Examen de Física I (13-04-12).

Solución test de teoría: **código** 96-2450

221111111221212211121212

Solución test de problemas: **código** 18-2250

322534

Ejercicio 1.1

Dados tres puntos del espacio: $A(1,0,0)$, $B(2,2,0)$ y $C(0,1,b)$, el valor del parámetro b para que el vector $\vec{N} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ sea perpendicular al plano que contiene el triángulo cuyos vértices son A, B y C, es:

(a) $b = 1$ (b) $b = 2$ (c) $b = 3$ (d) $b = 4$ (e) $b = 5$

Solución

Busco dos vectores que forman en triángulo cuyos vértices son A, B y C:

$$\vec{v}_1 = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1,2,0)$$
$$\vec{v}_2 = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (-1,1,b)$$

Ahora obtengo la dirección de los vectores perpendiculares al plano que contiene estos dos vectores mediante el producto vectorial:

$$\vec{N} = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b\,\vec{i} - b\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

Vemos que esta expresión de $\vec{N}$ coincide con el vector dado en el enunciado para $b = 2$

Solución: b=2 (b)

Ejercicio 1.2

Apuntamos con un rifle directamente a un objeto situado a $D = 50$ m de distancia y a $H = 2$ m por encima de la horizontal del arma. Tras el disparo observamos que la bala impacta a una distancia $d = 80$ cm por debajo del blanco. La velocidad inicial de la bala es:

(a) $88{,}9$ m/s (b) $123{,}8$ m/s (c) $46{,}9$ m/s (d) $204{,}8$ m/s (e) $467{,}9$ m/s

Solución

Podemos calcular el ángulo con el que se dispara respecto de la horizontal a partir de los datos del problema:

$$\tan(\theta) = \frac{H}{D} = 0{,}04$$
$$\theta = 2{,}29^o$$

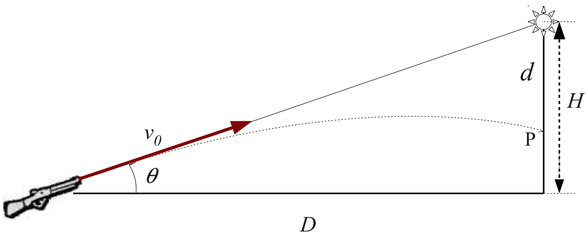


Figura 1: Esquema del movimiento.

Utilizando ahora las ecuaciones del movimiento parabólico y exigiendo que el disparo impacta en el punto P, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} D &= v_0 \cos\theta \; t \\ (H-d) &= v_0 \sin\theta \; t - \tfrac{g}{2} t^2 \end{aligned}\right\}$$

Despejando el tiempo de la primera ecuación $\left(t = \frac{D}{v_0 \cos\theta}\right)$ y sustituyendo en la segunda queda:

$$(H-d) = \cancel{v_0} \sin\theta \frac{D}{\cancel{v_0} \cos\theta} - \frac{g}{2} \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2\theta} \longrightarrow \cos^2\theta \; (H-d) = D \sin\theta \cos\theta - \frac{g}{2} \frac{D^2}{v_0^2}$$

de donde obtenemos para v_0:

$$v_0^2 = \frac{gD^2}{2} \left[\frac{1}{D \sin\theta \cos\theta - (H-d)\cos^2\theta} \right]$$

Sustituyendo los valores numéricos del problema y realizando la raíz cuadrada nos queda finalmente:

$$v_0 = 123{,}84 \text{ m/s}, \quad \text{solución (b)}$$

Ejercicio 1.3

Un tiovivo gira con velocidad angular constante de $12\ \mathrm{rev/min}$. Una persona que se encuentra a $3\ \mathrm{m}$ del eje de rotación deja caer una moneda. El ángulo con respecto a la vertical que forma la aceleración inicial que la persona mide para la moneda es: (tomar $g = 9{,}80\ \mathrm{m/s}$)

(a) 18.6º (b) 37.1º (c) 25.8º (d) 12.1º (e) 30.4º

Solución

La persona se encuentra en un sistema de referencia en rotación uniforme (el tiovivo), por lo que la aceleración que medirá ($\vec{a}\,'$) viene dada por la expresión:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

donde $\vec{a}$ es la aceleración medida desde el sistema fijo (el suelo), $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sistema móvil respecto del fijo, $\vec{v}\,'$ es la velocidad de la partícula medida respecto del sistema móvil y $\vec{r}\,'$ es la posición de la partícula en el sistema móvil. Se ha supuesto asimismo que en el instante estudiado coinciden ambos sistemas de referencia y la moneda se encuentra sobre el eje y (consultar la teoría para más detalles).

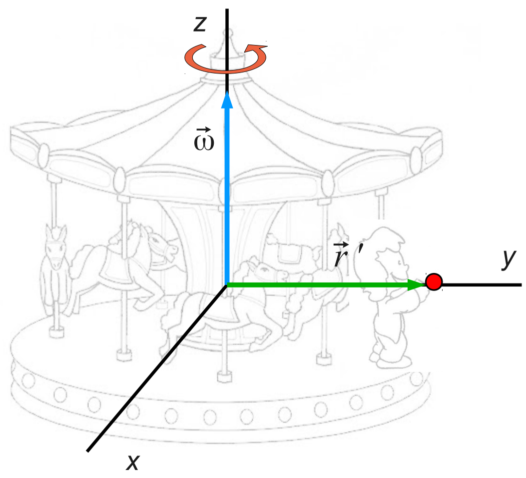


Figura 2: Sistemas de referencia móvil y fijo

En este caso, como piden la aceleración en el instante en que se suelta la moneda, $\vec{v}\,' = 0$ y sólo tendremos que tener en cuenta $\vec{a}$ (que es igual a la aceleración de la gravedad) y la aceleración centrífuga $\vec{a}_{cf} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Desarrollando el doble producto vectorial, vemos que $(\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$ está dirigido a lo largo del eje x hacia x negativas. La aceleración centrífuga $(-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'))$ es por lo tanto paralela al eje y y alejándose del eje de rotación.

El módulo de la aceleración centrífuga es:

$$|\vec{a}_{cf}| = |\vec{\omega}|\,|\vec{\omega} \times \vec{r}\,'|$$
$$|\vec{a}_{cf}| = \omega\,\omega\,r' = \omega^2 R$$

ya que todos los vectores forman entre sí 90^0 (ver que corresponde con la conocida fórmula de la aceleración centrífuga en un problema de MCU).

El ángulo que formará con la vertical la aceleración $\vec{a}\,' = \vec{g} + \vec{a}_{cf}$, que medirá el observador desde el tiovivo, es por lo tanto:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\omega^2 R}{g}}$$

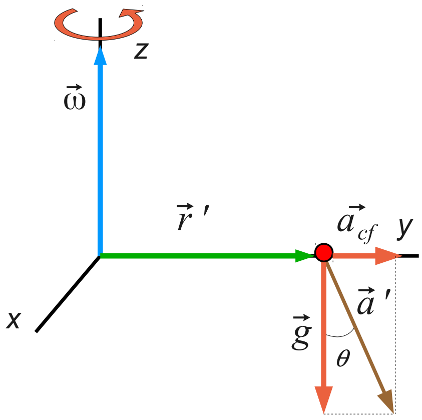


Figura 3: Aceleraciones de la moneda.

Sustituyendo los valores numéricos del problema obtenemos:

$$\boxed{\tan\theta = 0{,}483 \;\longrightarrow\; \theta = 25{,}8^o, \text{ opción (c)}}$$

Ejercicio 1.4

Una persona puede subir por una escalera mecánica de longitud L, que se encuentra parada, en $t_1 = 3{,}1\,\mathrm{s}$. Cuando la escalera está en funcionamiento, es capaz de subir a la persona (parada sobre ella) en $t_2 = 5{,}0\,\mathrm{s}$. ¿Cuánto tiempo emplearía la persona en subir si camina por la escalera en movimiento?

(a) $0{,}9\,\mathrm{s}$ (b) $3{,}1\,\mathrm{s}$ (c) $2{,}6\,\mathrm{s}$ (d) $4{,}0\,\mathrm{s}$ (e) $1{,}9\,\mathrm{s}$

Solución

En los tres casos se trata de un movimiento rectilíneo uniforme en el que se recorre la distancia L. Si v_1 es la velocidad del hombre caminando y v_2 es la velocidad de la escalera, Se debe cumplir:

$$L = v_1 t_1$$
$$L = v_2 t_2$$

Cuando el hombre sube caminando sobre la escalera en marcha, su velocidad absoluta será $(v_1 + v_2)$ y por lo tanto se cumple:

$$L = (v_1 + v_2)\, t_3$$

siendo t_3 el tiempo que queremos determinar. De esta última ecuación vemos que:

$$t_3 = \frac{L}{v_1 + v_2} \longrightarrow \frac{1}{t_3} = \frac{v_1}{L} + \frac{v_2}{L}$$

El último término de esta expresión $(\frac{v_1}{L} + \frac{v_2}{L})$ se puede obtener fácilmente a partir de las dos primeras ecuaciones:

$$L = v_1 t_1 \longrightarrow \frac{v_1}{L} = \frac{1}{t_1}$$
$$L = v_2 t_2 \longrightarrow \frac{v_2}{L} = \frac{1}{t_2}$$

por lo que queda para t_3:

$$\frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \longrightarrow t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$$

Sustituyendo los datos del problema obtenemos:

$t_3 = 1{,}9$ s. Respuesta (e)

Ejercicio 1.5

Un cuerpo de masa $m = 2$ kg se sujeta a uno de los extremos de una cuerda que pasa por un pequeño orificio practicado en una mesa horizontal sin rozamiento sobre la que se apoya el cuerpo. Inicialmente el cuerpo describe un movimiento circular de radio $r_0 = 0{,}3\,\mathrm{m}$ con velocidad $v_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}/s$. Al tirar lentamente de la cuerda hasta que el radio de la circunferencia se reduce a la tercera parte del valor inicial, es cierto que:

(a) La velocidad final es $v_f = 5{,}9\,\mathrm{m}/s$
(b) La tensión de la cuerda final es $T = 301\,\mathrm{N}$
(c) El trabajo realizado desde el movimiento inicial hasta el final es $18\,\mathrm{J}$
(d) La tensión de la cuerda inicial es $T = 505\,\mathrm{N}$
(e) Ninguna de las anteriores

Solución

Vamos a ir calculando las diferentes afirmaciones que se hacen en el problema para determinar si son ciertas o falsas.

(a) ¿La velocidad final es $v_f = 5{,}9\,\mathrm{m}/s$?

Calculamos la velocidad final por conservación del momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$) respecto del orificio practicado en la mesa, ya que la fuerza que ejerce la cuerda es central y $\vec{L}_0$ se conserva.

$$L_0 = L_f \rightarrow \cancel{m} r_0 v_0 = \cancel{m} r_f v_f \rightarrow v_f = v_0 \frac{r_0}{r_f}$$

Y como $r_f = \frac{r_0}{3}$:

$$v_f = v_0 \frac{\cancel{r_0}}{\cancel{r_0}/3} \rightarrow v_f = 3v_0 = 4{,}5\ \mathrm{m/s}$$

Falso.

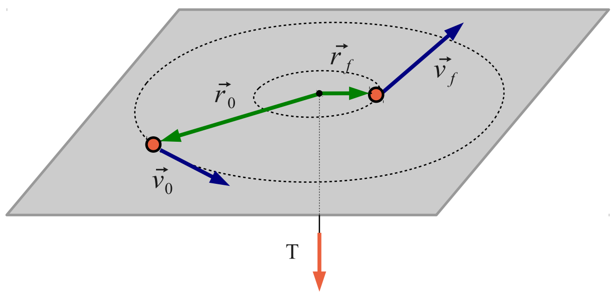


Figura 4: Esquema del movimiento.

(b) ¿La tensión de la cuerda final es $T = 301\,\mathrm{N}$?

Aplicando la segunda ley de Newton en la situación final, a lo largo de la componente radial del MCU que realiza la partícula (ver figura 2):

$$\sum F_{rad} = T = ma_{cp} = m\frac{v_f^2}{r_f}$$

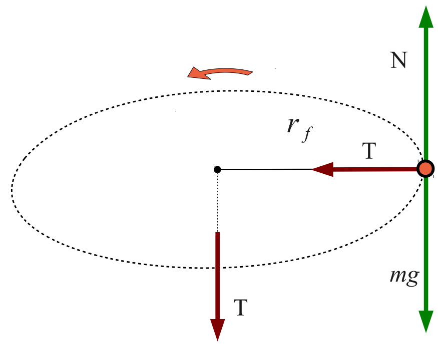


Figura 5: Fuerzas en la situación final.

Sustituyendo r_f por $r_0/3$ y v_f por $3v_0$, obtenemos:

$$T = m\frac{(3v_0)^2}{r_0/3} \longrightarrow T = 27m\frac{v_0^2}{r_0} = 405 \text{ N}$$

Falso.

(c) ¿El trabajo realizado desde el movimiento inicial hasta el final es $18\,\text{J}$?

La única fuerza que realiza trabajo al pasar de la situación inicial a la final es la tensión de la cuerda. Podemos calcular el trabajo realizado por esta fuerza mediante el incremento de la energía cinética:

$$W = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$$

Sustituyendo todos los valores, ya conocidos, obtenemos $W = 18$ J, por lo que esta es la respuesta correcta.

Cierto.

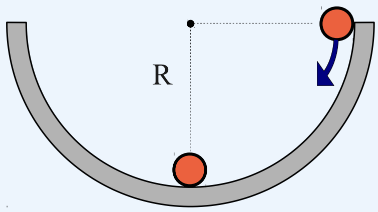
(d) ¿La tensión de la cuerda inicial es $T = 505\,\text{N}$?

En la situación inicial el movimiento de la partícula tiene un radio mayor y una velocidad menor que en la situación final. Es claro, por tanto, que en el cálculo de la tensión (de forma análoga al apartado (b)) deberíamos obtener un valor menor de 405 N.

Falso.

Ejercicio 1.6

Una partícula de masa $m = 4\,\mathrm{kg}$ se deja deslizar desde una altura R por la superficie interior lisa de una semiesfera vacía de radio R. El valor de la fuerza que la semiesfera ejerce sobre la partícula cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria es:



(a) $6g$ N (b) $9g$ N (c) $12g$ N (d) $15g$ N (e) Ninguna de las anteriores

Solución

La partícula realizará un movimiento circular, por lo que en la posición más baja (posición 2) se debe cumplir en la dirección radial:

$$\sum F_{rad} = ma_{cp} = m\frac{v_2^2}{R}$$
$$N - mg = m\frac{v_2^2}{R}$$

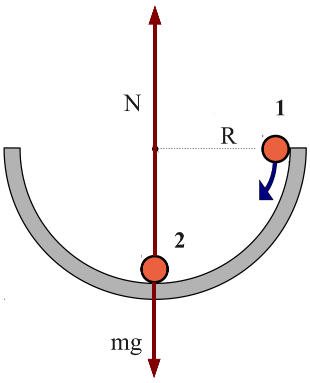


Figura 6: Fuerzas sobre la partícula.

Además la partícula parte del reposo y se conserva la energía durante el movimiento, por lo que la velocidad en el punto más bajo es (tomando $E_p = 0$ en la posición inicial, 1):

$$E_1 = E_2 \longrightarrow 0 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 - \cancel{m}gR \longrightarrow v_2^2 = 2gR$$

Utilizando este valor en el sumatorio de fuerzas, encontramos para la fuerza normal:

$$N - mg = m\frac{2g\cancel{R}}{\cancel{R}} \longrightarrow N = 3mg$$

Sustituyendo los datos del problema obtenemos para N:

$N = 12\ g$. Respuesta (c)