PROBLEMAS

DE

ELECTROESTÁTICA

I CAMPO ELECTRICO EN EL VACIO

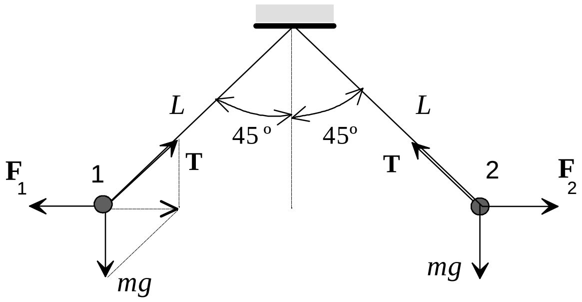
1. Cargas puntuales
2. Cargas lineales
3. Cargas superficiales
4. Flujo y ley de Gauss
5. Distribuciones cúbicas de carga
6. Trabajo y energía electrostática
7. Problemas

Prof. J. Martín

CARGAS PUNTUALES

Problema 1 Dos esferas conductoras de diámetro despreciable tienen masa de m = 0.2 g cada una . Ambas están unidas mediante hilos no conductores a un punto común. La longitud de los hilos se de 1 m y su masa despreciable. Cuando se les comunica a cada una de ellas una misma carga eléctrica q , se separan formando los hilos ángulos de 45 º con la vertical. Hallar la carga de cada esfera.

SOLUCIÓN



Sobre cada esfera actúan tres fuerzas, el peso, la tensión del hilo y la fuerza eléctrica, cuya suma, en el equilibrio ha de ser cero. De la figura se deduce que

$$mg = T\cos 45^\circ \qquad ; \qquad F = T\,\mathrm{sen}\ 45^\circ \qquad \Rightarrow \qquad F = m\,g$$

La distancia entre las esferas es $r = 2L\ \mathrm{sen}\,45^\circ$ De la ley de Coulomb se tiene

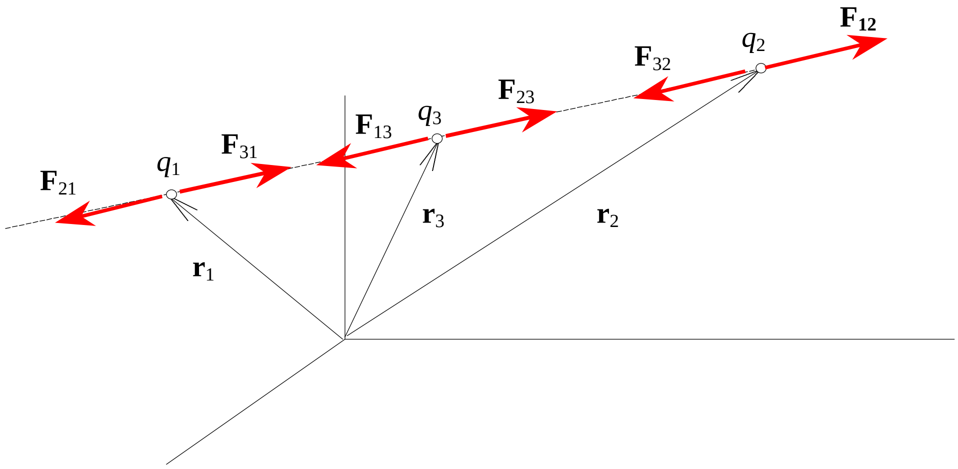
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = m\,g \qquad \Rightarrow \qquad q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\, r^2\,\mathrm{sen}^2\,45\ m\,g}$$

Sustituyendo valores queda $q = 0{,}66\ \mu C$

Problema 2 Las posiciones de dos cargas puntuales positivas q_1 y q_2 están definidas en una cierta referencia por los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Determinar el valor de otra carga puntual q_3 y su posición $\mathbf{r}_3$ en la misma referencia para que la fuerza total sobre cada una de ellas sea nula

SOLUCION

Para que la fuerza resultante sobre cada carga sea cero, la carga q_3 ha de estar alineada con las otras dos cargas. Las cargas 1 y 2, cargas positivas, se ejercen entre sí fuerzas repulsivas, luego la carga 3 ha de ejercer sobre ellas fuerzas atractivas para que la resultante sea nula, es decir, ha de ser negativa.



Si s es la distancia entre las cargas 1 y 2, se cumple $s = s_1 + s_2$, siendo s_1 y s_2 las distancias de la carga 3 a las cargas 1 y 2 respectivamente.

De la ecuación $\mathbf{F}_1 = 0$ se tiene $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{q_1\, q_2}{s^2} - \dfrac{q_1\, q_3}{s_1^2} = 0 \qquad (1)$

y de la $\mathbf{F}_2 = 0$ $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{q_1\, q_2}{s^2} + \dfrac{q_2\, q_3}{s_2^2} = 0 \qquad (2)$

De las ecuaciones (1) y (2) queda $q_3 = -\dfrac{s_1^2}{s^2}\, q_2 = -\dfrac{s_2^2}{s^2}\, q_1$; efectuando el cociente entre ellas se obtiene la relación

$$s_1 = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\; s_2$$

que sustituida en $s = s_1 + s_2$ y operando se tienen las distancias s_1, s_2

$$s_1 = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\, s \qquad ; \qquad s_2 = \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\, s$$

Sustituyendo en una de las expresiones de la carga 3 queda

$$q_3 = -\frac{q_1\; q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}$$

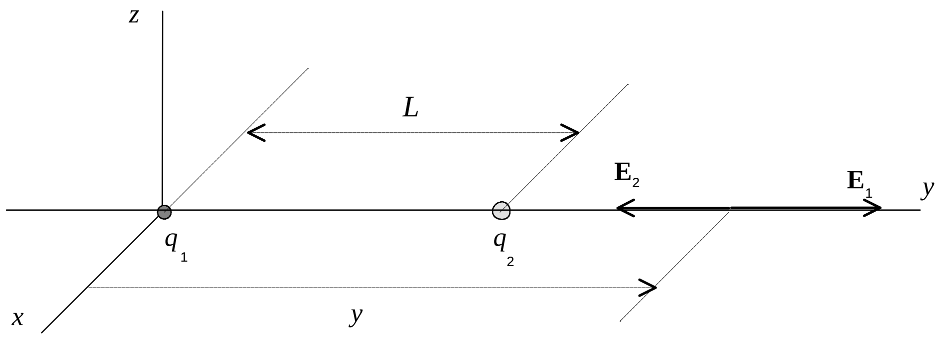
De la ecuación $\mathbf{F}_3 = 0$ se tiene $\dfrac{q_1}{s_1^3}(\mathbf{r_3} - \mathbf{r}_1) = \dfrac{q_2}{s_2^3}(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_3})$; operando se tiene la posición de q_3

$$\mathbf{r_3} = \left(\frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\right)\mathbf{r_1} + \left(\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\right)\mathbf{r_2}$$

Problema 3 Dos cargas puntuales $q_1 = q$ y $q_2 = -q'$, tales que $q_1 > -q_2$ están separadas una distancia L. Determinar el campo eléctrico en : a) puntos de la recta definida por las dos cargas .¿ En que punto el campo es nulo ? ; b) en un punto cualquiera del espacio

SOLUCION

Situemos las cargas tal como se indica en la figura adjunta.



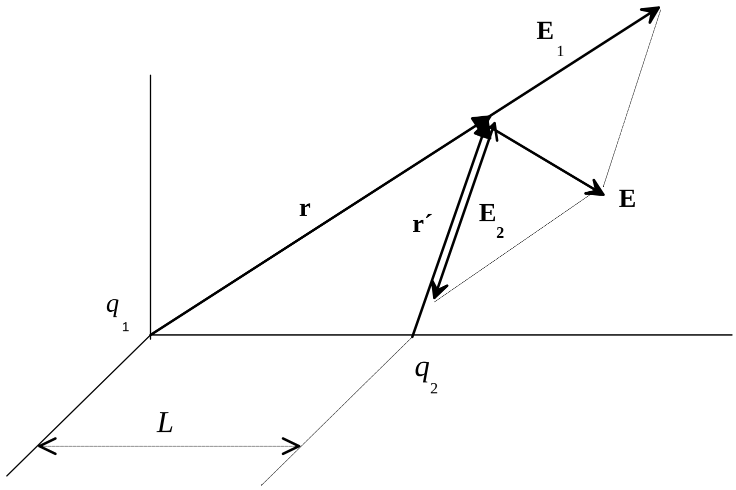
a) El campo eléctrico en los puntos del eje y está dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E_2} = \frac{1}{4pe_0}\left(\frac{q}{y^2} - \frac{q'}{(L-y)^2}\right)\mathbf{j}$$

El campo se anula únicamente en un punto a la derecha de la carga q_2 , dado por

$$y = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q} - \sqrt{q'}}\, L$$

b) Sea $\mathbf{r} = (x, y, z)$, el vector posición de un punto genérico del espacio, tal como se muestra en la figura adjunta



El campo resultante es la suma vectorial de los campos de cada carga

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^3}\mathbf{r} - \frac{q'}{r'^3}\mathbf{r}' \right)$$

CARGAS LINEALES

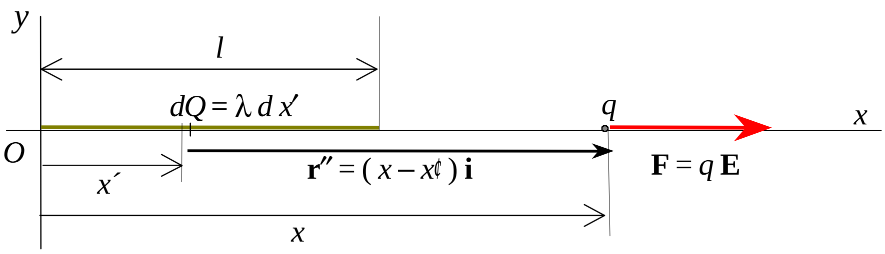
Problema 4 Una distribución rectilínea uniforme de carga Q y de longitud l, está situada sobre el eje x con uno de sus extremos en el origen de coordenadas. Determinar el valor de la fuerza que ejerce sobre una carga puntual q situada en un punto del eje x tal que $x > l$.

SOLUCION

Por el principio de superposición, la fuerza sobre la carga q está dada por

$$\mathbf{F} = \int_0^l d\,\mathbf{F} = \int_0^l q\, d\,\mathbf{E} \qquad (1)$$

donde $d\,\mathbf{E}$ es el campo creado por la carga puntual dq. La densidad lineal de carga es $\lambda = Q/l$, luego $dq = \lambda\, dx'$, que se muestra en la figura adjunta.



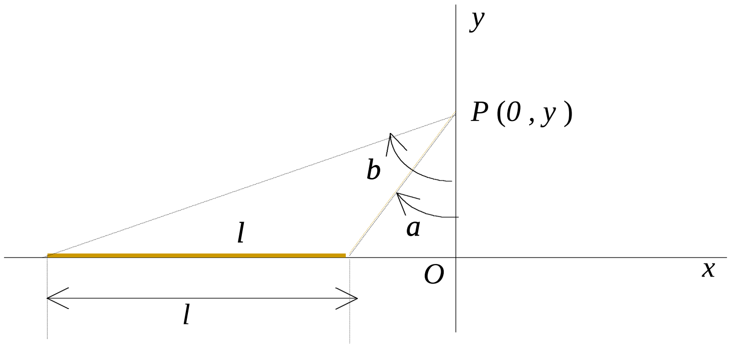
El campo creado por la carga diferencial está dado por

$$d\,\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\,Q}{r''^2}\,\mathbf{i} \qquad \Rightarrow \qquad d\,\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\,x'}{(x-x')^2}\,\mathbf{i}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando queda

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,q}{x(x-l)}\,\mathbf{i}$$

Problema 5 Calcular el campo **E** creado por la distribución rectilínea de carga de longitud *l* (m) y densidad λ (C/m) en el punto $P\,(0\,,y)$ de la figura adjunta.

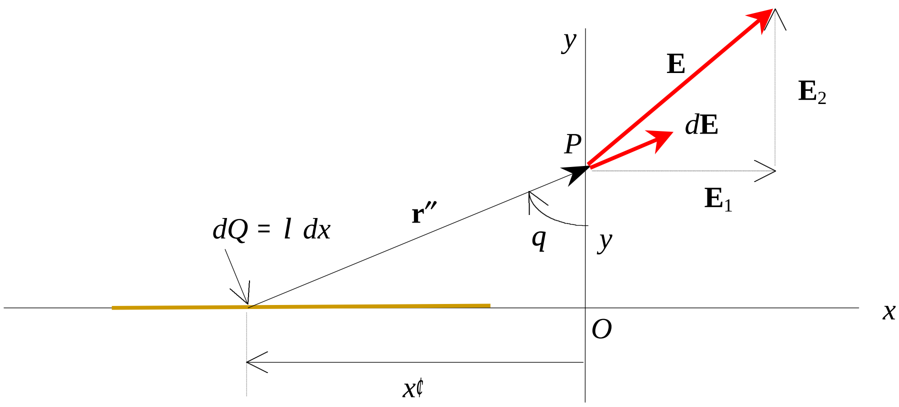


SOLUCION

El campo eléctrico en el punto *P* está dado por

$$\mathbf{E}\,(y) = \int_l d\,\mathbf{E} \;=\; \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_l \frac{d\,Q}{r''^{3}}\,\mathbf{r}''$$

donde $\mathbf{r}''$ es el vector con origen en el elemento de carga dQ y extremo en el punto $P(\,0,\,y)$.



Los $d\,\mathbf{E}$ no se pueden sumar directamente ya que tienen direcciones distintas; expresando $d\,\mathbf{E}$ en componentes queda $d\,\mathbf{E} = d\,E_x\,\mathbf{i} + d\,E_y\,\mathbf{j} = d\,E\,\text{sen}\,\theta\;\mathbf{i} + d\,E\,\cos\theta\;\mathbf{j}$. Las componentes del campo están dadas por las integrales

$$E_1 = \int_l \text{sen}\theta\, dE \qquad ; \qquad E_2 = \int_l \cos\theta\, dE$$

Las relaciones trigonométricas $y = r\,\cos\theta$; $x = y\,\tan\theta$ permiten resolver fácilmente las integrales.

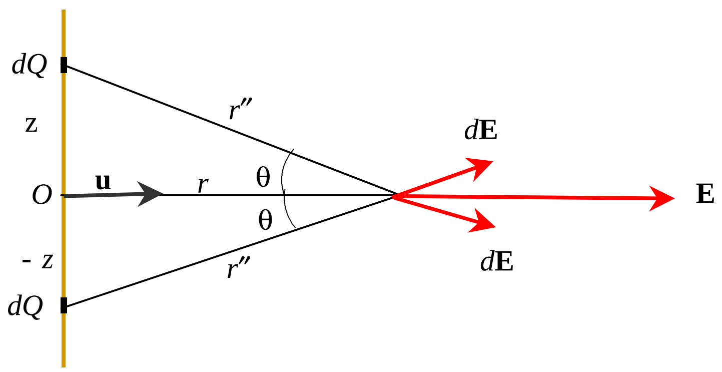
$$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\operatorname{sen}\theta\, dx}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{y}\int_a^b \operatorname{sen}\theta\; d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{y}$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\cos\theta\; dx}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{y}\int_\alpha^\beta \cos\theta\; d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha}{y}$$

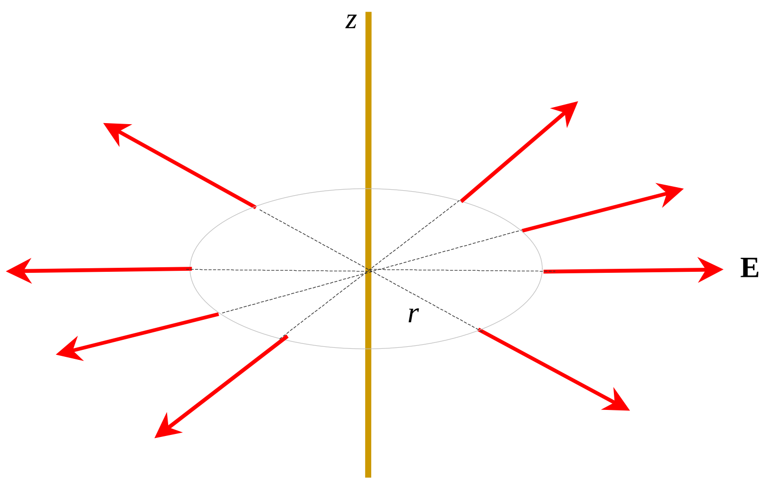
Problema 6 Determinar el campo eléctrico en un punto cualquiera del espacio de una distribución rectilínea de carga, de longitud infinita y densidad constante λ C/m .

SOLUCION

Un punto cualquiera de línea de carga es el punto central de la distribución de carga. La carga es simétrica respecto de cualquier punto del espacio. Seleccionamos un sistema de coordenadas tal como el indicado en la figura. Debido a la simetría de la carga, la suma de los $d\mathbf{E}$ creados por los dQ situados a la misma distancia respecto del origen, tienen dirección radial, luego el campo en un punto cualquiera del espacio tiene dirección radial respecto de línea de carga.



Su módulo es únicamente función de la distancia al eje r.



$$\mathbf{E} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \, d\,E\right] \mathbf{u} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\theta}{r''^2}\, dz \qquad (1)$$

Cálculo de la integral (1). Utilizando las relaciones trigonométricas

$$r = r''\cos\theta \qquad ; \qquad z = r\ \mathrm{tg}\,\theta$$

se tiene

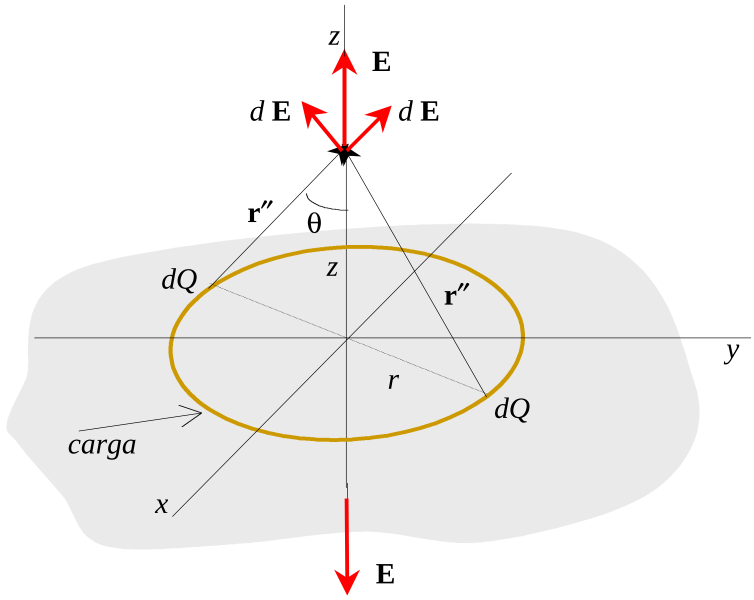
$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\,\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}}{r^2}}$$

Problema 7 Se dispone de una distribución uniforme de carga Q (C) formando una circunferencia de radio r (m). Determinar el campo eléctrico en los puntos del eje de la circunferencia perpendicular al plano que la contiene, pasando por su centro.

SOLUCION

Seleccionemos un sistema de coordenadas tal como el indicado en la figura adjunta. La carga es simétrica respecto de los puntos del eje z, luego el campo **E** tiene la dirección del vector **k**.



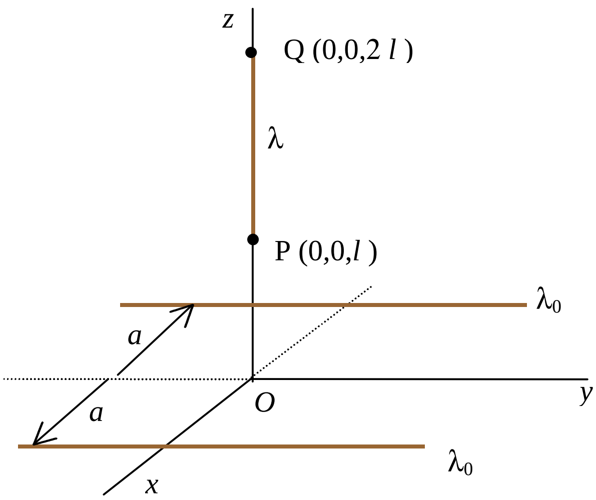
La componente del campo en la dirección z está dada por

$$E(z) = \int_{carga} \cos\theta\, d\,E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{carga}\frac{\cos\theta\, dQ}{r''^2}$$

De la relación trigonométrica $z = r'' \cos\theta$ y de $r''^2 = z^2 + r^2$ se obtiene inmediatamente el valor del campo

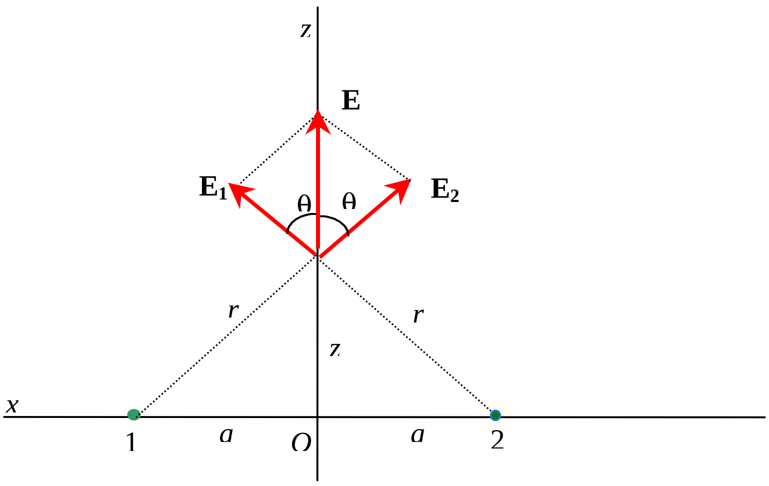
$$E(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Problema 8 Dos distribuciones de carga rectilíneas de longitud ∞, de densidad λ_0 constante están situadas en el plano *x*-*y* paralelas al eje *y* y a una distancia *a* del origen. Sobre un hilo recto de longitud *l* (m) y masa *m* (kg), situado sobre el eje *z* tal como se muestra en la figura, se distribuye una carga de densidad lineal constante λ C/m. Determinar: **a)** El campo eléctrico que crean las cargas rectilíneas en los puntos del eje *z* . Dar su expresión en función de *z* y dibujar su gráfica ; **b)** El valor de λ para que el hilo se mantenga en equilibrio.



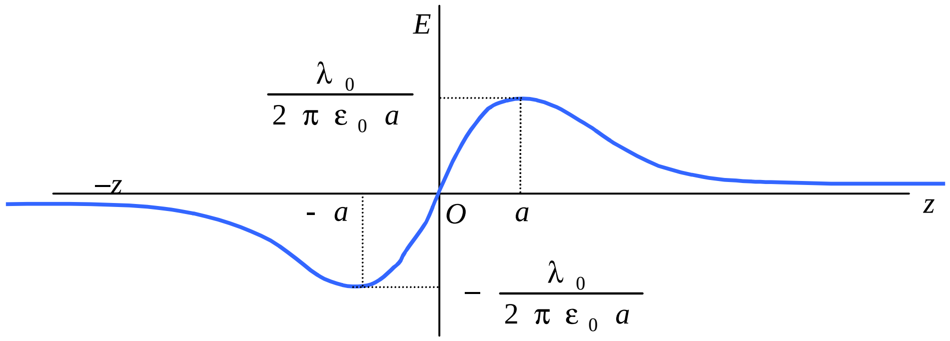
SOLUCION

a) El campo eléctrico creado por una distribución rectilínea infinita de carga a una distancia *r* de la misma, tiene dirección radial y su módulo está dado por $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ .En la figura se representan los campos creados por las cargas lineales 1 y 2 en un punto del eje *z*. El campo resultante **E** tiene la dirección del eje *z*.



Su módulo es $$E = 2E_1 \cos\theta = \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2} = \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{z^2+a^2}$$

Gráfica.



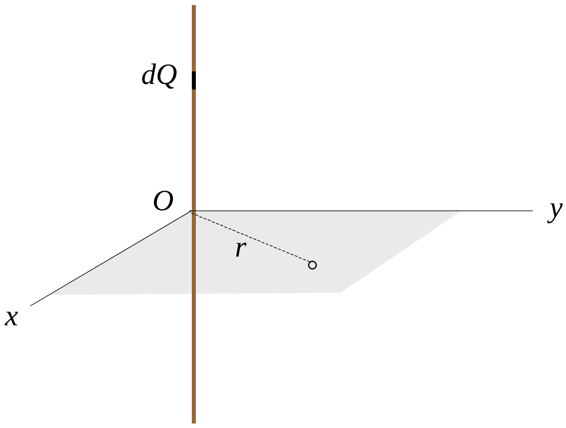
b) Para que el cable se mantenga en reposo, la fuerza eléctrica ha de equilibrar al peso. La fuerza eléctrica sobre un elemento diferencial de cable es $dF = E\,dq = E\,\lambda\,dz$. Integrando se tiene

$$F = \frac{\text{ë}_0\ \text{ë}}{2\,\text{ðå}_0}\int_l^{2l}\frac{2\,zdz}{z^2+a^2} = \frac{\text{ë}_0\ \text{ë}}{2\,\text{ðå}_0}\ln\left(\frac{4l^2+a^2}{l^2+a^2}\right)$$

Para el equilibrio se ha de cumplir $F = m\,g$. Igualando y despejando se tiene la densidad λ.

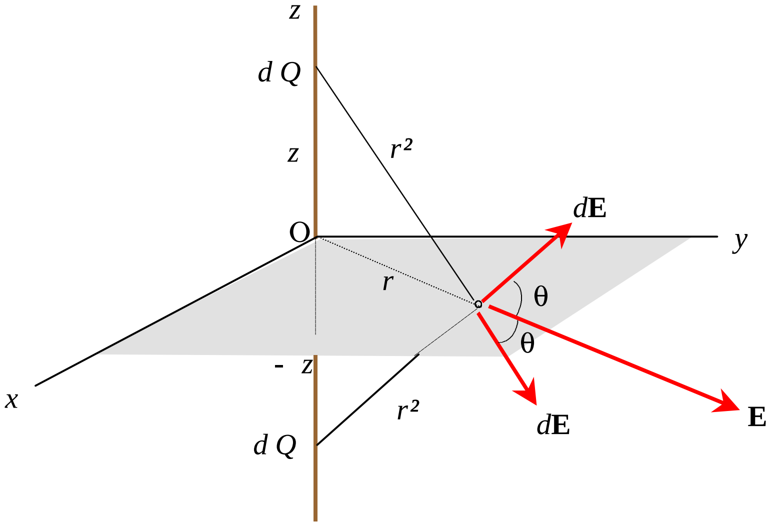
$$\boxed{\lambda = \frac{2\,\pi\varepsilon_0\,m\,g}{\lambda_0\ \ln\left(\dfrac{4l^2+a^2}{l^2+a^2}\right)}}$$

Problema 9 En la figura adjunta se dispone una distribución rectilínea de carga positiva de densidad $\lambda = k\,z$ para $z > 0$ y $\lambda =- k\,z$ para $z < 0$, siendo k una constante positiva. Determinar el campo eléctrico **E** en un punto cualquiera del plano *x*-*y*, situado a la distancia *r* del origen.



SOLUCION

Sea *P* un punto cualquiera del plano *x*-*y*. Las cargas puntuales *dQ*, situadas en *z* y - *z*, crean en el punto *P* campos *d* **E** del mismo módulo y formando el mismo ángulo con la dirección radial, luego su suma tiene la dirección radial .Este resultado es aplicable a cualquier par de cargas puntuales simétricamente situadas respecto del origen *O*, luego el campo resultante en el punto *P* es radial y su expresión **E** = E **u** , siendo **u** el vector unitario radial.



De la figura se tiene que la componente que genera campo es $d\,E\cos\theta$. Sustituyendo se tiene

$$dE\cos\theta = \frac{r}{r'}\,dE \quad = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r\;dq}{r'^3} \quad = \frac{k\,r}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z\,dz}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Integrando queda

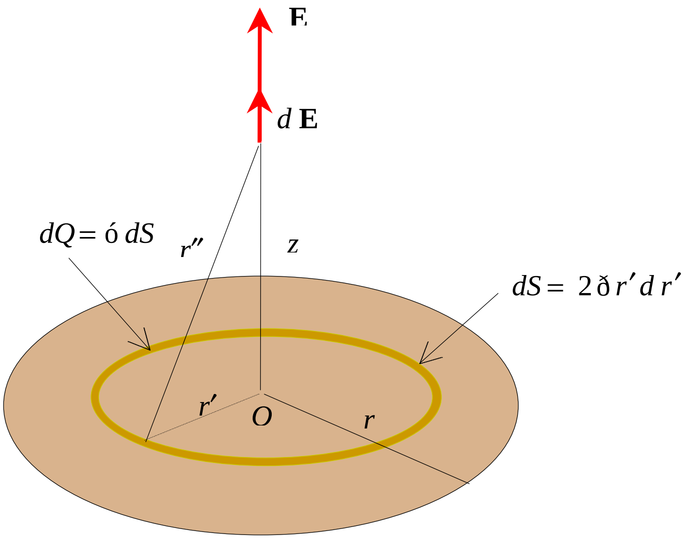
$$E = 2\int_0^{\infty} dE\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{k}{2\pi\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{E} = \frac{k}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}}{r}}$$

CARGAS SUPERFICIAL

Problema 10 Determinar el campo eléctrico de una distribución de carga plana circular de radio *r*(m) y densidad σ (C/m^2) constante, en los puntos del eje del disco.

SOLUCION

Debido a la simetría de la carga respecto de los puntos del eje, el campo **E** tiene la dirección y sentido indicado en la figura adjunta. El *d***E** creado en un punto del eje a una distancia *z* del centro, por la carga *dQ* contenida en el área *dS* delimitada por dos circunferencias concéntricas de radio *r´* y *r´+ dr´*, es el mismo que el de la carga circular. Del resultado del problema nº 7, se tiene



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z\,dQ}{\left(r'^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{z\,r'\,d\,r'}{\left(r'^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Sumando los campos creados por todos los *dQ* comprendidos entre el origen y la periferia del disco se obtiene el campo E.

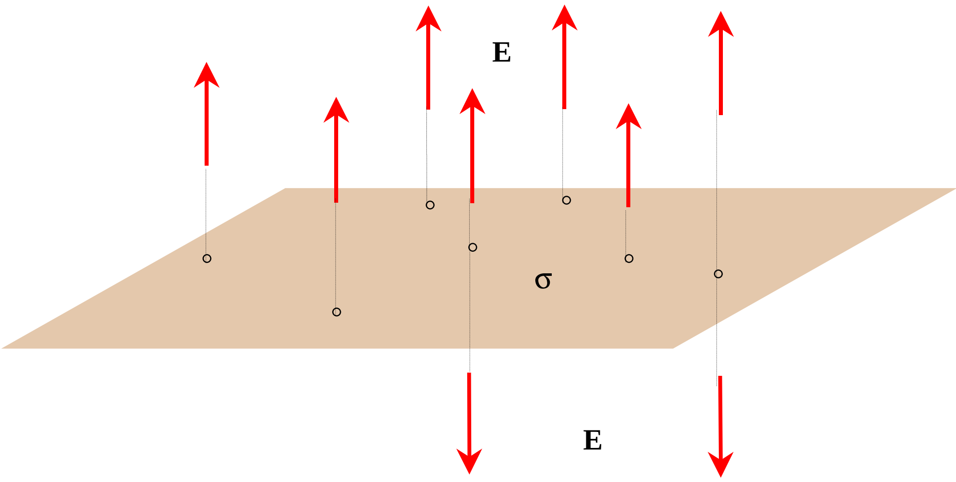
$$E\,(z) = \int_0^r dE = \frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0}\int_0^r \frac{r'\,d\,r'}{\left(r'^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right]$$

Problema 11 Determinar el campo eléctrico de una distribución de carga plana infinita de densidad constante σ .

SOLUCION

Una superficie plana infinita se obtiene de un disco de radio r haciendo que el radio tienda a infinito. Cualquier recta perpendicular a la superficie es un eje de simetría, luego en todos los puntos del espacio que están a la misma distancia z del plano de carga, el campo tiene el mismo módulo. Se puede determinar su valor utilizando el resultado del problema anterior, haciendo que r tienda a infinito

$$E = \lim_{r \to \infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}}$$

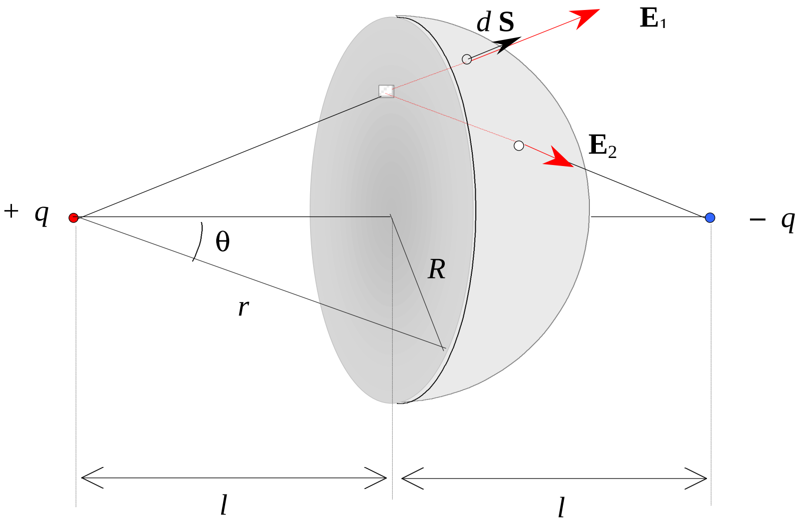


El campo es independiente de la distancia al plano, es decir , es un campo uniforme

FLUJO Y LEY DE GAUSS

Problema 12 Determinar el flujo del campo eléctrico **E** creado por las dos cargas $+q$ y $-q$ situadas en los extremos de un segmento de longitud $2l$ a través de un círculo de radio R perpendicularmente al segmento y situado en su punto medio.

SOLUCION



El signo del flujo depende del sentido de la normal al circulo. Se toma el sentido positivo hacia la derecha. El flujo de la carga positiva a través del circulo es el mismo que el flujo a través del casquete esférico de radio r y ángulo θ, ya que todas las líneas de campo que pasan por el círculo pasan también por el casquete. La superficie del casquete está dada por

$$S_\theta = 2\pi r^2 \,(1 - \cos\theta)$$

El campo eléctrico $\mathbf{E}_1$ en los puntos del casquete es radial dirigido hacia fuera y su módulo es constante. El flujo Φ_1 se obtiene de

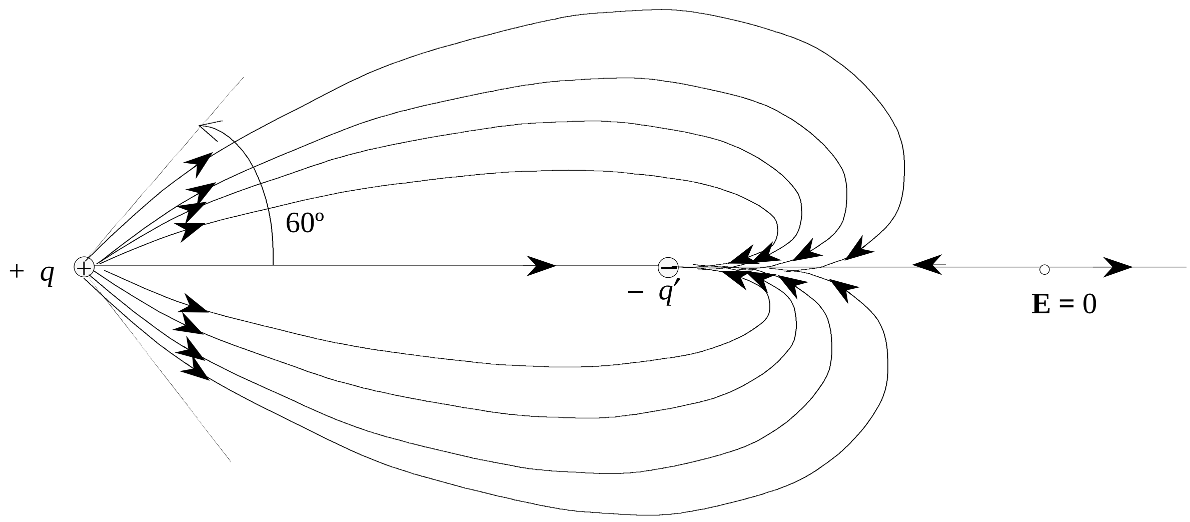
$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_S dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{S_\theta}{r^2}$$

Por el mismo procedimiento se obtiene el flujo de la carga negativa. El flujo total está dado por

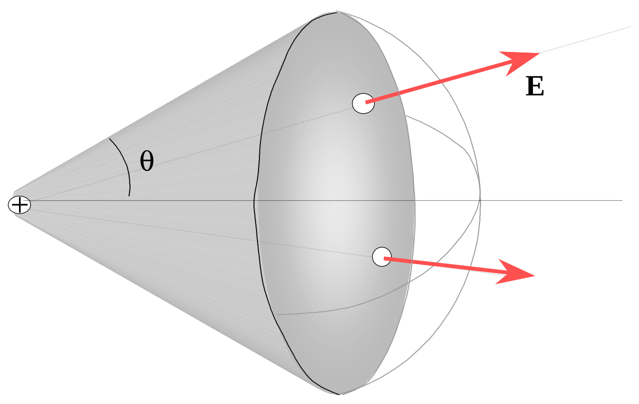
$$\Phi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{S_\theta}{r^2} \quad\Rightarrow\quad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}(1-\cos\theta) \quad\Rightarrow\quad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right)$$

Problema 13 Dos cargas puntuales $+q$ y $-q'$ están separadas una cierta distancia . El valor de las cargas es tal que el campo eléctrico total se anula en un punto situado sobre la recta que las une y a la derecha de la carga negativa. Un conjunto de líneas de campo, salen de la carga positiva y van a parar a la carga negativa. Determinar la relación entre las cargas para que el ángulo máximo que formen las líneas de campo a la salida de la carga positiva que van a parar a la negativa con el segmento que las une sea de 60º

SOLUCION



Todas las líneas de campo que van a parar a la carga negativa salen de la positiva formando un ángulo igual o menor de 60º, luego el flujo saliente de la positiva correspondiente al ángulo sólido θ es igual al flujo total entrante en la negativa.



El flujo que sale de la carga positiva es el que pasa a través de un casquete esférico de semiángulo θ.

$$\Phi_+ = \frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)$$

El flujo entrante en la carga negativa es

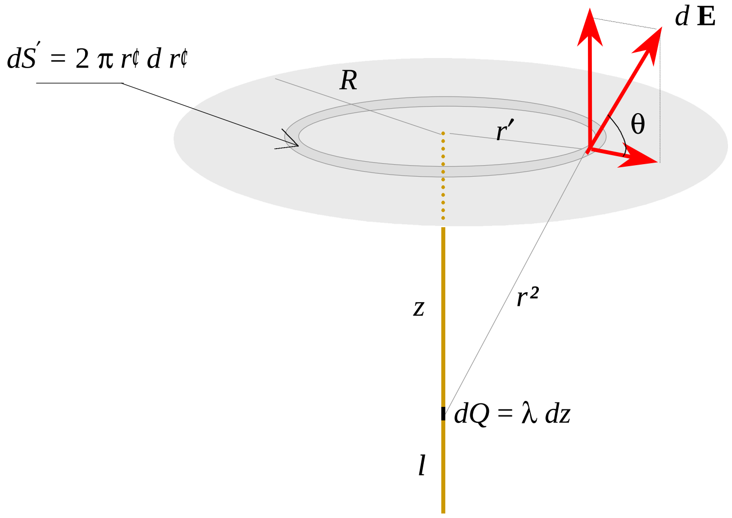
$$\Phi_- = -\frac{q'}{\varepsilon_0}$$

Igualando ambos flujos y operando se tiene

$$q' = -\frac{q}{4}$$

Problema 14 Determinar el flujo del campo eléctrico **E** de una distribución lineal rectilínea semiinfinita de densidad constante λ a través de un círculo de radio *R* situado en su extremo con el centro en la línea y perpendicular ella.

SOLUCION

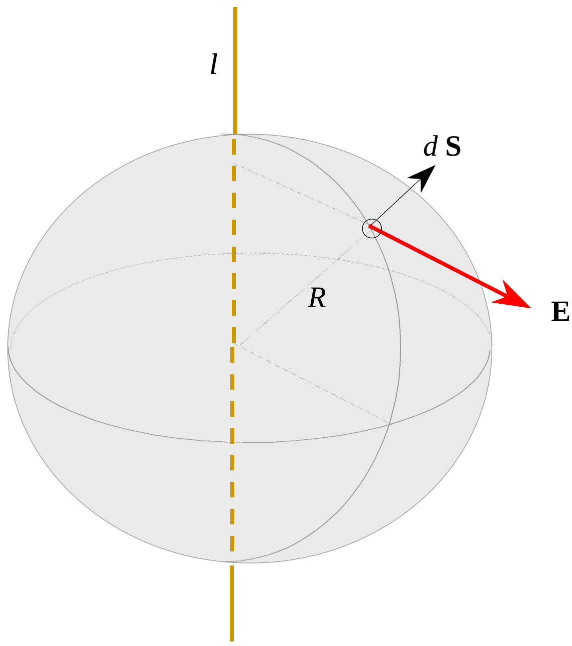


El flujo de toda la carga a través de dS' está dado por $$d\Phi = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\, dr'$$

Integrando entre *0* y *R* se tiene $$\boxed{\Phi = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}}$$

Problema 15 Determinar el flujo del campo eléctrico **E** de una distribución lineal rectilínea infinita de densidad constante λ a través de una superficie esférica de radio *R* con el centro en un punto de la línea, utilizando la definición de flujo.

SOLUCION



Aplicando la definición de flujo se tiene

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{S}$$

El campo eléctrico está dado por (ver problema 6)

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

El elemento de área de la superficie es

$$d\,\mathbf{S} = d\,S\,\frac{\mathbf{R}}{R} \quad ; \quad \mathbf{R} = R_z\,\mathbf{k} + \mathbf{r}$$

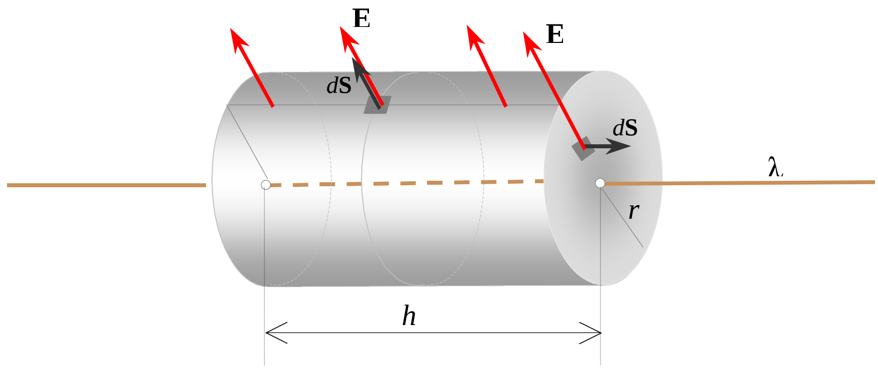
Operando se tiene el flujo a través de la superficie esférica

$$\boxed{\Phi = \frac{2\lambda R}{\varepsilon_0}}$$

Problema 16 Determinar el campo eléctrico **E** de una distribución lineal rectilínea infinita de densidad constante λ .

SOLUCION

Del problema nº 8 se sabe que el campo es radial respecto de la línea de carga. Seleccionando la superficie *S* de la figura,

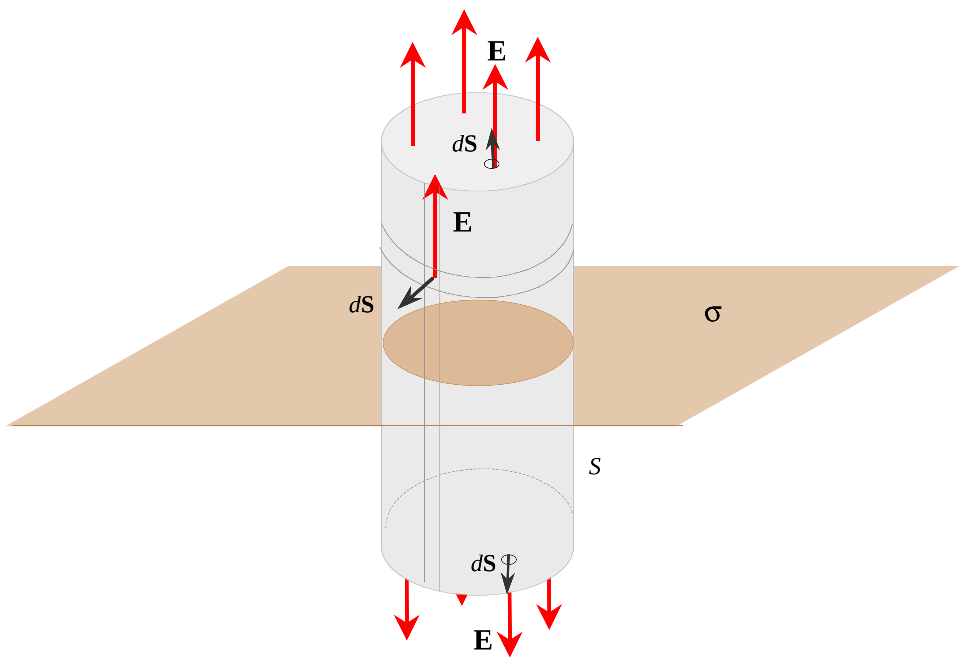


aplicando la ley de Gauss, se tiene $\mathbf{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$

Problema 17 Determinar el campo eléctrico de una distribución de carga plana infinita de densidad constante σ .

SOLUCION

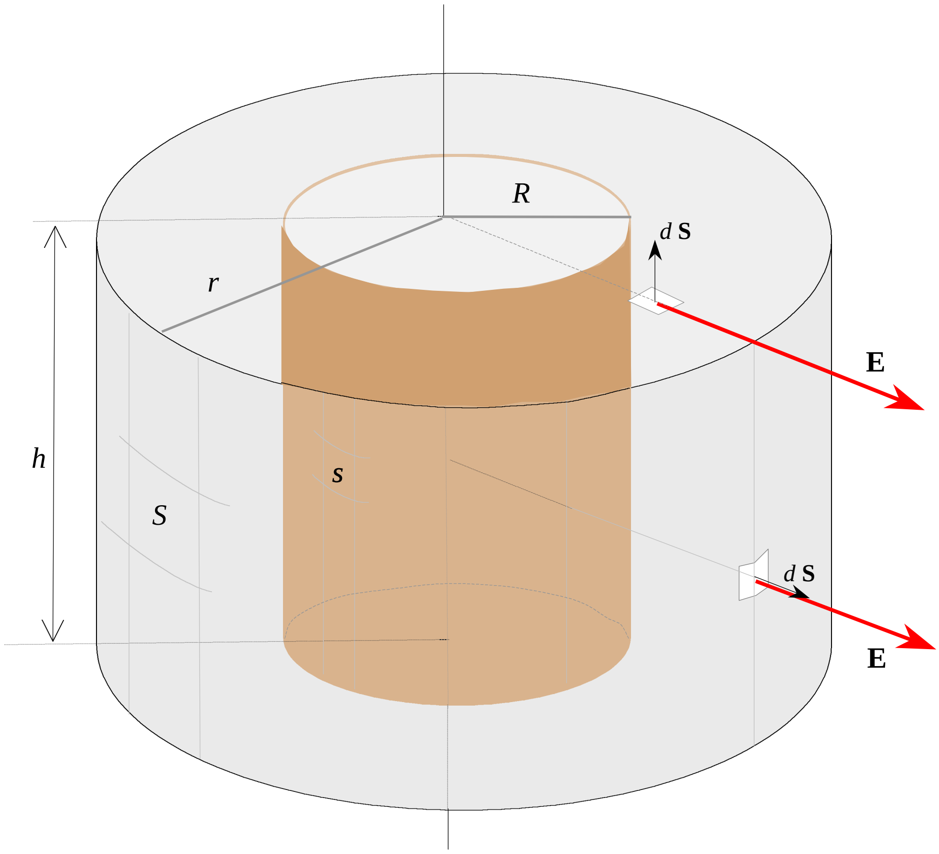
Del problema nº 11 se sabe que el campo es perpendicular a la carga plana infinita. Seleccionando la superficie *S* de la figura



de la ley de Gauss se tiene $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Problema 18 Calcular el campo eléctrico en todos los puntos del espacio de una distribución superficial de carga cilíndrica de radio *R*, longitud infinita y de densidad constante σ. Dibujar la gráfica de *E*.

SOLUCION



Por simetría, el campo eléctrico tiene dirección radial y su módulo es función de la distancia al eje. Seleccionando una superficie cilíndrica de radio *r* y altura *h* centrada con el cilindro de carga, el flujo del campo es

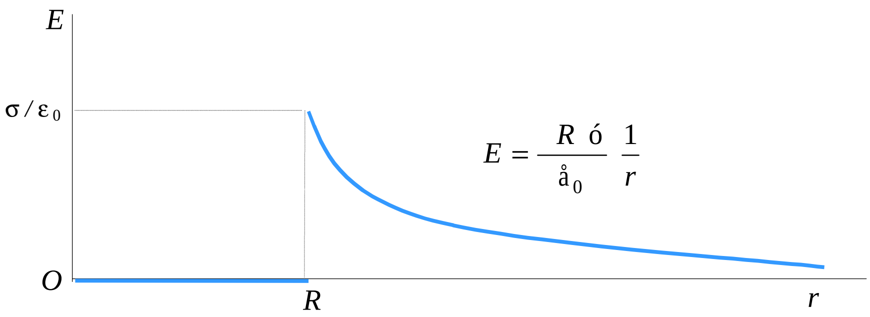
$$\Phi = 2\pi r h E$$

*D*el teorema de Gauss se tiene

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi r h E = \frac{2\pi R h \sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}}$$

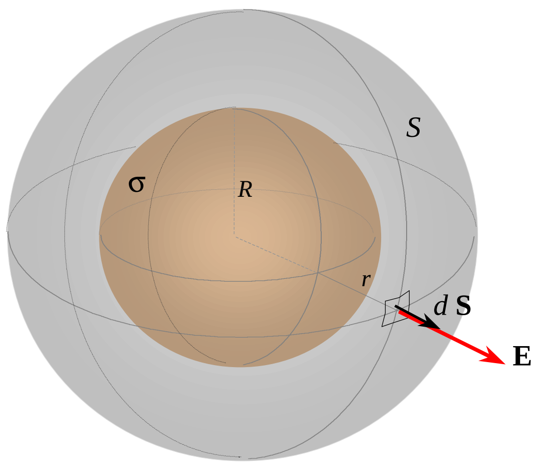
En los puntos interiores al cilindro de carga, el campo es nulo

Gráfica



Problema 19 Calcular el campo eléctrico de una distribución superficial de carga esférica de radio R y de densidad constante σ. Dibujar la gráfica de E .

SOLUCION



Por simetría, el campo eléctrico tiene dirección radial y su módulo es función de la distancia al centro. Seleccionando una superficie esférica de radio r concéntrica con la distribución de carga, el flujo del campo a través de ella es

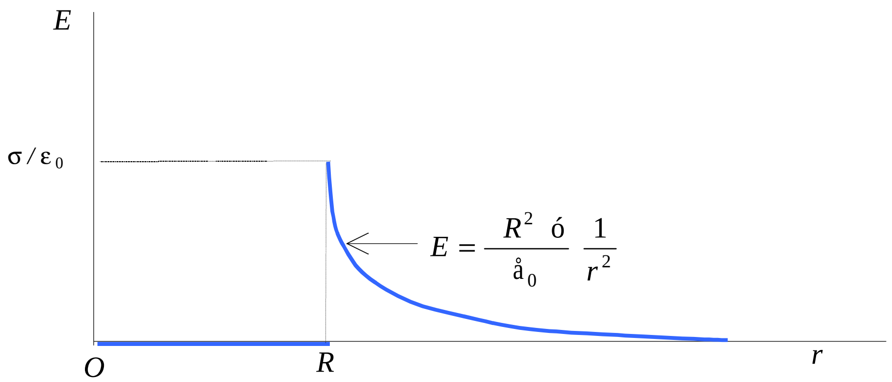
$$\Phi = 4\pi r^2 E$$

Del teorema de Gauss se tiene

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^2 \, E = \frac{4\pi R^2 \, \sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{R^2 \, \sigma}{\varepsilon_0} \, \frac{1}{r^2}}$$

En los puntos interiores a la esfera de carga, el campo es nulo.

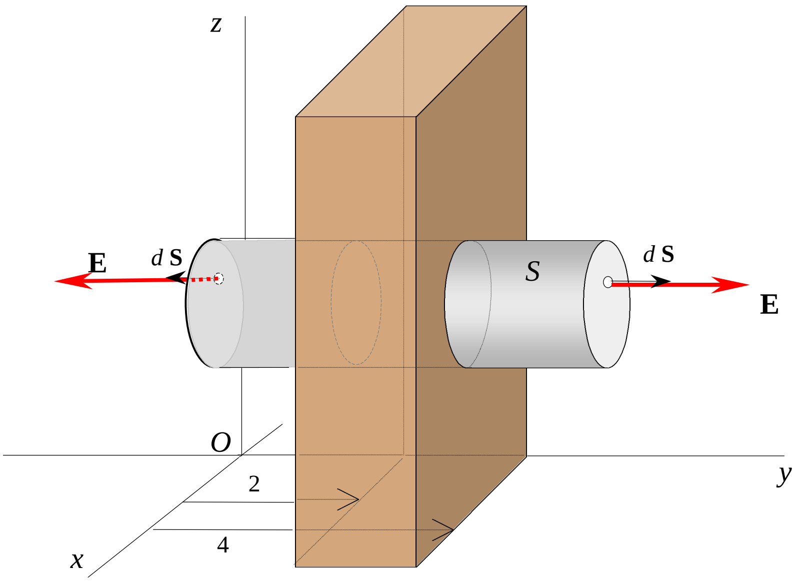
Gráfica



DISTRIBUCIONES CÚBICAS DE CARGA

Problema 20 En el volumen definido por $2 \le y \le 4$ cm (coordenadas cartesianas) , hay una distribución uniforme de carga de densidad $\rho = 5/\pi\ \mu C/m^3$. Determinar el campo eléctrico en los puntos exteriores y en los interiores de la distribución.

SOLUCION



Debido a la simetría, la dirección del campo eléctrico es perpendicular a la carga. El plano central de la carga es $y = 3$. Para puntos tales que $y > 3$, el campo está dirigido hacia la derecha y para puntos tales que $y < 3$, el campo está dirigido hacia la izquierda. Aplicando la ley de Gauss a la superficie cerrada *S*, formada por un cilindro centrado respecto del plano medio de la carga, se obtiene el valor de *E* en los puntos exteriores a la distribución. Para los puntos interiores, el cilindro está en el interior de la distribución.

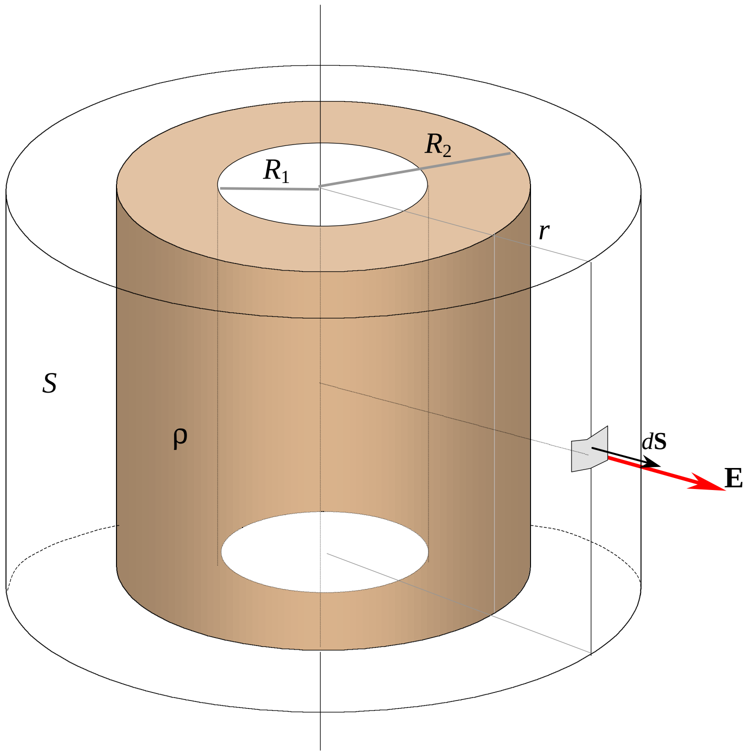
Para $y \le 2$ $\qquad \mathbf{E} = -1800\ \mathbf{j}$ V/m

Para $4 \le y$ $\qquad \mathbf{E} = 1800\ \mathbf{j}$ V/m

Para $2 \le y \le 4$ $\qquad \mathbf{E} = 1800\ (y - 3)\ \mathbf{j}$ V/m

Problema 21 Determinar el campo eléctrico de una distribución cúbica de carga de densidad ρ C/ m^3 contenida en una volumen cilíndrico de radios R_1 y R_2 de longitud infinita. Dibujar su gráfica.

SOLUCION

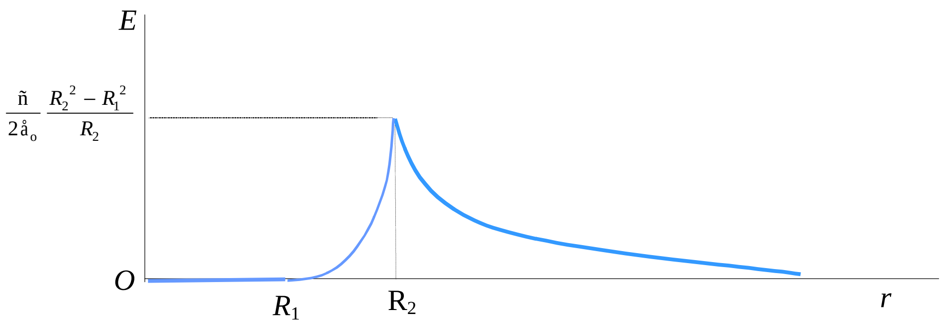


Por simetría, el campo tiene dirección radial radial. Aplicando la ley de Gauss a la superficie cilíndrica S, coaxial con la carga, de radio *r* y altura h, se obtiene el valor de *E*.

Para $\quad r \leq R_1 \quad \Rightarrow \quad E = 0$

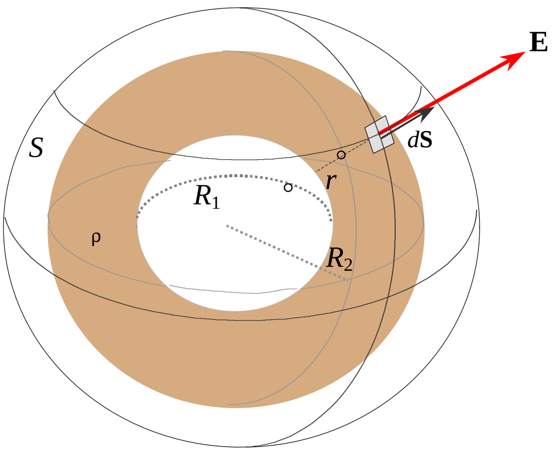
Para $\quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}\dfrac{r^2 - R_1^2}{r}$

Para $\quad R_2 \leq r \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{r}$



Problema 22 Determinar el campo eléctrico en todos los puntos del espacio de una distribución cúbica de carga de densidad ρ C/ m^3 contenida en el volumen de la capa esférica de radios R_1 y R_2 . Dibujar su gráfica.

SOLUCION



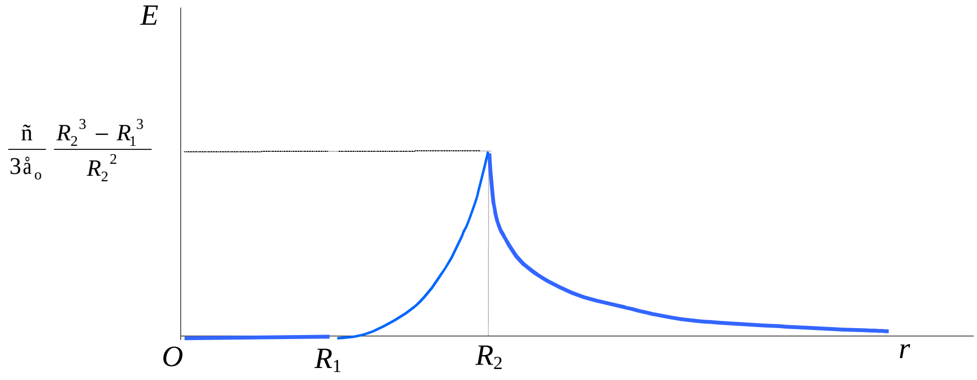
Por simetría, el campo tiene dirección radial. Aplicando la ley de Gauss a la superficie esférica de radio r, concéntrica con la carga, se tiene el valor de E.

Para $\quad r \le R_1 \quad \Rightarrow \quad E = 0$

Para $\quad R_1 \le r \le R_2 \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\dfrac{r^3 - R_1^3}{r^2}$

Para $\quad R_2 \le r \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}$

Gráfica



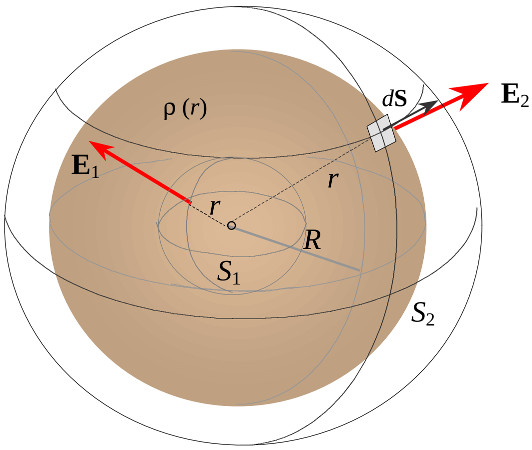
Problema 23 Una distribución de carga con simetría esférica cuya densidad está dada por $ñ(r) = k\,r$ C/m^3 para $r \leq R$, y $ñ(r) = 0$ para $r \geq R$, siendo k una constante. La carga total contenida en la esfera de radio R es Q (C). Calcular :
a) el valor de la constante k en función de Q y R
b) el campo en los puntos interiores y en los puntos exteriores de la carga
c) el potencial en la superficie $V(R)$ y el potencial en el origen $V(0)$
d) gráficas del campo y del potencial

SOLUCIÓN

a) La carga total está dada por $Q = \int_0^R dQ_r$; $dQ_r = ñ(r)\,4ð\,r^2\,dr$; $Q = k\,ð\,R^4$

$$Þ \qquad k = \frac{Q}{ð\,R^4} \quad \mathrm{C/m^4}$$

b) Debido a la simetría, en todos los puntos del espacio el campo es radial



Aplicando la ley de Gauss a la superficie S_1 se obtiene el campo E_1 en el interior de la carga.

$$4ð\,r^2\,E_1 = \frac{Q(r)}{e_0} = \frac{4ð\,k}{å_o}\int_0^r r^3\,dr \;\Rightarrow\; E_1 = \frac{Q}{4ð\,å_0}\,\frac{r^2}{R^4}$$

Aplicando la ley de Gauss a la superficie S_2 se obtiene el campo E_2 en el interior de la carga.

$$4ð\,r^2\,E_2 = \frac{Q}{å_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_2 = \frac{Q}{4ðå_0}\,\frac{1}{r^2}$$

c) El potencial y el campo están relacionados por la ecuación $\mathbf{E} = -\,Ñ\;\mathrm{V}$. Para r ³ R queda

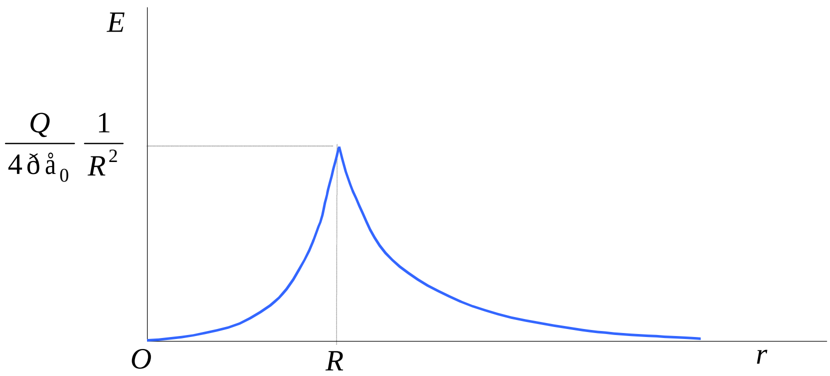
$$V_2 = \frac{Q}{4\text{ðå}_0}\,\frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad V_2(R) = \frac{Q}{4\text{ðå}_0}\,\frac{1}{R}$$

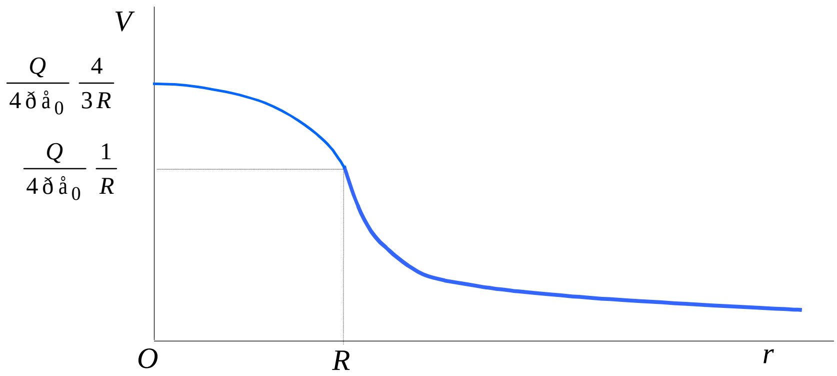
Para $r \leq R$ queda

$$V_1 = -\frac{Q}{4\text{ðå}_0}\,\frac{r^3}{3R^4} + cte \quad ; \quad cte = \frac{Q}{4\text{ðå}_0}\,\frac{4}{3R} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{Q}{4\text{ðå}_0}\,\frac{1}{3R}\left(4 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$V_1(0) = \frac{Q}{4\text{ðå}_0}\,\frac{4}{3R}$$

d) Gráficas





Problema 24 Una carga cúbica con simetría esférica de densidad $\rho(r) = \dfrac{\rho_0}{\left(1+\dfrac{r}{a}\right)^4}$ está distribuida por todo el espacio siendo ρ_0 y a constantes positivas. Determinar :

a) La carga total Q de la distribución.

b) El campo eléctrico $E(r)$

c) El potencial $V(r)$ de la distribución

SOLUCION

a) La carga total de la distribución está dada por

$$Q = \int_0^\infty \rho\, d\tau = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty \frac{r^2\ dr}{\left(1+\dfrac{r}{a}\right)^4}$$

Para resolver la integral se efectúa el cambio de variable $u = 1+\dfrac{r}{a}$; operando queda

$$Q = 4\pi\rho_0 a^3 \int_1^\infty \frac{(u-1)^2\ dr}{u^4} = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{3}\ \ \mathrm{C}$$

b) El campo eléctrico de una distribución de carga con simetría esférica, tiene dirección radial y su módulo E (r) depende únicamente de la distancia al centro de la distribución r ; estás son las condiciones para poder aplicar la ley de Gauss y determinar el valor del módulo. Como superficie de Gauss, se toma una superficie esférica de radio r centrada en el origen de la distribución.

$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r')\,d\tau = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{r'^2\,dr'}{(1+r'/a)^4}$$

Efectuando el cambio $u = 1+\dfrac{r'}{a}$ y operando como en el apartado **a)** queda

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{r}{(r+a)^3}$$

c) El campo eléctrico y el potencial están relacionados por la ecuación diferencial $\mathbf{E} = -\nabla V$; en el caso de simetría esférica solo queda la componente radial, luego se tiene

$$\frac{dV}{dr} = -E \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{r\,dr}{(r+a)^3} + cte$$

El potencial en el infinito es cero, luego la constante de integración también lo es.

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho_0 a^3}{6\varepsilon_0}\frac{2r+a}{(r+a)^2}}$$

Problema 25 El campo eléctrico en los puntos interiores de una esfera de radio R = 2 m está dado por $E_1 = \dfrac{5\times 10^{-5}}{\pi\,\varepsilon_0}\,r$ V/m siendo $r \le R$ la distancia al centro. Determinar :

a) Utilizando la Ley de Gauss, la carga total Q contenida en la esfera

b) La densidad cúbica de carga ρ

c) El campo en puntos exteriores a la esfera

d) El potencial $V\,(r)$ de la distribución dando su valor en el centro

SOLUCION

a) El campo eléctrico sobre la superficie esférica de radio R = 2, está dado por $E_1(2)$. El flujo del campo a través de dicha superficie es

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E}\,.\,d\,\mathbf{S} = E_1(2)\;4\pi\;2^2 = \frac{16\times 10^{-4}}{\varepsilon_0}$$

Según la ley de Gauss, el flujo es igual a la carga encerrada dividido por ε_0. Igualando se tiene la carga en el interior de la esfera

$$Q = 16\times 10^{-4}\;\;C$$

b) De $\nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ en coordenadas esféricas se tiene $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,E_1\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. Operando queda

$$\rho = \frac{15\times 10^{-5}}{\pi}\quad \mathrm{C/m^3}$$

c) El campo en los puntos exteriores a la esfera está dado por

$$E_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2} = \frac{144\times 10^5}{r^2}\quad \mathrm{V/m}$$

d) El potencial en los puntos exteriores es

$$V_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r} = \frac{144\times 10^5}{r}\quad \mathrm{V}$$

y el potencial en los puntos interiores

$$V_1 = 9\times 10^5\;(12 - r^2)\quad \mathrm{V}$$

El potencial en el centro es $$V_1(0) = 108\times 10^5\quad \mathrm{V}$$

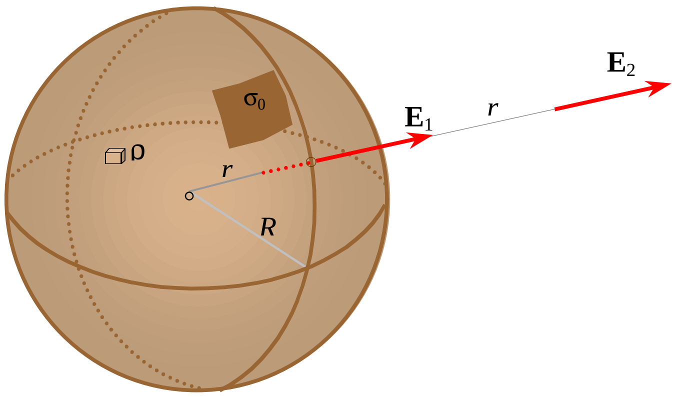
Problema 26 En el interior de una esfera de radio R se tiene una distribución de carga con simetría esférica y sobre la superficie una distribución superficial uniforme de densidad σ_0. El campo eléctrico E_1 en los puntos interiores a la esfera está dada por $E_1 = \dfrac{k\,r^2}{4\,\text{ð}\,\text{å}_0}$ y el campo eléctrico E_2 en los puntos exteriores a la esfera esta dado por $E_2 = \dfrac{1}{4\text{ð}\text{å}_0}\,\dfrac{R^2\left(k\,R^2 + 4\,k'\right)}{r^2}$; k y k' son constantes. Calcular :

a) La densidad cúbica ρ y la carga interior Q_1

b) La densidad superficial σ_0 y la carga superficial Q_2

c) El potencial $V(\,r\,)$

SOLUCIÓN



a) El campo y la densidad cúbica están relacionados por la ecuación

$$\nabla \circ \mathbf{E} = \frac{\text{ñ}}{\text{å}_0}$$

Aplicando la divergencia en coordenadas esféricas se tiene

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,E_1\right] = \frac{\text{ñ}}{\text{å}_0} \qquad \Rightarrow \qquad \text{ñ} = \frac{k\,r}{\text{ð}}\ \ \text{C/m}^3$$

La carga Q_1 está dada por

$$Q_1 = \int_0^R \text{ñ}\ 4\,\text{ð}\,r^2\,dr = k\ R^4 \ \ \text{C}$$

b) El campo creado por las cargas Q_1 y Q_2 en puntos exteriores a la esfera está dado por

$$E_2 = \frac{1}{4\,\text{ð}\,\text{å}_0}\,\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}$$

Sustituyendo el valor del enunciado y operando se tiene

$$Q_2 = 4k' R^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = \frac{k'}{\pi}$$

c) El potencial en los puntos exteriores a la esfera, es el creado por toda la carga situada en el centro de la esfera.

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}$$

El potencial en los puntos interiores a la esfera es la suma del potencial de la carga superficial Q_2 en la superficie mas el creado por la carga cúbica contenida en la esfera de radio $r < R$. La carga cúbica hasta r está dada por

$$Q_1(r) = \frac{k}{\pi}\int_0^r r' 4\pi r'^2 \, dr' = k r^4$$

El potencial en el interior es

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[4k' + k r^3\right] \text{ V}$$

Problema 27 Se dispone de una distribución cúbica uniforme de carga, esférica, de radio R y carga total Q_1, y sobre la superficie de radio R una carga Q_0 de densidad constante σ_0. El potencial en el interior de la esfera está dado por $V_1 = k_1 + k_2 r^2$ y el potencial en el exterior $V_2 = k_3 / r$ .Determinar :

a) los valores de las constante k_1, k_2 y k_3

b) el campo eléctrico E_1 para $r \leq R$ y el campo eléctrico E_2 para $r \geq R$

c) dibujar el perfil de las gráficas del campo y del potencial en función de la distancia al centro

SOLUCION

a) El campo y el potencial en los puntos exteriores a las distribuciones de carga son los mismos que generarían toda la carga concentrada en el centro. La carga Q_0 de la distribución superficial es $Q_0 = 4\pi R^2 \sigma_0$; el potencial de toda la carga en puntos exteriores será

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0 + Q_1}{r} = \frac{k_3}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_3 = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

La relación entre la densidad cúbica de carga y el potencial la proporciona la ecuación de Poisson. Aplicada al potencial en los puntos interiores se tiene

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_1}{\partial r}\right) = 6 k_2 \quad \Rightarrow \quad \rho = -6 k_2 \varepsilon_0$$

La carga Q_1 está dada por $\qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = \dfrac{4}{3}\,\pi\, R^3\,\rho = -\,8\,k_2\,\pi\,\varepsilon_0\,R_3$

Despejando queda $$\boxed{k_2 = -\,\frac{Q_1}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,R_3}}$$

El potencial es una función continua, luego se cumple que

$$V_1(R) = V_2(R) \qquad \Rightarrow \qquad k_1 + k_2\,R^2 = \frac{k_3}{R}$$

Operando se tiene

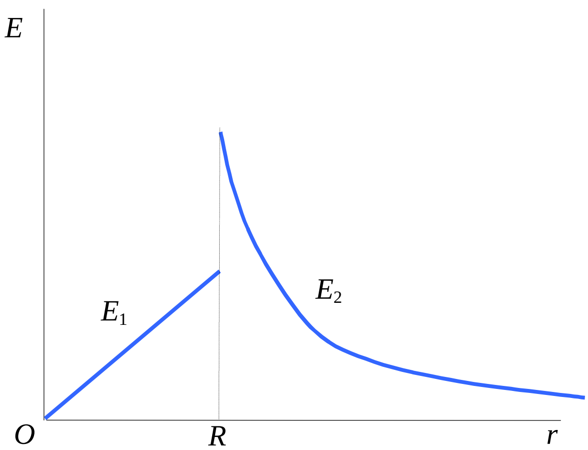
$$\boxed{k_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{2\,Q_0 + 3\,Q_1}{2\,R}}$$

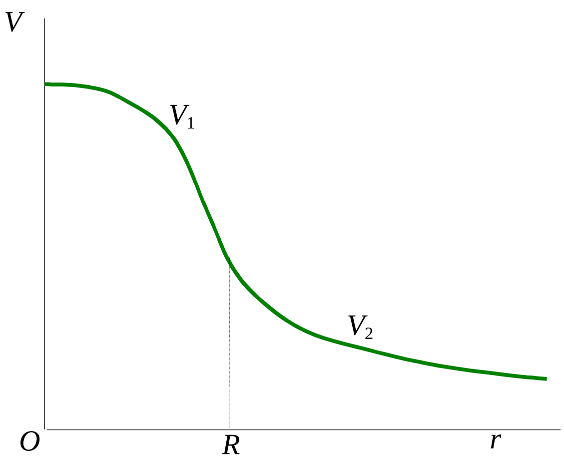
b) En cualquier punto el espacio, el campo y el potencial están relacionados por la ecuación $\mathbf{E} = -\nabla V$. Aplicada a los potenciales en los puntos interiores y exteriores se tienen los correspondientes campos

$$E_1 = -\,2\,k_2\,r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_1 = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{r}{R^3}}$$

$$E_2 = \frac{k_3}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q_0 + Q_1}{r^2}}$$

c) Gráficas





Problema 28 Se dispone de una distribución cúbica esférica de carga de radio R_0 cuya densidad está dada por $\rho = \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{1}{r}$ siendo la carga total Q_0. Concentricamente con la anterior, se tiene una distribución de carga superficial, uniforme, de radio R y carga total Q. Determinar:

a) El valor de la constante k y sus unidades y dar la expresión de la densidad cúbica ρ

b) El valor de la carga Q para que el campo eléctrico sea nulo en puntos tales que $r \geq R > R_0$

c) Si $Q = -Q_0/9$, calcular el valor de R para que el campo total sea nulo en $r = R$

Para el valor de R calculado en el apartado:

d) La expresión el campo eléctrico total $E(r)$ en todos los puntos del espacio. Dibuje su gráfica.

e) El potencial de la carga positiva y de la carga negativa. Dibujar sus gráficas.

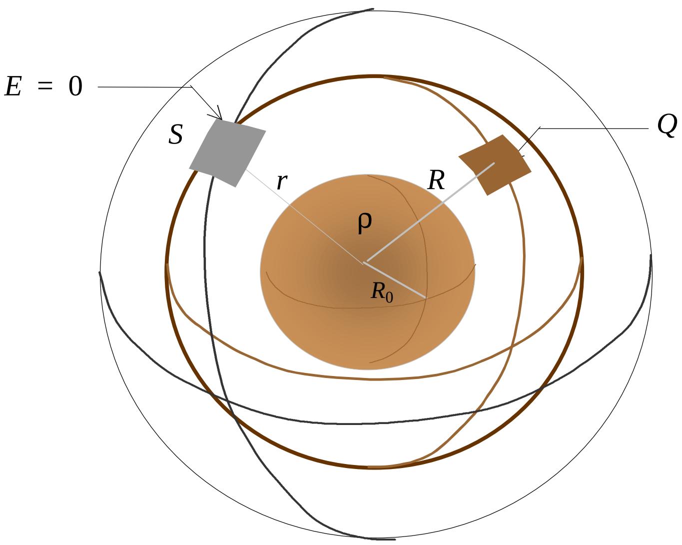
SOLUCION

a) La carga esférica está dada por

$$Q_0 = \int_0^{R_0} dQ = 2\,k \int_0^{R_0} r\,dr = k\,R_0^{\,2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{Q_0}{R_0^{\,2}} \ \mathrm{C/m^2}$$

Para la densidad cúbica de carga queda $\boxed{\rho = \dfrac{Q_0}{2\pi R_0^2}\dfrac{1}{r}}$

b) Debido a la simetría esférica de las cargas, el campo eléctrico es radial . Seleccionando como superficie de Gauss una superficie esférica de radio $r \geq R$, el campo eléctrico para dicha r será cero cuando la carga total encerrada sea cero.

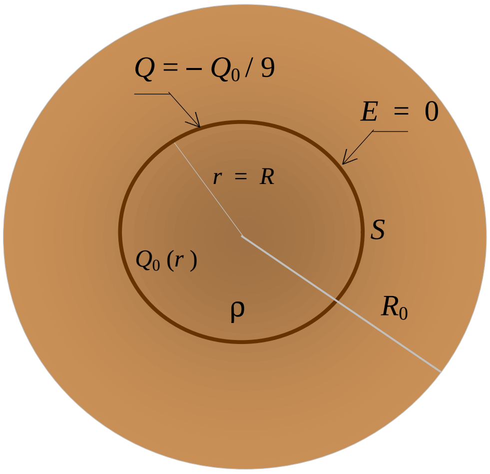


Para cargas esféricas, el campo en puntos exteriores a las cargas está dado por

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0 + Q}{r^2}$$

Su valor sea cero si $\quad Q_0 + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = -Q_0}$

c) Para el valor $Q = -Q_0/9$, la carga superficial debe de estar en el interior de la esfera de radio R_0 y a una distancia r del centro tal que la carga cúbica hasta r sea igual al valor absoluto de la carga superficial. La carga total contenida en el volumen esférico de radio r será cero y, según Gauss, el campo a la distancia $r = R$ del centro será cero.



Condición para que el campo sea nulo en R : $\Rightarrow$ $Q_0(r) + Q = 0$

Cálculo de $Q_0\,(\,r\,)$:

$$Q_0\,(r) = \int_0^r dQ = \frac{2\,Q_0}{R_0^{\;2}} \int_0^r r\,dr = \frac{Q_0\;r^2}{R_0^{\;2}}$$

Sustituyendo y operando queda

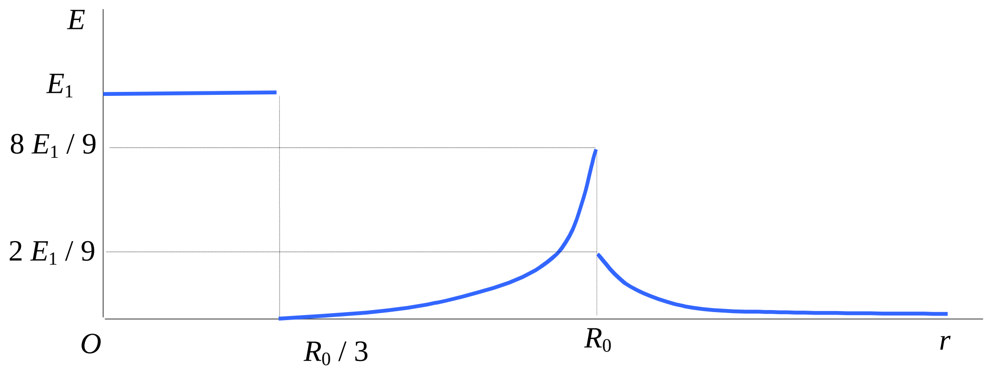
$$\boxed{R \;=\; \frac{R_0}{3}}$$

d) Representación gráfica de los campos en función de la distancia al centro.

E_1 es el campo en puntos tales que $0 \le r \le R_1$ $\Rightarrow$ $E_1 = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{Q_0(r)}{r^2} = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{Q_0}{R^2}$

E_2 es el campo en puntos tales que $R/3 \le r \le R$ $\Rightarrow$ $E_2 = \dfrac{Q_0}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{1}{9\,r^2}\right]$

E_3 es el campo en puntos tales que $R \le r \le \infty$ $\Rightarrow$ $E_3 = \dfrac{2\,Q_0}{9\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}$



e) De la relación $\mathbf{E} = -\text{Ñ}\, V$, se deducen los potenciales de las cargas. Las constantes de integración se determinan con la condición normal en el infinito y aplicando la continuidad de la función potencial.

Potencial de la carga positiva. ⇒
- V_{11} es el potencial para $r \leq R_0$
- V_{12} es el potencial para $R_0 \leq r$

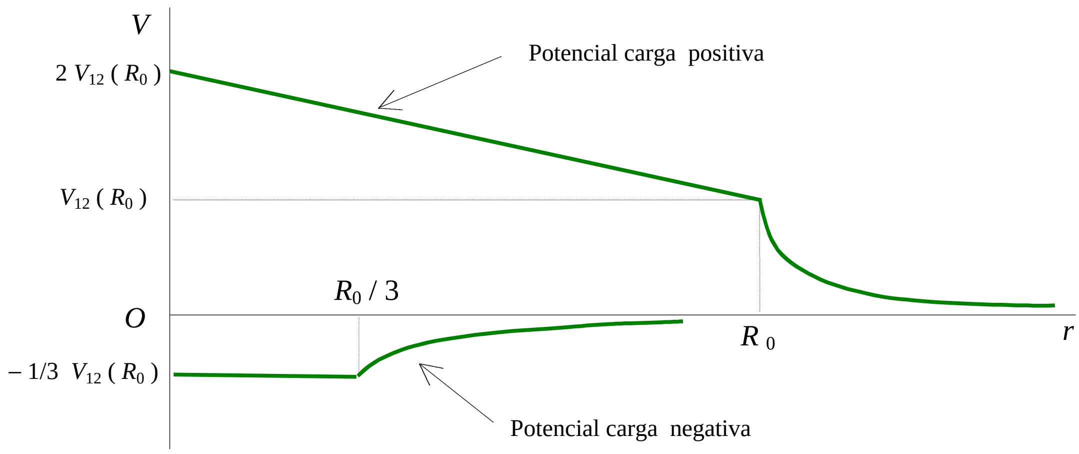
Operando se tiene :

$$V_{11} = \frac{1}{4\,\text{ð å}_0}\,\frac{Q_0}{R}\left(2 - \frac{r}{R}\right) \quad ; \quad V_{12} = \frac{1}{4\,\text{ð å}_0}\,\frac{Q_0}{r}$$

Potencial de la carga negativa. ⇒
- V_{21} es el potencial para $r \leq R_0/3$
- V_{22} es el potencial para $R_0/3 \leq r$

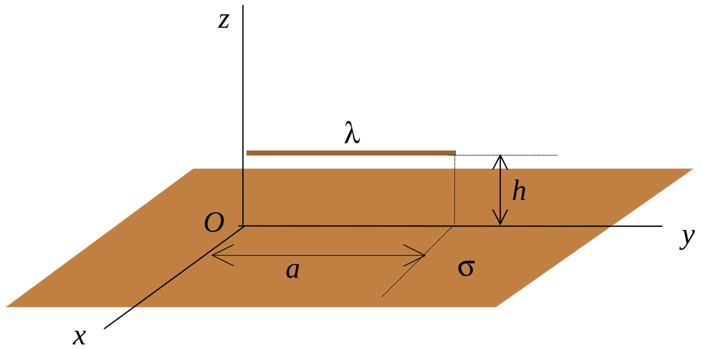
Operando se tiene :

$$V_{21} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{4\,\text{ð å}_0}\,\frac{Q_0}{R} \quad ; \quad V_{22} = -\frac{1}{9}\,\frac{1}{4\,\text{ð å}_0}\,\frac{Q_0}{r}$$



TRABAJO Y ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Problema 29 Una carga lineal de longitud *a* (m) y densidad constante λ C/m, está situada paralelamente a una lámina infinita carga de densidad constante σ C/m^2 , tal como se indica en la figura adjunta. Calcular el trabajo necesario para girar la carga lineal un ángulo de 90º hasta situarla sobre el eje z.



SOLUCION

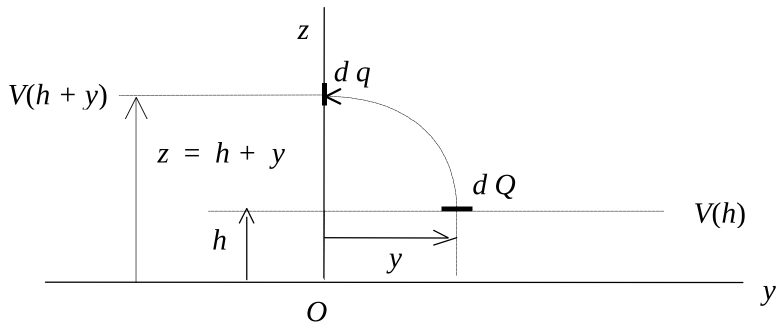
El campo eléctrico de una distribución de carga uniforme, plana e infinita, está dado por $E = \sigma/2\varepsilon_0$ y el potencial de la distribución es

$$V = cte - \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,z$$

El trabajo del campo eléctrico para trasladar la carga dQ desde un punto 1 a otro punto 2 , está dado por

$$dW = dQ\left(V_1 - V_2\right)$$

Al girar la carga lineal, el elemento de carga $dQ = \lambda\, dy$ situada a una distancia y del origen, pasa del potencial $V_1 = V(h)$ al potencial $V_2 = V(z) = V(h+y)$



El trabajo elemental del campo es $dW = \lambda\left(V_1 - V_2\right)dy = \dfrac{\sigma\,\lambda}{2\,\varepsilon_0}\,y\,dy$

Integrando entre 0 y a se tiene el trabajo del campo para girar toda la carga

$$\boxed{W = \int_0^a dW = \frac{\sigma\,\lambda\,a^2}{4\varepsilon_0}}$$

El trabajo de las fuerza exterior para girar la carga es igual y de signo contrario al trabajo del campo

Problemas

Problema 1 Una distribución de carga rectilínea, uniforme y de longitud infinita, se encuentra a lo largo del eje z siendo λ = 30/9 nC/m Determinar la fuerza que ejerce sobre una carga puntual q = 12 mC situada en el punto (8,6,7) m.

SOLUCION

$$\mathbf{F} = 144\left(4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}\right)10^{-6}\ \text{N} \qquad \Rightarrow \qquad F = 6\times10^{-2}\ \text{N}$$

Problema 2 Determinar el campo eléctrico en el punto P (-5,1,3) creado por dos distribuciones de carga rectilíneas infinitas de densidad λ = 5 nC/m situadas paralelamente al eje x , pasando por los puntos (0,- 2, 0) y (0,4,0) respectivamente. Las distancias están expresadas en metros.

SOLUCION

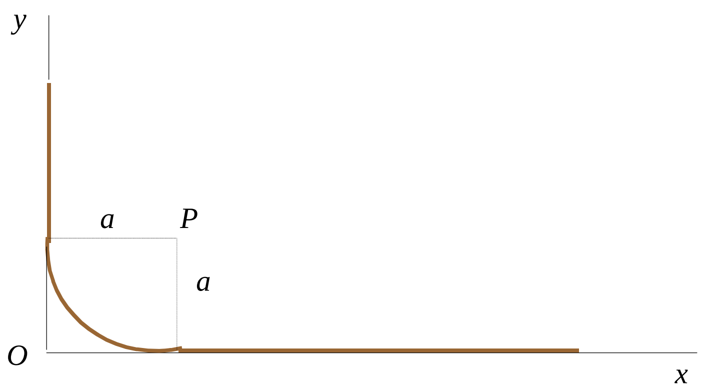
$$\mathbf{E} = 30\ \mathbf{k}\ \text{V/m}$$

Problema 3 Una carga lineal infinita de densidad λ = 5 nC/m paralela al eje z está situada en el punto de coordenadas $x = -3$ m, $y = -4$ m. Determinar el valor q de una carga puntual y su localización para que el campo resultante en el origen sea cero, si la distancia de q al origen es de 1 m.

SOLUCION

$$q = 2\ \text{nC} \quad \text{situada en el punto } (0.6, 0.8, 0)$$

Problema 4 Una distribución lineal de carga de densidad constante λ tiene la forma indicada en la figura. Las semirectas son de longitud infinita. Determinar el campo en el punto P.



SOLUCION

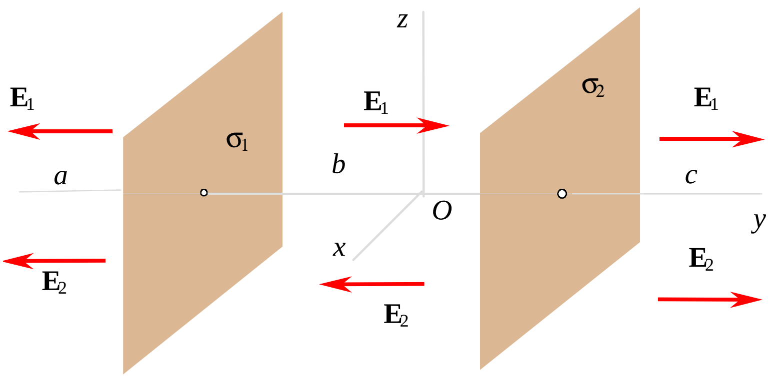
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a}\left(\mathbf{i} + \mathbf{j}\right)$$

Problema 5 Una carga superficial plana infinita de densidad $\sigma = (-1/3\pi)$ nC/m^2 , está situada en z = 5 m y paralela al plano x-y. Otra carga lineal rectilínea infinita de densidad $\lambda = (-25/9)$ nC/m ,está situada en $z = -3$ m , y = 5 m, paralela al eje x . Determinar el campo eléctrico resultante en el punto (0,1,0).

SOLUCION

$$\mathbf{E} = \frac{2}{9\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{j} \quad \text{V/m}$$

Problema 6 Dos distribuciones de carga laminar de densidades uniformes σ_1 y σ_2 ambas positivas, están situadas en $y = -5$ m, y $y = 7$ m respectivamente. Determine el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.



SOLUCION

Para valores de y tales que $y < -5$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\mathbf{j}$$

Para valores de y tales que $-5 < y < 7$

$$\mathbf{E} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{j}$$

Para valores de y tales que $7 < y$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\mathbf{j}$$

Problema 7 Determinar el flujo del campo eléctrico **E** de una carga puntual q situada en el origen de coordenadas a través de una de las caras de un cubo de arista l centrado en el origen.

SOLUCION

$$\Phi = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

Problema 8 Determinar el flujo del campo eléctrico **E** de una carga puntual *q* situada en el vértice de un cubo de arista *l* .

SOLUCION

$$\Phi = \frac{q}{8\varepsilon_0}$$