + \tfrac{1}{2}\, \rho\, v^2 = const}$$

- Validesa:
  - Punts pertanyents a la mateixa línia de corrent.
  - Tots els punts d'un flux irrotacional.

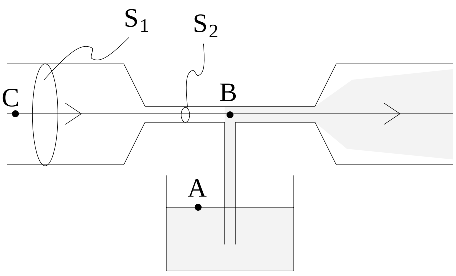
- Aplicacions de l'equació de Bernouilli:
  - Polvoritzador:



$$P_A = P_C = P_{atm}$$
$$P_C = P_B + \frac{1}{2}\,\rho\, v_B^2$$

$P_B < P_A = P_{atm} \implies$ el líquid puja pel tub.

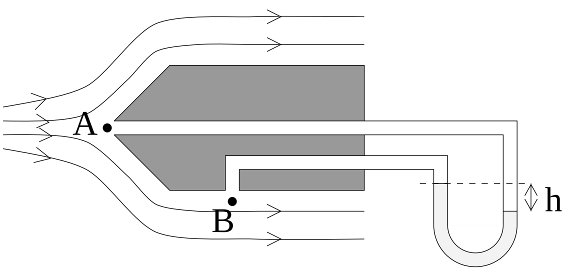
  - Tub de Venturi:



$$P_A = P_C = P_{atm}$$
$$P_C + \frac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 = P_B + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2$$

$S_2 < S_1 \;\Rightarrow\; v_2 > v_1 \;\Rightarrow\; P_B < P_A \;\Rightarrow$ el líquid puja.

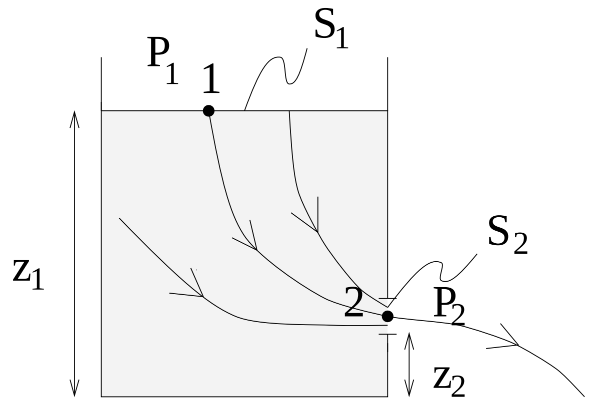
  - Tub de Pitot:



$$P_A = P_B + \frac{1}{2}\,\rho\, v_B^2$$

$$P_A = P_B + \rho_l\, g\, h \implies v_B = \sqrt{\frac{2\,\rho_l\, g\, h}{\rho}}$$

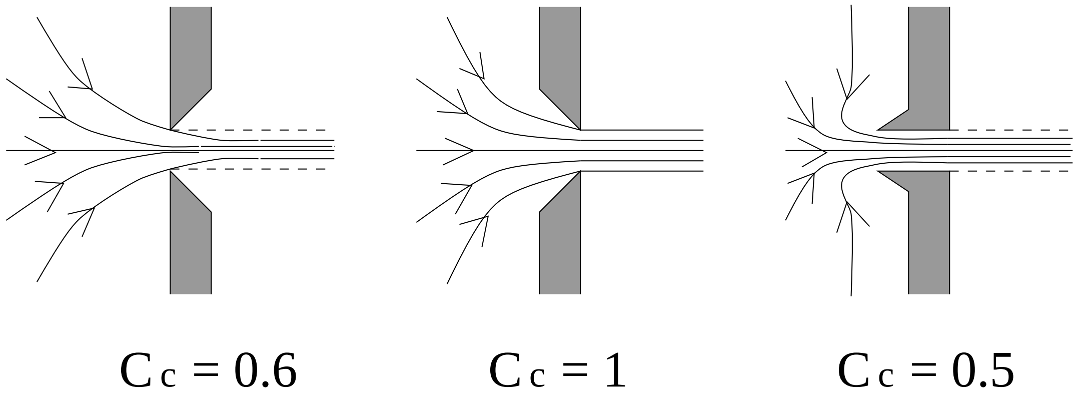
4. LLEI DE TORRICELLI.



- $S_1 >> S_2 \implies v_1 << v_2 \implies$ flux quasi estacionari.
- Dipòsit obert: $P_1 = P_2 = P_{atm}$.
- Aplicació de l'eq. de Bernouilli:

$$\rho\, g\, z_1 = \rho\, g\, z_2 + \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 \implies \boxed{v_2 = \sqrt{2\, g\, h}}$$

- La secció S_c del tub de corrent a l'orifici de sortida no coincideix amd la secció S_2 de l'orifici.
  - Coeficient de contracció: $C_c = \frac{S_c}{S_2}$.



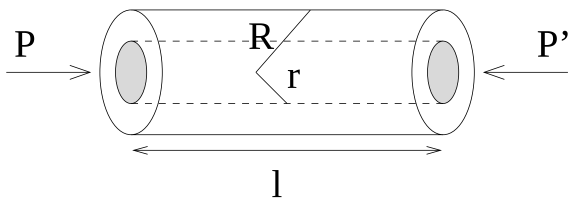
5. Flux viscòs.

- Fluid viscòs ($G \neq 0$) $\Rightarrow$ existeix fricció entre capes adjacents de fluid

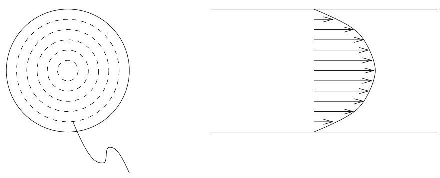
$$\frac{dF}{dS} = \eta \, \frac{dv}{dy}$$

η: coeficient de viscositat $[M L^{-1} T^{-1}]$

- Perfil de velocitats d'un flux viscòs:



$$\frac{(P-P')\,\pi\, r^2}{2\,\pi\, r\, l} = -\eta\,\frac{dv}{dr} \Longrightarrow \boxed{v(r) = \frac{P-P'}{4\,\eta\, l}\,(R^2 - r^2)}$$



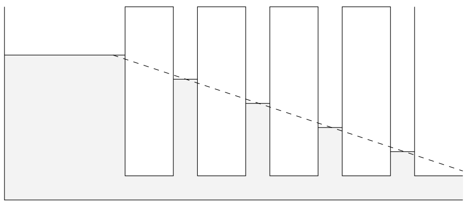
punts d'igual velocitat

- Llei de Poiseuille:

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \Longrightarrow \boxed{Q = \frac{\pi\, R^4}{8\,\eta\, l}\,(P - P')}$$

- Pèrdua de càrrega en un tub:

$$P' = P - \frac{8\,\eta\,Q}{\pi\,R^4}\,l$$



- Flux turbulent: el flux laminar d'un flux viscòs deixa de ser estable a velocitats grans.

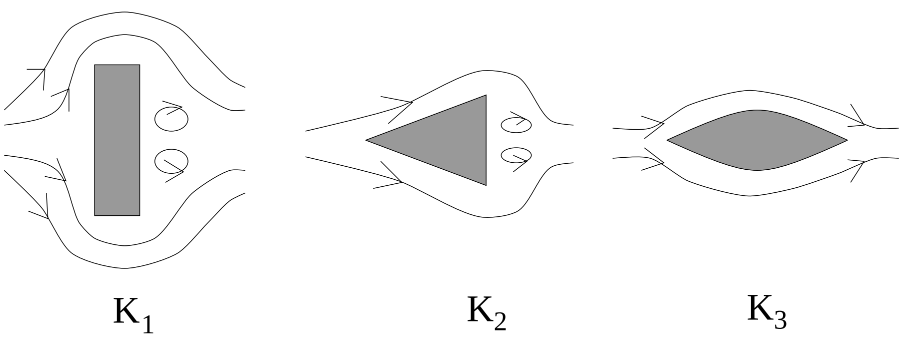
  Condició crítica: $R = \frac{v\,d\,\rho}{\eta} > 2400$ (R: nombre de Reynolds).

- Resistència d'un fluid al moviment d'un cos:
  - Velocitats petites: resistència viscosa (capa límit).

$$F_r = 6\pi\eta a v \qquad \text{(llei de Stokes)}$$

  - Velocitats grans: resistència hidràulica.

$$F_r = K\,\frac{\rho v^2}{2}\,A$$



K_1 K_2 K_3

$$K_1 > K_2 > K_3, \qquad K_1 \sim 100 K_3$$