# Oscil.lacions, Ones i Termodinàmica

Primer control. Abril 2004. Segona part: prova escrita (40%); model **A**.

S'ha de col.locar un motor de massa $m = 100$ kg sobre el centre d'una plataforma quadrada de massa $M = 50$ kg que està suportada per 4 molles que hi ha en els vèrtexs, totes iguals de constant $k = 50$ N/cm.

(a) (15%) Si el motor es diposita sobre la plataforma i es deixa baixar lentament, quina distància baixarà la plataforma després de col.locar el motor?

En primer lloc cal notar que, si la plataforma es manté horitzontal en tot moment, les quatre molles col.locades en paral.lel es comporten com una única molla de constant elàstica efectiva igual a la suma de les quatre constants elàstiques: $k_{\text{ef}} = 4k$.
Abans de dipositar-hi el motor, el pes de la plataforma ja es troba equilibrat per una primera compressió de la molla. En posar el motor, la distància addicional que baixa la plataforma és la necessària per tal que la força elàstica extra compensi el pes del motor:

$$mg = 4k\ell \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{mg}{4k} = \underline{0.049 \text{ m}}$$

(b) (30%) Si el motor s'hagués deixat caure des d'una altura —respecte de la posició inicial de la plataforma— $h = 1$ m, quina amplitud tindrien en aquest cas les oscil.lacions del sistema?

La velocitat $v_m$ que té el motor just abans de xocar amb la plataforma es pot calcular fent servir el fet que l'energia mecànica total del mateix es conserva durant la caiguda:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_m^2 \quad \Longrightarrow \quad v_m = \sqrt{2gh} = 4.43 \text{ m/s}$$

La velocitat $v_0$ del conjunt plataforma+motor just després del xoc es pot calcular imposant que la quantitat de moviment total es conserva durant el xoc (**l'energia no es conserva, donat que el xoc no és elàstic**):

$$mv_m = (M+m)v_0 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \frac{m}{M+m}v_m = 2.95 \text{ m/s}$$

Aquesta és la velocitat inicial del moviment harmònic resultant de la caiguda del motor sobre la plataforma. Per determinar la posició inicial, hem de tenir present que la posició al voltant de la qual es produeixen les oscil.lacions és la posició d'equilibri trobada a l'apartat anterior. Per tant, agafant com a origen de coordenades aquesta posició d'equilibri (com es fa habitualment a l'estudi del moviment harmònic), la posició inicial de la oscil.lació és $x_0 = \ell$. Per tant, si expressem el moviment oscil.latori mitjançant l'expressió $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, podem escriure:

$$x(0) = x_0 = A\sin\varphi \qquad v(0) = -v_0 = A\omega_0\cos\varphi$$

on el signe menys enfront de $v_0$ indica que la velocitat inicial va cap abaix.

Fent servir que $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$ podem incloure la part dreta de l'equació anterior a la part esquerra:

$$x_0 = A\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{A\omega_0}\right)^2} \quad\Longrightarrow\quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \underline{0.26 \text{ m}}$$

on hem fet servir el fet que la pulsació del moviment harmònic simple és

$$\omega_0 = \frac{k_{\text{ef}}}{m_{total}} = \frac{4k}{M+m} = 11.55 \text{ s}^{-1}$$

(c) (30%) Seguint amb aquest segon cas, si afegim un amortidor hidràulic (tipus: $F = -bv$) entre el centre de la plataforma i el terra per tal que les oscil.lacions siguin amortides, quant hauria de valer la constant d'amortiment $b$ del sistema si pretenem que, després de $\Delta t = 7$ s, l'amplitud s'hagi reduït al 5% del valor inicial? Quantes vegades haurà passat el sistema motor-plataforma per la posició d'equilibri durant aquest interval de temps?
Nota: comencem a contar el temps en el moment del contacte entre el motor i la plataforma.

En un moviment harmònic amortit, l'amplitud relaxa seguint l'expressió $A(t) = A_0\exp(-\beta t)$, on $\beta = b/(2m_{\text{total}})$. En aquest cas, sabem que després de $\Delta t = 7$ s l'amplitud es redueix al 5% del valor inicial, és a dir $A(\Delta t) = 0.05A_0$. Per tant:

$$0.05A_0 = A_0\exp(-\beta\Delta t) \Longrightarrow \beta = -\frac{1}{\Delta t}\ln(0.05) = 0.43 \text{ s}^{-1} \Longrightarrow b = 2(M+m)\beta = \underline{128.4\,\text{kg/s}}$$

Donat que $\beta \ll \omega_0$, podem aproximar $T = 2\pi/\omega \simeq 2\pi/\omega_0 = 0.54$ s. I com que $\Delta t/T = 7/0.54 = 12.96$, i el sistema haurà passat $12\times 2+1 = \underline{25}$ vegades per la posició d'equilibri en un temps $\Delta t$.

(d) (25%) El motor està lleugerament desequilibrat, de manera que si es posa en marxa el sistema passa a ser un oscil.lador forçat. A quina velocitat angular $\omega_R$ el sistema entraria en ressonància? Quant valdria en aquest cas la impedància mecànica? I quant valdria la impedància mecànica si la velocitat angular del motor fos 3/4 de la $\omega_R$?

El desequilibri del motor provoca un forçament periòdic a la plataforma, que considerarem harmònic. La freqüència del forçament és igual a la velocitat angular $\Omega$ del motor. Per tant, el sistema entra en ressonància (**en energia**) quan la velocitat angular del motor sigui igual a la pulsació natural del sistema:

$$\Omega = \omega_R = \omega_0 = \underline{11.55 \text{ rad/s}}$$

La impedància del sistema val:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{k_{\text{ef}}}{\Omega} - m_{\text{total}}\Omega\right)^2 + b^2}$$

En ressonància, el primer parèntesi de l'interior de l'arrel s'anul.la i $Z = b = \underline{128.4\,\text{kg/s}}$. Per $\Omega = 3/4\,\omega_0 = 8.66 \text{ s}^{-1}$, substituint a l'expressió anterior dóna $\underline{Z = 1019 \text{ kg/s}}$.

# Oscil.lacions, Ones i Termodinàmica

Primer control. Abril 2004. Segona part: prova escrita (40%); model **B**.

S'ha de col.locar un motor de massa $M = 120$ kg sobre el centre d'una plataforma quadrada de massa $m = 60$ kg que està suportada per 4 molles que hi ha en els vèrtexs, totes iguals de constant $k = 60$ N/cm.

(a) (15%) Si el motor es diposita sobre la plataforma i es deixa baixar lentament, quina distància baixarà la plataforma després de col.locar el motor?

En primer lloc cal notar que, si la plataforma es manté horitzontal en tot moment, les quatre molles col.locades en paral.lel es comporten com una única molla de constant elàstica efectiva igual a la suma de les quatre constants elàstiques: $k_{\text{ef}} = 4k$.
Abans de dipositar-hi el motor, el pes de la plataforma ja es troba equilibrat per una primera compressió de la molla. En posar el motor, la distància addicional que baixa la plataforma és la necessària per tal que la força elàstica extra compensi el pes del motor:

$$Mg = 4k\ell \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{Mg}{4k} = \underline{0.049 \text{ m}}$$

(b) (30%) Si el motor s'haguès deixat caure des d'una altura —respecte de la posició inicial de la plataforma— $d = 1$ m, quina amplitud tindrien en aquest cas les oscil.lacions del sistema?

La velocitat $v_m$ que té el motor just abans de xocar amb la plataforma es pot calcular fent servir el fet que l'energia mecànica total del mateix es conserva durant la caiguda:

$$Mgd = \frac{1}{2}Mv_m^2 \quad \Longrightarrow \quad v_m = \sqrt{2gd} = 4.43 \text{ m/s}$$

La velocitat $v_0$ del conjunt plataforma+motor just després del xoc es pot calcular imposant que la quantitat de moviment total es conserva durant el xoc (**l'energia no es conserva, donat que el xoc no és elàstic**):

$$Mv_m = (M+m)v_0 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \frac{M}{M+m}v_m = 2.95 \text{ m/s}$$

Aquesta és la velocitat inicial del moviment harmònic resultant de la caiguda del motor sobre la plataforma. Per determinar la posició inicial, hem de tenir present que la posició al voltant de la qual es produeixen les oscil.lacions és la posició d'equilibri trobada a l'apartat anterior. Per tant, agafant com a origen de coordenades aquesta posició d'equilibri (com es fa habitualment a l'estudi del moviment harmònic), la posició inicial de la oscil.lació és $x_0 = \ell$. Per tant, si expressem el moviment oscil.latori mitjançant l'expressió $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, podem escriure:

$$x(0) = x_0 = A\sin\varphi \qquad v(0) = -v_0 = A\omega_0\cos\varphi$$

on el signe menys enfront de $v_0$ indica que la velocitat inicial va cap abaix.

Fent servir que $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$ podem incloure la part dreta de l'equació anterior a la part esquerra:

$$x_0 = A\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{A\omega_0}\right)^2} \quad\Longrightarrow\quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \underline{0.26 \text{ m}}$$

on hem fet servir el fet que la pulsació del moviment harmònic simple és

$$\omega_0 = \frac{k_{\text{ef}}}{m_{total}} = \frac{4k}{M+m} = 11.55 \text{ s}^{-1}$$

(c) (30%) Seguint amb aquest segon cas, si afegim un amortidor hidràulic (tipus: $F = -bv$) entre el centre de la plataforma i el terra per tal que les oscil.lacions siguin amortides, quant hauria de valer la constant d'amortiment $b$ del sistema si pretenem que, després de $\Delta t = 6$ s, l'amplitud s'hagi reduït al 7% del valor inicial? Quantes vegades haurà passat el sistema motor-plataforma per la posició d'equilibri durant aquest interval de temps?
Nota: comencem a contar el temps en el moment del contacte entre el motor i la plataforma.

En un moviment harmònic amortit, l'amplitud relaxa seguint l'expressió $A(t) = A_0\exp(-\beta t)$, on $\beta = b/(2m_{\text{total}})$. En aquest cas, sabem que després de $\Delta t = 6$ s l'amplitud es redueix al 7% del valor inicial, és a dir $A(\Delta t) = 0.07A_0$. Per tant:

$$0.07A_0 = A_0\exp(-\beta\Delta t) \Longrightarrow \beta = -\frac{1}{\Delta t}\ln(0.07) = 0.44 \text{ s}^{-1} \Longrightarrow b = 2(M+m)\beta = \underline{159.6\,\text{kg/s}}$$

Donat que $\beta \ll \omega_0$, podem aproximar $T = 2\pi/\omega \simeq 2\pi/\omega_0 = 0.54$ s. I com que $\Delta t/T = 6/0.54 = 11.11$, i el sistema haurà passat $11 \times 2 = \underline{22}$ vegades per la posició d'equilibri en un temps $\Delta t$.

(d) (25%) El motor està lleugerament desequilibrat, de manera que si es posa en marxa el sistema passa a ser un oscil.lador forçat. A quina velocitat angular $\omega_R$ el sistema entraria en ressonància? Quant valdria en aquest cas la impedància mecànica? I quant valdria la impedància mecànica si la velocitat angular del motor fos 2/3 de la $\omega_R$?

El desequilibri del motor provoca un forçament periòdic a la plataforma, que considerarem harmònic. La freqüència del forçament és igual a la velocitat angular $\Omega$ del motor. Per tant, el sistema entra en ressonància (**en energia**) quan la velocitat angular del motor sigui igual a la pulsació natural del sistema:

$$\Omega = \omega_R = \omega_0 = \underline{11.55 \text{ rad/s}}$$

La impedància del sistema val:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{k_{\text{ef}}}{\Omega} - m_{\text{total}}\Omega\right)^2 + b^2}$$

En ressonància, el primer parèntesi de l'interior de l'arrel s'anul.la i $Z = b = \underline{159.6\,\text{kg/s}}$. Per $\Omega = 2/3\,\omega_0 = 7.7 \text{ s}^{-1}$, substituint a l'expressió anterior dóna $\underline{Z = 1738 \text{ kg/s}}$.

# REVISIÓ

- La revisió de la part escrita de l'examen la realitzarà el Prof. Jordi Garcia Ojalvo (porta 1.54 – despatx 1.58), i tindrà lloc a qualsevol de les seves hores de consulta de la setmana del 26 al 30 d'abril.
- **Important:** per revisar l'examen és imprescindible haber estudiat detalladament la solució adjunta, que podeu trobar també a la web de l'assignatura (`http://aransa.upc.es/OT`).
- Si el vostre nom no apareix a la llista poseu-vos en contacte amb el Prof. Jordi Garcia Ojalvo (porta 1.54 – despatx 1.58).
- Per qüestions relacionades amb la nota de la part test de l'examen, adreceu-vos al Prof. Jaume Calaf (despatx 1.66).