Examen de Física I (17-01-12).

Solución test de teoría: **código** 73-3600

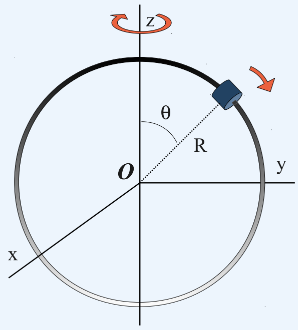
211212222112222122212221111111211222

Solución test de problemas: **código** 89-3800

121423

Problema 1

Una pequeña cuenta de collar puede deslizar por un anillo de radio R que gira con velocidad angular constante de módulo ω alrededor del eje z, contenido en el plano del anillo como muestra la figura. Si en la posición indicada el anillo se encuentra en el plano (y, z) y la cuenta desliza por el anillo con velocidad constante v, la aceleración de la cuenta respecto del sistema fijo es:



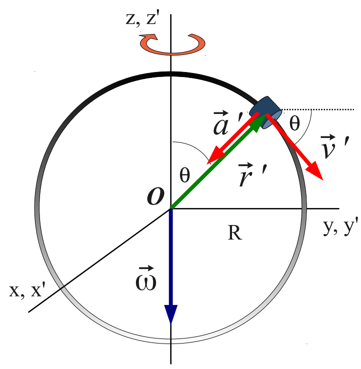
(a) $\vec{a} = 2\omega v \cos\theta\,\vec{i} - (\omega^2 R\sin\theta + (v^2/R)\sin\theta)\,\vec{j} - (v^2/R)\cos\theta\,\vec{k}$
(b) $\vec{a} = 2\omega v \cos\theta\,\vec{i} - (\omega^2 R\sin\theta - (v^2/R)\cos\theta)\,\vec{j} - (v^2/R)\cos\theta\,\vec{k}$
(c) $\vec{a} = 2\omega v \sin\theta\,\vec{i} - (\omega^2 R\cos\theta + (v^2/R)\sin\theta)\,\vec{j} - (v^2/R)\sin\theta\,\vec{k}$
(d) $\vec{a} = 2\omega v \sin\theta\,\vec{i} - (\omega^4 R\sin\theta - (v^2/R)\sin\theta)\,\vec{j} - (v^2/R)\cos\theta\,\vec{k}$
(e) $\vec{a} = 7\omega v \cos\theta\,\vec{i} - (\omega^4 R\cos\theta - (v^2/R)\sin\theta)\,\vec{j} - (v^2/R)\sin\theta\,\vec{k}$

Solución

Planteamiento
El movimiento respecto del sistema fijo es complicado, sin embargo lo puedo describir fácilmente si aplico la fórmula que relaciona la aceleración de una partícula medida respecto de un sistema fijo, $\vec{a}$, con el movimiento descrito en otro sistema con rotación uniforme respecto del fijo: $\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$ donde $\vec{a}\,'$, $\vec{v}\,'$ y $\vec{r}\,'$ son la aceleración, velocidad y posición de la partícula respecto del sistema móvil, y $\vec{\omega}$ es la velocidad de rotación (constante) del sistema móvil respecto del fijo. Tomando en este caso el anillo como sistema móvil, el movimiento de la partícula en este sistema es *Movimiento Circular Uniforme*, por lo que será fácil determinar $\vec{a}\,'$, $\vec{v}\,'$ y $\vec{r}\,'$ en este instante. Realizando luego los cálculos podremos determinar $\vec{a}$.

Tomamos un sistema móvil centrado en O y que gira con el anillo con $\vec{\omega}$ constante y hacemos que en este instante los ejes $x\,'$, $y\,'$ y $z\,'$ coincidan con x, y y z. Respecto de este sistema el movimiento de la cuenta es MCU por lo que identificamos fácilmente $\vec{a}\,'$ (la aceleración centrípeta del MCU), $\vec{v}\,'$ y $\vec{r}\,'$:

$$\vec{a}\,' = (0, -\tfrac{v^2}{R}\,\sin\theta, -\tfrac{v^2}{R}\,\cos\theta)$$
$$\vec{v}\,' = (0, v\,\cos\theta, -v\,\sin\theta)$$
$$\vec{r}\,' = (0, R\,\sin\theta, R\,\cos\theta)$$
$$\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$$



MCU respecto del anillo.

Para el movimiento respecto del sistema fijo (y para este instante) podemos calcular la aceleración mediante la expresión:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \qquad (*)$$

La aceleración $\vec{a}\,'$ ya la hemos determinado. Realizamos el resto de cálculos vectoriales:

$$2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & v\,\cos\theta & -v\,\sin\theta \end{vmatrix} = 2\omega v\,\cos\theta\,\vec{i}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & R\,\sin\theta & R\,\cos\theta \end{vmatrix} = \omega R\,\sin\theta\,\vec{i}$$

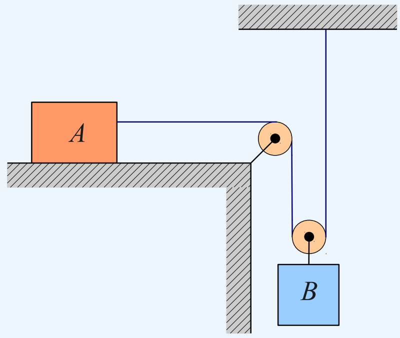
$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \omega R\,\sin\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 R\,\sin\theta\,\vec{j}$$

y sustituyendo finalmente todos los términos de la ecuación $(*)$ queda:

$$\boxed{\vec{a} = 2\omega v\,\cos\theta\,\vec{i} - (\omega^2 R\,\sin\theta + \tfrac{v^2}{R}\,\sin\theta)\,\vec{j} - \tfrac{v^2}{R}\,\cos\theta\,\vec{k}}$$

Problema 2

Un bloque de masa $m_A = 1\,\mathrm{kg}$ situado sobre una superficie horizontal está unido mediante una cuerda a otro de masa $m_B = 3\,\mathrm{kg}$ tal como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y la superficie horizontal es $\mu = 0,2$. Teniendo en cuenta que la masa de las poleas y la cuerda es despreciable, la aceleración del bloque B es:



(a) $3{,}64\,\mathrm{m}/s^2$ (b) $5{,}49\,\mathrm{m}/s^2$ (c) $1{,}96\,\mathrm{m}/s^2$ (d) $1{,}18\,\mathrm{m}/s^2$ (e) $6{,}24\,\mathrm{m}/s^2$

Solución

Planteamiento

El movimiento del cuerpo A determina el movimiento del cuerpo B y viceversa. Se trata por lo tanto de un *movimiento ligado* o *vinculado*. En estos problemas hay que plantear la segunda ley de Newton para cada partícula y encontrar la **condición de ligadura**, necesaria para resolver el sistema de ecuaciones. La condición de ligadura en un sistema de cuerda y poleas se obtiene relacionando la longitud de la cuerda, l, con la posición de cada partícula. Estableciendo luego que $l = cte$ y derivando dos veces respecto del tiempo encontramos una relación entre las aceleraciones de los cuerpos.

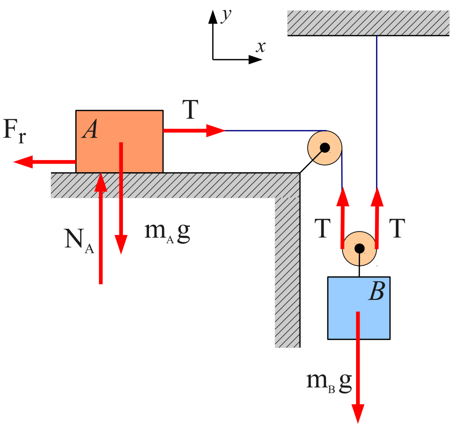
Como las poleas y la cuerda no tienen masa, la tensión de la cuerda es la misma en todos los puntos en contacto con ésta. Buscamos las fuerzas que actúan sobre cada partícula y escribimos la segunda ley de Newton:

Partícula A

$$\sum F_x = T - \mu N_A = m_A\, a_A$$
$$\sum F_y = N_A - m_A\, g = 0$$

Partícula B

$$\sum F_y = 2T - m_B\, g = m_B\, a_B$$

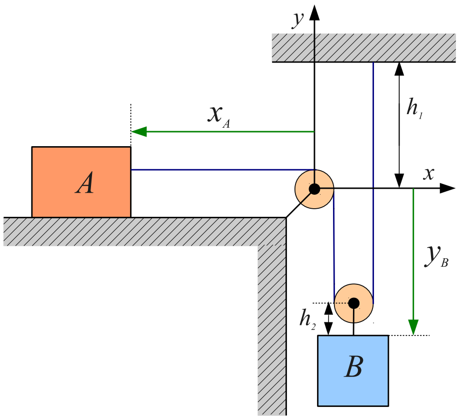


Fuerzas sobre cada partícula.

Nos queda un sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas (a_A, a_B, N_A y T). La cuarta ecuación se obtiene a partir de la condición de ligadura.

Tomando el origen del sistema de referencia en la polea fija, la longitud de la cuerda, l, en función de x_A y y_B queda:

$$l = -x_A - y_B - y_B + h_1 - 2h_2$$



Obtención de la condición de ligadura.

donde, dado que x_A y y_B son negativas en el sistema elegido, se han multiplicado por '-1' para hacerlas positivas (debemos sumar longitudes *positivas* de cuerda).

Derivando dos veces respecto del tiempo esta expresión (las constantes se anularán), encontramos una relación entre a_A y a_B:

$$0 = -a_A - 2a_B$$

Nos queda finalmente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} T - \mu\, m_A\, g &= m_A\, a_A \\ 2T - m_B\, g &= m_B\, a_B \\ a_A &= -2a_B \end{aligned}$$

donde se ha sustituido $N_A = m_A\, g$, según se deduce fácilmente del $\sum F_y$ para la partícula A.

De la primera y tercera ecuación del sistema obtenemos:

$$T = m_A\,(\mu\, g + a_A) = m_A\,(\mu\, g - 2a_B)$$

y sustituyendo en la segunda ecuación y resolviendo a_B queda:

$$a_B = g\,\frac{2\mu\, m_A - m_B}{m_B + 4m_A}$$

Sustituyendo los datos del problema queda finalmente:

$$\boxed{a_B = 3{,}64\,\mathrm{m/s^2}}$$

Problema 3

Una granada inicialmente en reposo estalla en tres pedazos m_1, m_2 y m_3, cuyas velocidades respectivas son: $\vec{v}_1 = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v}_2 = -5\vec{i} - 7\vec{j} - 8\vec{k}$ y $\vec{v}_3 = -8\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. La relación entre la masa de cada pedazo es:

(a) $m_2 = (2/3)\, m_1$ y $m_3 = (1/3)\, m_1$
(b) $m_2 = (3/2)\, m_1$ y $m_3 = 3m_1$
(c) $m_2 = (3/2)\, m_1$ y $m_3 = 5m_1$
(d) $m_2 = (17/11)\, m_1$ y $m_3 = 3m_1$
(e) Ninguna de las anteriores.

Solució

Planteamiento
La granada inicialmente, y los tres pedazos después, son un sistema de partículas aislado. La cantidad de movimiento, por lo tanto, debe mantenerse constante e igual a cero antes y después de la explosión. Imponiendo esta ley de conservación obtendremos un sistema de ecuaciones que nos permitirá resolver el problema.

Igualo a cero la cantidad de movimiento final del sistema:

$$0 = m_1\, \vec{v}_1 + m_2\, \vec{v}_2 + m_3\, \vec{v}_3$$

Desarrollando esta ecuación vectorial en componentes con los datos del problema ($\vec{v}_1 = (6, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (-5, -7, -8)$ y $\vec{v}_3 = (-8, 2, 1)$):

$$\begin{aligned} x :\to 0 &= 6\, m_1 - 5\, m_2 - 8\, m_3 \\ y :\to 0 &= 4\, m_1 - 7\, m_2 + 2\, m_3 \\ x :\to 0 &= 5\, m_1 - 8\, m_2 + 1\, m_3 \end{aligned}$$

Restando a la segunda ecuación dos veces la tercera obtenemos:

$$0 = -6\, m_1 + 9\, m_2 \quad \to \quad m_2 = \frac{6}{9}\, m_1 = \frac{2}{3}\, m_1$$

Multiplicando la primera ecuación por 8 y restándole la tercera multiplicada por 5 queda:

$$0 = 23\, m_1 - 69\, m_3 \quad \to \quad m_3 = \frac{23}{69}\, m_1 = \frac{1}{3}\, m_1$$

La solución correcta es la (a)

Problema 4

Sean A, B, y C tres puntos de un disco cuyas coordenadas en un instante dado son $A(0,0,0)$, $B(5,3,0)$ y $C(6,2,0)$ en unidades del S.I. Sabiendo que el disco realiza un movimiento en el plano (x,y) y que en este instante $v_{Ax}=4$, $v_{By}=-3$ y $v_{Cx}=16$ (en unidades del S.I.), determinar completamente el vector velocidad del punto A y la velocidad angular del disco en ese instante.

(a) $v=(4,\ -3,\ 0)$, $\omega=(0,\ 0,\ -3)$ en unidades del S.I.
(b) $v=(4,\ 27,\ 0)$, $\omega=(0,\ 0,\ -6)$ en unidades del S.I.
(c) $v=(22,\ -3,\ 0)$, $\omega=(0,\ 0,\ -6)$ en unidades del S.I.
(d) $v=(16,\ -9,\ 0)$, $\omega=(0,\ 0,\ -6)$ en unidades del S.I.
(e) $v=(16,\ 27,\ 0)$, $\omega=(0,\ 0,\ -3)$ en unidades del S.I.

Solución

Planteamiento
Este problema se puede resolver utilizando la ecuación que relaciona las velocidades de puntos de un sólido rígido (SR), $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}$. Como el movimiento tiene lugar en el plano x,y, el vector $\vec{\omega}$ sólo tiene componente z. Las incógnitas que faltan por resolver son ω, v_{Ay}, v_{Bx} y v_{Cy}, y las podremos resolver a partir de las ecuaciones vectoriales que relacionan $\vec{v}_A$ con $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$.

Relaciono $\vec{v}_B$ con $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_C$ con $\vec{v}_A$:

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}$$
$$\vec{v}_C=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\overrightarrow{AC}$$

Como A es el origen, $\overrightarrow{AB}=B=(5,3,0)$ y $\overrightarrow{AC}=C=(6,2,0)$.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones vectoriales e igualando componentes obtenemos:

$$\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \to \left.\begin{aligned} v_{Bx} &= 4-3\,\omega \\ -3 &= v_{Ay}+5\,\omega \end{aligned}\right\}$$

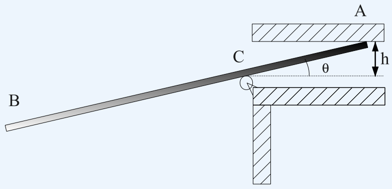
$$\begin{pmatrix} 16 \\ v_{Cx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \to \left.\begin{aligned} 16 &= 4-2\,\omega \\ v_{Cy} &= v_{Ay}+6\,\omega \end{aligned}\right\}$$

y resolviendo finalmente el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas queda:

$$v_{Bx}=22\,\mathrm{m/s},\quad v_{Ay}=27\,\mathrm{m/s},\quad \omega=-6\,\mathrm{rad/s},\ \ y\ \ v_{Cy}=-9\,\mathrm{m/s},$$

Problema 5

Una barra AB de longitud $L = 2\ m$ se apoya sobre un pequeño rodillo en C (sin rozamiento apreciable) y sobre una superficie horizontal con rozamiento en A como muestra la figura. Si en la posición indicada $h = 15\ cm$, $\theta = 15^o$ y la barra se encuentra en equilibrio, el coeficiente de rozamiento mínimo entre la barra y la superficie en A es:



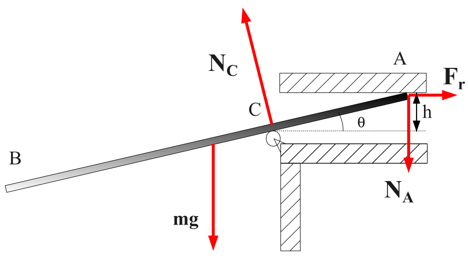
(a) 0,11 (b) 0,71 (c) 0,46 (d) 0,03 (e) 1,36

Solución

Planteamiento

Como piden el coeficiente de rozamiento mínimo, la barra está en movimiento inminente y se debe cumplir $F_r = \mu N_A$. Resolviendo las fuerzas sobre la barra, podremos obtener μ a partir de $\mu = F_r/N_A$. La normal en C la podemos obtener tomando $\sum M_A = 0$, y luego con $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ resolver N_A y F_r, lo que nos permitirá calcular μ.

Dibujamos las fuerzas que actúan sobre la barra y el diagrama de sólido libre:



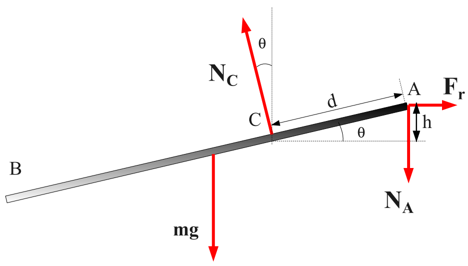


Diagrama de sólido libre

Para determinar N_C hacemos $\sum M_A = 0$:

$$\sum M_A = mg\,\frac{L}{2}\,\cos\theta - N_C\,d = 0 \;\rightarrow\; N_C = \frac{mgL\cos\theta}{2d}$$

La distancia d se puede obtener a partir de h y del ángulo θ:

$$\sin\theta = \frac{h}{d} \;\rightarrow\; d = \frac{h}{\sin\theta}$$

por lo que N_C queda:

$$N_C = mg\,\frac{L\cos\theta\sin\theta}{2h}$$

Trabajamos ahora con la suma de fuerzas para resolver N_A y F_r:

$$\sum F_x = F_r - N_C \sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad F_r = N_C \sin\theta$$
$$\sum F_y = N_C \cos\theta - mg - N_A = 0 \quad \rightarrow \quad N_A = N_C \cos\theta - mg$$

Sustituyendo el valor de N_C obtenido anteriormente nos queda:

$$F_r = N_C \sin\theta = mg\,\frac{L\cos\theta\sin^2\theta}{2h}$$
$$N_A = N_C \cos\theta - mg = mg\,\frac{L\cos^2\theta\sin\theta}{2h} - mg$$

Y finalmente determinamos μ imponiendo que $F_r = \mu N_A$ (movimiento inminente):

$$\mu = \frac{F_r}{N_A} = \frac{\cancel{mg}\,L\cos\theta\sin^2\theta}{2h}\,\frac{1}{\cancel{mg}\left(\frac{L\cos^2\theta\sin\theta}{2h} - 1\right)} = \frac{L\cos\theta\sin^2\theta}{L\cos^2\theta\sin\theta - 2h}$$

Sustituyendo los datos del problema queda:

$$\boxed{\mu = 0{,}71}$$

Problema 6

Una barra rígida uniforme y de longitud $L = 0{,}8\,\mathrm{m}$ está unida a una pared mediante una articulación sin fricción por uno de sus extremos. Se deja caer la barra desde la posición horizontal y comienza a girar respecto de la articulación, cuando el ángulo que forma la barra con la horizontal es $\theta = 30^o$ ¿qué afirmación es cierta?

(a) El momento de inercia de la barra respecto el eje de rotación es $1/12 mL^2$
(b) En ese instante la velocidad angular es $2{,}71\,\mathrm{rad/s}$
(c) En ese instante la celeridad del extremo de la barra es $3{,}4\,\mathrm{m/s}$
(d) En ese instante el centro de masa de la barra ha descendido una distancia $L/2\cos 30^o$
(e) Todas las afirmaciones anteriores son falsas

Solució

Iremos comprobando cada una de las afirmaciones del problema.

(a) El momento de inercia de la barra respecto el eje de rotación es $1/12 mL^2$

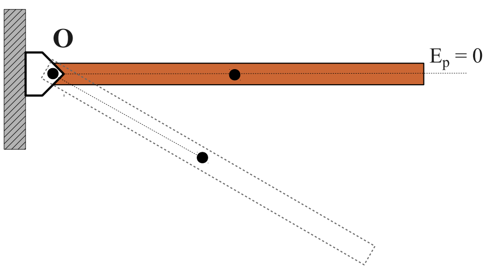
Calculamos el momento de inercia de la barra respecto de un extremo aplicando el Teorema de Steiner.

$$I_O = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}mL^2$$

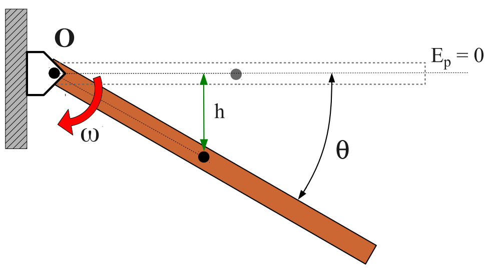
Falso

(b) En ese instante la velocidad angular es $2{,}71\,\mathrm{rad/s}$

Podemos calcular la velocidad angular de la barra por conservación de la energía entre los instantes inicial (situación 1) y final (situación 2):



Situación inicial (1)



Situación final (2)

Tomando origen de energía potencial gravitatoria en la posición inicial ($\theta = 0^o$) y dado que parte del reposo (energía cinética inicial nula), la energía mecánica total es nula. Igualando $E_2 = 0$ obtenemos:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_0\,\omega^2 - mgh = 0 \;\rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_O}}$$

Sustituyendo el momento de inercia calculado en el apartado (a), y teniendo en cuenta que $h = (L/2)\sin\theta$ obtenemos finalmente:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta}{\cancel{2}\frac{1}{3}\cancel{m}L^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}} = 4{,}29\,\mathrm{rad/s}$$

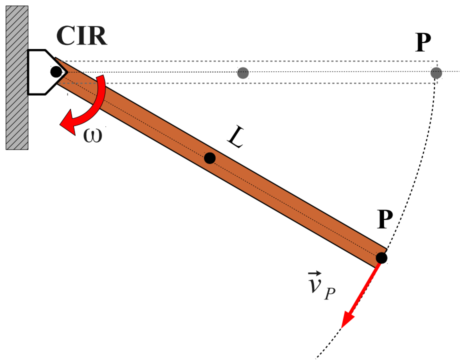
Falso

(c) En ese instante la celeridad del extremo de la barra es $3{,}4\,\mathrm{m/s}$

La velocidad del extremo P de la barra se puede obtener por cinemática del sólido. Como el CIR está en O, y dado que para todo punto del sólido $v = \omega\, d$ (siendo d la distancia al CIR):

$$v_P = \omega\, L = 3{,}429\,\mathrm{m/s}$$

Cierto



(d) En ese instante el centro de masa de la barra ha descendido una distancia $L/2\cos 30^o$

El centro de masa ha descendido una distancia $h = (L/2)\sin\theta$.

Falso