E.T.S. I. I. T

Departamento de Física e Ingeniería Nuclear

Mecánica de Fluidos

1 Estática de fluidos

2 Dinámica de fluidos

Prof. J. Martín

ESTÁTICA DE FLUIDOS

Propiedades fundamentales de los fluidos

- "Un *fluido ideal* (líquido o gas) *no* requieren trabajo exterior alguno para las variaciones de forma (geometría) a volumen constante"
- "No existen fuerzas internas que se opongan a esfuerzos tangenciales ni de tracción".
- "En el seno de un fluido *en equilibrio*, sólo existen *esfuerzos de compresión*".

Fuerzas sobre un fluido

Definición. Las fuerzas que actúan sobre la masa de un fluido se denominan *fuerzas másicas*.

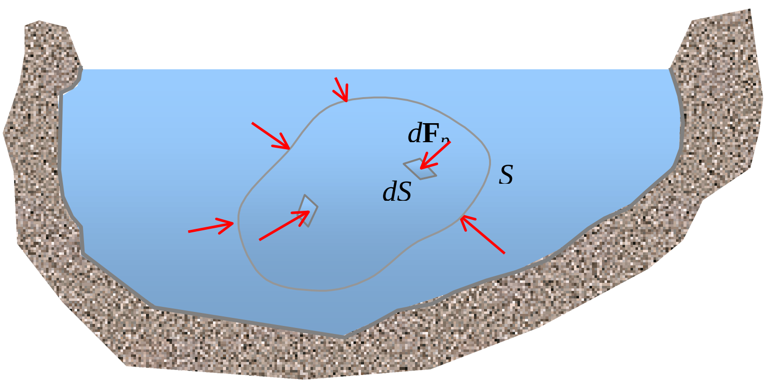
- *Densidad de fuerza másica*. Es la fuerza por unidad de volumen $\mathbf{f} = \frac{d\,\mathbf{F}}{d\,v}$
- *Intensidad de fuerza másica* Es la fuerza por unidad de masa $\frac{d\,\mathbf{F}}{d\,m}$

Caso particular. Si la única fuerza externa que actúa sobre un líquido es la de su peso, se tiene que $d\,\mathbf{P} = dm\,\mathbf{g}$, y si ρ es su densidad $dm = \rho\ d\,v$. Sustituyendo queda que la densidad de fuerza de la gravedad es

$$\boxed{\mathbf{f}_g = \rho\,\mathbf{g}} \qquad (1)$$

Presión hidrostática

- En un líquido en *equilibrio*, sobre una *superficie cerrada* cualquiera *S* que delimita una parte del fluido, el resto del fluido ejerce fuerzas *normales* a *S* en cada uno de sus elementos de área *dA* . Al diferencial de área se le denominara *punto* de la superficie.



- *Definición*. Se denomina presión *p* en un *punto* al cociente $p = \frac{dF_p}{dS}$
- La presión en un *punto* es función de las coordenadas de dicho punto (x, y, z) e independiente de la orientación de *dS*

La fuerza de presión en dS está dada por $d\,\mathbf{F}_p = -\,p\,dS\,\mathbf{n}$, donde **n** es el vector normal unitario a la superficie en cada punto.

La fuerza total de presión para toda la superficie S es

$$\mathbf{F}_p = \int_S d\,\mathbf{F}_p = -\int_S p\,dS\,\mathbf{n} = -\int_S p\,d\mathbf{S} \qquad (2)$$

Nota: Se llama *gradiente* de una función escalar $f\,(x, y, z)$ a la expresión vectorial

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \text{simbólicamente} \qquad \nabla f$$

Nota: *Teorema de gradiente*: En toda superficie cerrada S que delimita un volumen V se cumple:

$$\int_S f\,d\,\mathbf{S} = \int_V \nabla f\,dv$$

Aplicado a la ecuación (2) se tiene $\mathbf{F}_p = -\int_V \nabla p\;d\,v \qquad (3)$

Escribiendo (3) en forma diferencial $\dfrac{d\,\mathbf{F}_p}{d\,v} = -\,\nabla\,p \qquad (4)$

Pero el primer término de la ecuación (4) es la densidad de fuerzas másicas de presión, luego

$$\mathbf{f}_p = -\,\nabla\,p \qquad (5)$$

Condición de equilibrio hidrostático

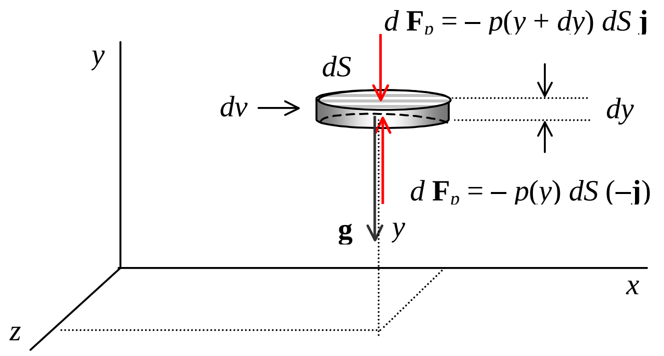
Para un líquido sometido *únicamente* a su propio *peso*, *homogéneo* ρ = constante, e *incomprensible*, ρ no depende de p.

Un volumen elemental dv, que contiene una masa $dm = \rho\,dv$ está en equilibrio cuando la *densidad de fuerza total* que actúan sobre él es cero.

$$\mathbf{f}_p + \mathbf{f}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_p + \rho\,\mathbf{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\,\nabla\,p + \rho\,\mathbf{g} = 0 \qquad (6)$$

Calculemos directamente la $\mathbf{f}_p$ para un elemento de volumen en forma de disco de espesor diferencial, representado en el siguiente esquema, posicionado respecto del sistema de coordenadas indicado tal que el plano x-z es paralelo a la superficie libre del líquido.

Las fuerzas de presión y la gravedad son las indicadas . La presión en cada punto solo depende de la coordenada y del punto.



El valor de $\mathbf{f}_p$ está dado por

$$\mathbf{f}_p = \frac{[-p(y+dy) + p(y)]\,dS}{dS\;dy}\,\mathbf{j} = -\frac{dp}{dy}\,\mathbf{j}$$

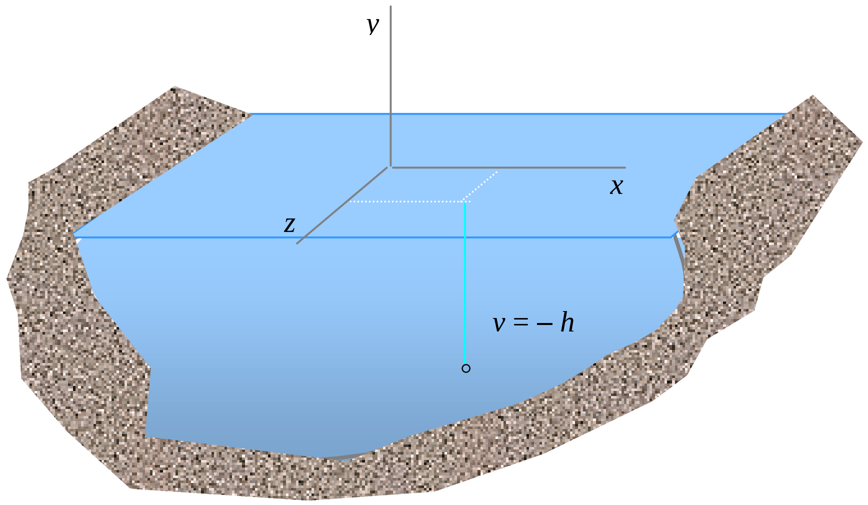
Sustituyendo en la ecuación (6) queda

$$\mathbf{f}_p + \rho\,\mathbf{g} = -\frac{dp}{dy}\,\mathbf{j} - \rho\,g\,\mathbf{j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dp}{dy} + \rho\,g = 0 \qquad (7)$$

Integrando la ecuación (7) se tiene

$$\boxed{p = -\rho\,g\,y + p_0} \qquad (8)$$

donde p_0 es la presión en el origen de coordenadas. Tomando el origen de coordenadas en la superficie libre del líquido, la presión en el origen es ahora la presión atmosférica p_a.



La presión en un punto a una profundidad h es

$$\boxed{p = p_a + \rho\,g\,h} \qquad (9)$$

Consecuencias

De la ecuación (8) $p = -\rho g y + p_0$ se deduce que :

- Todos los puntos de una misma superficie horizontal S (y = *cte.*) tienen la misma presión

- La presión disminuye a medida que la y aumenta

- *Principio de Pascal* La expresión de la diferencia de presiones entre los dos puntos de un líquido

$$p_1 - p_2 = \rho \; g \,(y_2 - y_1)$$

implica que *los cambios de presión en un punto se transmiten íntegramente a todos los puntos del fluido*.

Fuerza sobre una superficie plana sumergida

Ahora $\nabla p + \lambda g \vec{j} \Rightarrow dp = \lambda g dy$

Superficie $S = ab$ formando un ángulo β con la horizontal.

La presión en todos los puntos de un elemento de superficie lineal de longitud b, cuya área es $ds = b\, dl$, situado a una profundidad y, está dada por $p = \lambda g\, y$.

Si $\vec{n}$ es el vector unitario normal a ds, se tiene $d\vec{s} = ds\vec{n}$.

La fuerza sobre $d\vec{s}$ es $d\vec{F} = -pd\vec{s} = pds(-\vec{n})$

El módulo de $d\vec{F}$ es $dF = pds = \lambda gbydl$

De la figura $dy = \omega\,\beta\, dl \;;\;\; y_2 - y_1 = b\,\omega\,\beta \;;\;\; y_2 = y_1 + b\,\omega\beta$

Sustituyendo $dF = \dfrac{\lambda g b}{\omega\beta} ydy$

Integrando $F = \left(\dfrac{\lambda g b}{2\omega\beta} \right) (y_2^2 - y_1^2)$

En función del área $F = \dfrac{1}{2} \lambda g\, S\,(2 y_1 + b\,\omega\beta)$

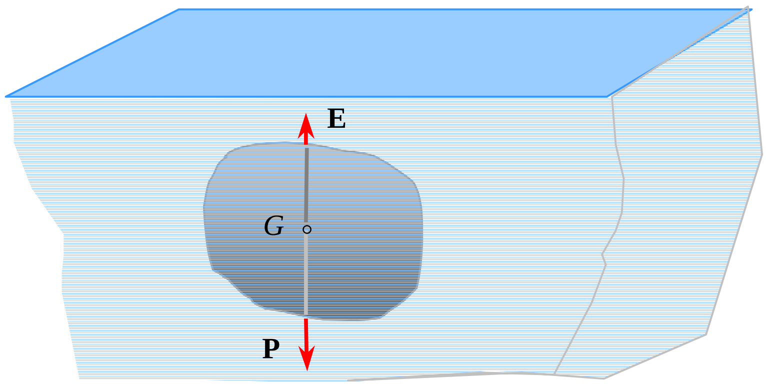
Coordenada $\bar{y}$ del punto de aplicación F.

$$\bar{y} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} ydF}{F} = \frac{2}{3}(y_1 + y_2 - \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2})$$

Fuerza sobre cuerpos sumergidos

Consideremos sólidos homogéneos , ρ = cte.

Principio de Arquímedes Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta una fuerza ascendente, *empuje*, igual al peso del volumen de líquido desalojado.



Si V es el volumen del cuerpo y ρ' la densidad del líquido, el empuje es

$$E = \rho' \, g \, V$$

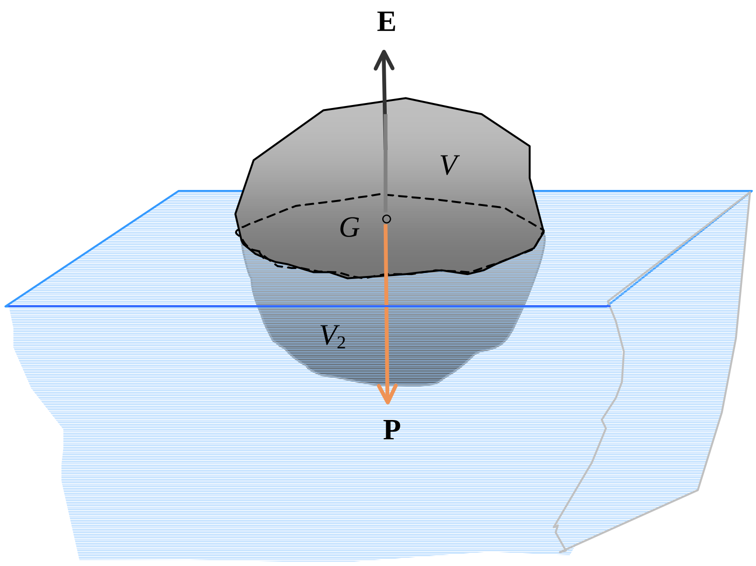
Si ρ es la densidad del cuerpo, la fuerza neta es

$$F = (\rho' - \rho) \, g \, V$$

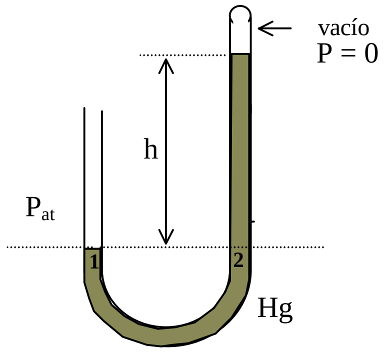
Si ρ' es menor que ρ , el cuerpo desciende hasta el fondo

Condición de flotación

Si ρ' es mayor que ρ , el cuerpo asciende hasta la superficie y flota manteniéndose en equilibrio. Se cumple $\rho' V_2 = \rho V$.



Problema 1 En la figura adjunta se representa un barómetro de tubo en U para medir la presión atmosférica. La densidad del mercurio es $13,6 \times 10^3$ kg/m^3. Determinar la altura de la columna de mercurio en el barómetro si la presión es 1 atm = 101325 Pa . (1 Pascal = 1 N / m^2)



Solución

Las presiones en los puntos 1 y 2 de la misma superficie horizontal son iguales

$$P_{at} = \rho_{Hg}\ g\ h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{P_{at}}{\rho_{H_g}\ g} \cong 760 \text{ mm}$$

En la práctica, la presión se mide en milímetros de mercurio (unidad que se llama **torr)**

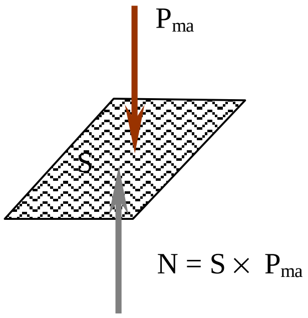
$$1 \text{ mmHg} = 1 \text{ torr} = 133,3 \text{ Pa}$$

Presión manométrica. La diferencia entre la tresión P que existe en un recinto y la presión atmosférica se denomina presión manométrica

$$P_{ma} = P - P_{at}$$

Problema 2 Las cuatro ruedas de un coche de 1200 kg están infladas a una presión manométrica de 220 kPa . Determinar el área de contacto de cada rueda con el suelo suponiendo que soportan el peso por igual.

Solución



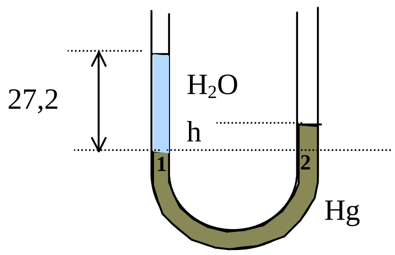
$$4\ N = Peso \quad \Rightarrow \quad S = \frac{m\ g}{4 P_{ma}} = 133 \text{ cm}^2$$

Problema 3 Un tubo en forma de U se llena parcialmente con mercurio cuya densidad es 13,6 g/cm^3. Por una de sus ramas se vierte agua, densidad es 1,0 g/cm^3 , hasta que alcanza una altura de 27,2 cm. Determinar : a) el desnivel del mercurio. A continuación se vierte aceite por la otra rama hasta conseguir nivelar las superficies del mercurio en ambas ramas. Determinar: b) la densidad del aceite

.

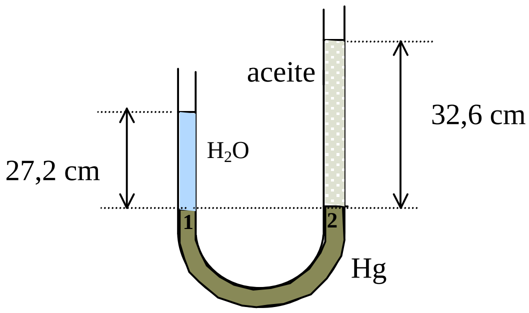
Solución

a) Las presiones en los puntos 1 y 2 de la misma superficie horizontal son iguales



De la ecuación (9) se tiene $h = \dfrac{h_a\,\rho_a}{\rho_{H_g}} = 2 \text{ cm}$

***b*)** Las presiones en los puntos 1 y 2 de la misma superficie horizontal son iguales



De la ecuación (9) se tiene $\rho_{ac} = \dfrac{h_a\,\rho_a}{h_{ac}} = 0{,}83 \text{ g/cm}^3$

DINÁMICA DE FLUIDOS

Sistema físico

Fluidos ideales en movimiento. No existen esfuerzos cortantes en el movimiento del fluido. Los fluidos reales tienen viscosidad lo que produce esfuerzos tangenciales entre capas de fluido en movimiento.

Magnitudes físicas del sistema

Densidad del fluido $\Rightarrow$ ρ que puede ser función de posición y del tiempo

Velocidad de una partícula del fluido $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ que puede ser función de posición y del tiempo

Punto del fluido $\Rightarrow$ elemento de volumen dV que contiene una masa tal que $dm = \rho\, dV$

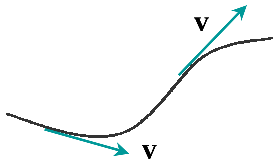
Caracterización del movimiento

Estacionario $\Rightarrow$ El valor de las magnitudes físicas del sistema no depende del tiempo.

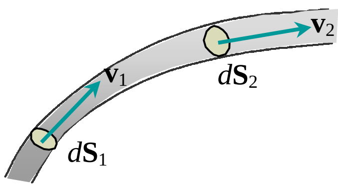
Régimen laminar $\Rightarrow$ Las trayectorias de las partículas del fluido no se cortan

Conceptos

Línea de corriente $\Rightarrow$ Trayectoria descrita por una partícula del fluido



Tubo de corriente $\Rightarrow$ Porción de líquido, cuyo contorno está delimitado por líneas de corriente, de sección recta diferencial



A cada sección del tubo le corresponde un valor de la velocidad

Movimiento estacionario en régimen laminar

Las partículas en movimiento se mantienen constantemente en el interior del tubo de corriente.

$\Rightarrow$ *Flujo de masa* Es la cantidad de masa que pasa por unidad de tiempo a través de la sección recta de un tubo de corriente

$$\frac{dm}{dt} = \rho\, v\, dS$$

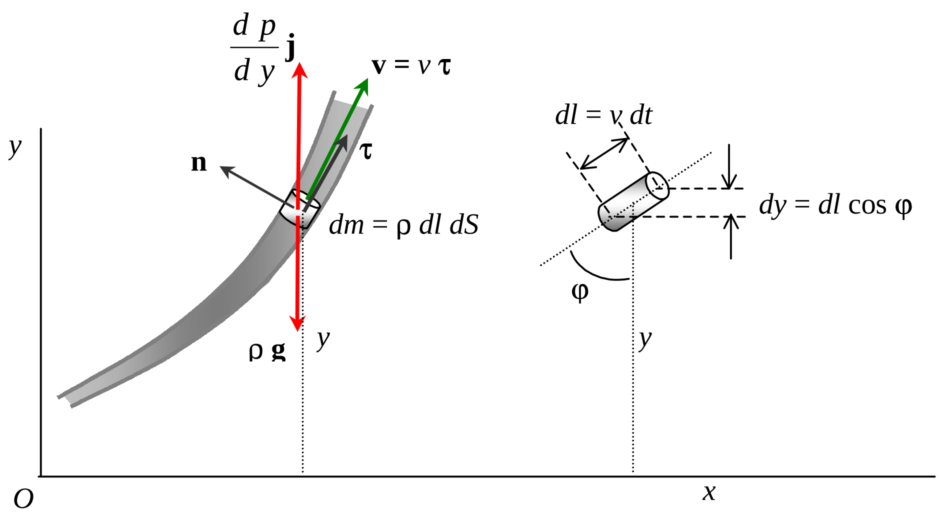
$\Rightarrow$ *Ecuación de continuidad* En un tubo de corriente el flujo de masa es cte. Si la densidad es constante a lo largo del tubo, se tiene

$$v_1\, d\,S_1 = v_2\, d\,S_2 \tag{10}$$

Vena líquida. Tubo de corriente de sección recta finita *S*. Para una vena líquida, la ecuación (1) es

$$v_1 \ S_1 = v_2 \ S_2 \qquad (11)$$

Ecuación de Bernouelli En un tubo de corriente, el trabajo específico (por unidad de masa) de las fuerzas de presión se invierte en incrementar la energía mecánica específica del fluido.
Sobre un *dm* del tubo de corriente actúan las densidades de fuerza de gravedad y de presión.



Ahora, la resultante de las densidades de fuerza no es cero, ya que la velocidad de *dm* varía a lo largo del tubo de corriente. Un diferencial de masa de un punto del tubo de corriente tiene una aceleración $d\mathbf{v} / dt$.

La ecuación (7) se escribe

$$- \frac{dp}{dy}\,\mathbf{j} - \rho\, g\, \mathbf{j} = \rho\, \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} \qquad (12)$$

denominada *Ecuación de Euler*.

Multiplicando la ecuación (12) por *dy* , y sustituyendo el vector unitario **j** por su expresión en la base intrínseca $\mathbf{j} = \cos\varphi\, \boldsymbol{\tau} + \operatorname{sen}\varphi\, \mathbf{n}$ queda, para la componente en la dirección $\boldsymbol{\tau}$

$$-\,(dp \ + \ \rho\, g\, dy\,)\cos\varphi \ = \ \rho\ \frac{d\,v}{d\,t} dy = \rho\ \frac{d\,v}{d\,t}\ dl\cos\varphi = \ \rho\ v\, dv \cos\varphi \qquad (13)$$

Operando en la ecuación (13) se tiene

$$- \, dp \; - \rho \, g \, dy \;\; = \rho \, d\,(\frac{1}{2} v^2) \quad \Rightarrow \quad d\;(p + \rho \, g \, y \; + \frac{1}{2} \rho \, v^2) = 0$$

La expresión entre paréntesis es constante, lo que constituye la ecuación de Bernoulli

$$p + \rho \, g \, y \; + \frac{1}{2} \rho \, v^2 = cte. \qquad (14)$$

A lo largo de un tubo de corriente la suma de la presión, mas las presiones debidas a la altura y a la velocidad, se mantiene constante. Dividiendo por la densidad ρ la ecuación (14) cambia a

$$\frac{p}{\rho} + g\,y + \frac{1}{2} v^2 = cte. \qquad (15)$$

El término $\Rightarrow$ $\frac{p}{\rho}$ es el trabajo específico de las fuerzas de presión

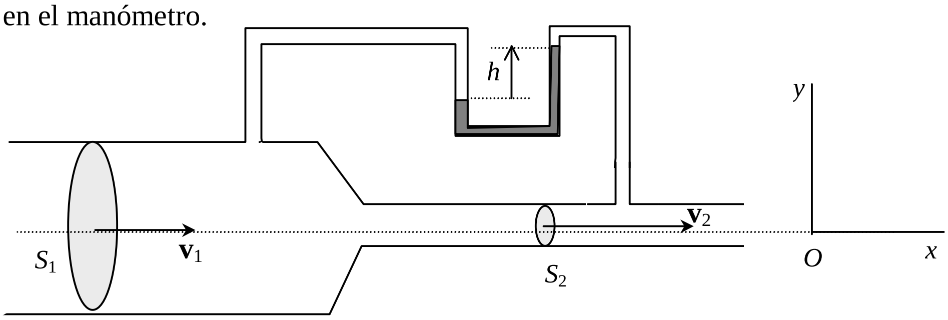
El término $\Rightarrow$ $g\,y$ es la energía potencial específica

El término $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} v^2$ es la energía cinética específica

Luego, el trabajo por unidad de masa de las fuerzas de presión entre dos puntos del tubos de corriente es invierte en incrementar la energía mecánica por unidad de masa del fluido.

En la práctica la ecuación (15) se aplica al movimiento de un líquido por una tubería que es equivalente a una vena líquida

Ejemplo. En el esquema de la figura adjunta, las secciones de la tubería son de 40 y 10 cm^2 respectivamente. Si la velocidad del agua en la sección ancha es de 0,1 m/s, calcular el desnivel *h* del mercurio en el manómetro.



Solución Ecuación de Bernoulli $p_1 + \rho \, g \, y_1 + \frac{1}{2} \rho \, v_1^2 = p_2 + \rho \, g \, y_2 + \frac{1}{2} \rho \, v_2^2$

con $y_1 = y_2 = 0$. Ecuación de continuidad $v_1 \, S_1 = v_2 \, S_2 \Rightarrow v_2 =$ 0,4 m/s

Sustituyendo queda $p_1 - p_2 = 75 \;\; N/m^2$. Pero $p_1 - p_2 = \rho_H \, g \, h$

Operando se tiene $\Rightarrow$ h = 0,56 mm