Disco de Maxwell
Dinámica de la rotación

Objetivo

Estudiar las ecuaciones de la dinámica de rotación del sólido rígido mediante el movimiento de un disco homogéneo.

Material

Soporte con regla, soporte y disco de acero, disparador magnético, cronómetro detector de paso (puerta fotoeléctrica).

Fundamento teórico

Las leyes fundamentales de la dinámica, aplicadas a un sólido rígido, permiten obtener las ecuaciones para el estudio del movimiento, que podemos expresar de la forma:

$$\sum \vec{F} = M\,\vec{a} \tag{1}$$

$$\sum \vec{M}_O = I_O\,\vec{\alpha}, \tag{2}$$

donde el punto O (para el cálculo de los momentos de fuerza, $\vec{M}_O$, y del momento de inercia, I_O) puede ser un punto fijo o el centro de masa del sólido.

Podemos aplicar estas ecuaciones al caso representado en la figura 1. Un disco homogéneo de radio R y masa M que se mueve bajo la acción de su propio peso sujeto mediante una cuerda enrollada en un pequeño saliente de radio r y masa despreciable (figura 1). Las ecuaciones (1) y (2), desarrolladas para este caso, quedan expresadas de la forma:

$$\sum F_y = Mg - T = M\,a \tag{3}$$

$$\sum M_{CM} = T\,r = \frac{1}{2}MR^2\,\alpha, \tag{4}$$

donde la suma de momentos se ha realizado respecto del centro de masa, y se ha tomado un sistema de referencia con el eje y positivo hacia abajo y el eje z (para momentos) positivo saliendo del papel.

Existe además una relación cinemática entre la aceleración angular del cilindro y su aceleración lineal. Teniendo en cuenta que el punto donde la cuerda se separa del saliente de radio r es el CIR del movimiento, tenemos que:

$$a = \alpha\, r \tag{5}$$

La resolución de las ecuaciones (3) (4) y (5), permite obtener la aceleración con la que bajará el centro de masa del cilindro, que viene dada por:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} \tag{6}$$

Puesto que el movimiento del centro de masa es uniformemente acelerado y parte del reposo, la altura descendida h y la velocidad v en función del tiempo t podrán expresarse de la forma:

$$h = \frac{1}{2}at^2 \tag{7}$$
$$v = a\, t \tag{8}$$

La energía mecánica durante este movimiento también debe permanecer constante. Esto se debe a que las fuerzas de rozamiento, que actúan entre la cuerda y el eje donde está enrollada, no realizan trabajo. De esta manera tendremos que, si parte del reposo:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2 - Mgh = 0, \tag{9}$$

desarrollando esta ecuación para el caso del movimiento estudiado, y teniendo en cuenta que $v = \omega r$, la velocidad en función de la distancia que desciende el cilindro vendrá dada por:

$$v^2 = \frac{g\,h}{\frac{R^2}{4r^2} + \frac{1}{2}} \tag{10}$$

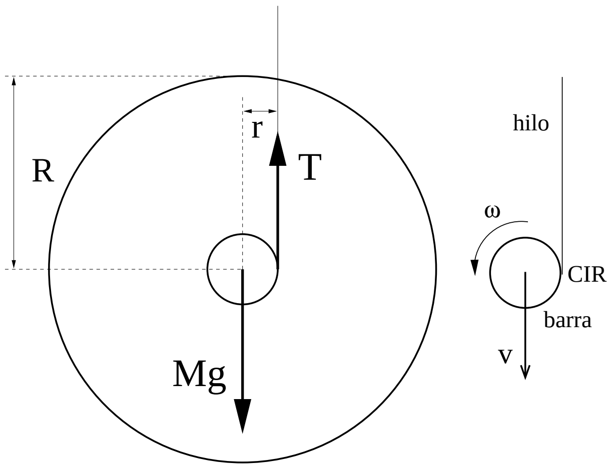

Figura 1: Diagrama de fuerzas sobre el disco y detalle de la condición de rodadura

Método experimental

Para reproducir experimentalmente la situación discutida en el fundamento teórico disponemos del montaje mostrado en la figura 2.

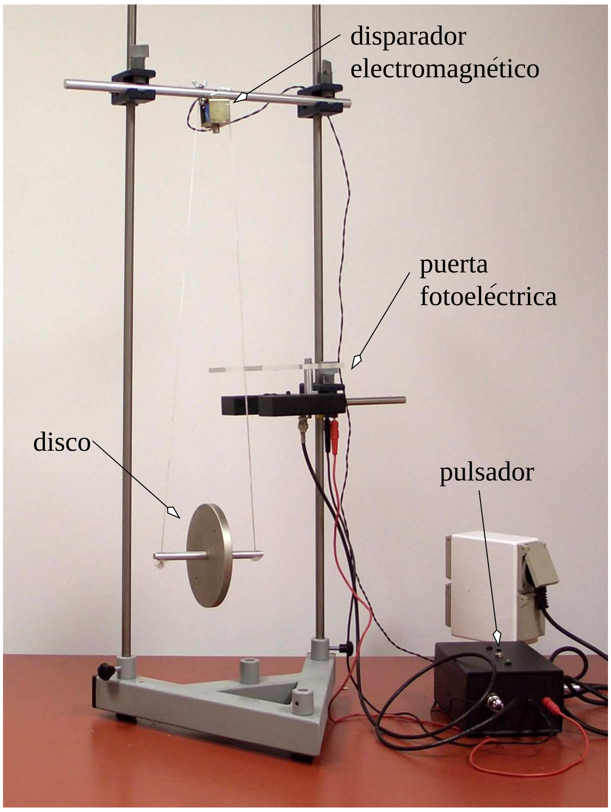

Figura 2: Dispositivo experimental

Mide primero el diámetro d de la tapa de teflón que será detectado por la puerta, el radio del disco de acero R y su masa M con la báscula del laboratorio. Para la determinación del radio r que genera el momento de la tensión T (ecuación (4)), tendrás que tener en cuenta el radio de la barra de aluminio y el radio de la cuerda, que no es despreciable (r = radio de la barra + radio de la cuerda). Mide ambos radios y anota el valor de r.

Coloca a continuación la puerta fotoeléctrica unos 15cm por debajo del disparador electromagnético. Vigila que la tapa de teflón pase por la zona de detección sin chocar contra la puerta durante el movimiento. Haz girar con la mano el disco de acero (cogiéndolo por las barras de aluminio) de forma que la cuerda se enrolle en las dos barras. Has de vigilar que la cuerda no cabalgue sobre si misma mientras la enrollas. Cuando la periferia del disco toque con el disparador electromagnético, aprieta el pulsador para fijar el disco en esta posición. Mide con precisión la distancia h entre la parte inferior de la tapa de teflón y la célula fotoeléctrica y a continuación deja que se inicie el movimiento liberando el pulsador (recuerda siempre apretar el botón ’reset’ de la puerta antes de soltar el pulsador).

Procediendo de la manera descrita mide el tiempo t que tarda el disco en recorrer la distancia h (posición 3 del interruptor de la puerta) y el Δt que tarda en pasar la tapa de teflón por la célula fotoeléctrica (posición 2 del interruptor de la puerta). La medida de Δt nos permitirá determinar la velocidad del disco en esa posición, dada por $v = d/\Delta t$.

Repite todo el proceso aumentando la distancia h gradualmente de 4 en 4cm hasta unos 40cm.

Resultados

1. Indica los valores medidos de d, R, M y r.
2. Construye una tabla indicando para cada posición el valor de h, t, Δt, t^2 y v.
3. Representa gráficamente h en función de t^2 y v en función de t.
4. A partir de las rectas de regresión de estas gráficas determina el valor de la aceleración y compárala con el valor predicho teóricamente por la ecuación (6). Comenta los resultados obtenidos.
5. Calcula la velocidad teórica (ecuación (10) que debería tener el disco en cada posición y comparala con los valores medidos experimentalmente. Comenta los resultados obtenidos.

Cuestiones

1. Resuelve el sistema de ecuaciones (3), (4) y (5) y deduce la ecuación (6)

Problema

1. Un disco de masa M=2kg y radio R=20cm, tiene una cuerda enrollada en un pequeño resalte de radio r=5cm. Del otro extremo de la cuerda pende un cuerpo de masa m=1kg a través de una polea de masa despreciable como muestra la figura. Si en esta situación el disco rueda sobre la superficie horizontal sin deslizar, se pide:

   a) Describe cualitativamente el movimiento del sistema.

   b) Dibuja el diagrama de sólido libre del disco y del bloque.

   c) Escribe el sistema de ecuaciones que te permiten calcular la aceleración angular del cilindro, la aceleración del bloque B, la tensión en la cuerda y la fuerza de rozamiento entre el plano y el cilindro.

   d) Resuelve el sistema anterior y calcula α, a, T y F_r.

   e) Determina el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para que el cilindro ruede sin deslizar.

   Analizando ahora el problema desde un punto de vista energético:

   f) Discute qué fuerzas realizan trabajo durante el movimiento y como podrías evaluarlo.

   g) Determina la velocidad y la energía cinética del cilindro y el bloque cuando este ha descendido 1m.

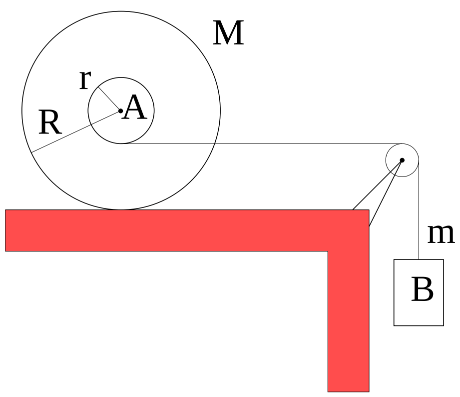

Figura 3: Problema 1