PROBLEMAS

DE

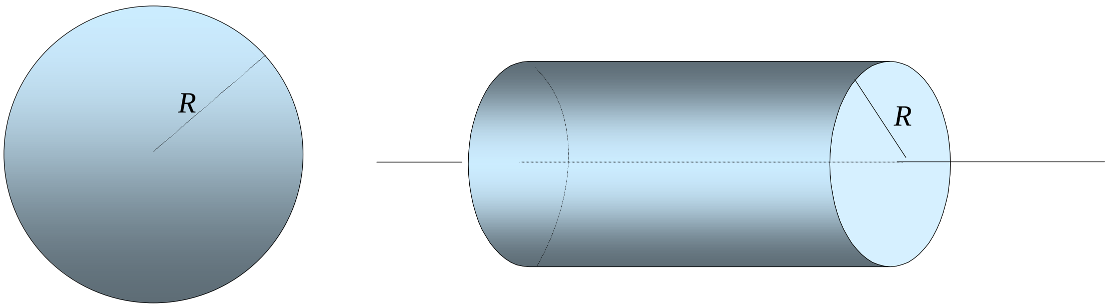
ELECTROESTÁTICA

III Campo electrostático en los conductores

Prof. J. Martín

CONDUCTORES CARGADOS EN EL VACIO

Problema 1 Calcular : a) la capacidad de una superficie esférica de radio *R* ; b) la capacidad por unidad de longitud de una superficie cilíndrica de longitud infinita y radio *R* .



a) *b*)

SOLUCION

a) *La densidad superficial de carga sobre la superficie esférica es constante. La relación entre la carga y el potencial de un conductor mide la capacidad del conductor.*

$$C = \frac{Q}{V}$$

El conductor cargado se comporta como una distribución superficial esférica de carga. El potencial en la superficie está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R} \qquad \Rightarrow \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

b) *La densidad superficial de carga sobre la superficie cilíndrica es constante. La relación entre la carga y el potencial de un conductor mide la capacidad del conductor.*

$$C = \frac{Q}{V}$$

Seleccionando un trozo de cilindro de longitud h, el campo eléctrico a una distancia del eje $r > R$ *está dado por*

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{R\sigma}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \Psi = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

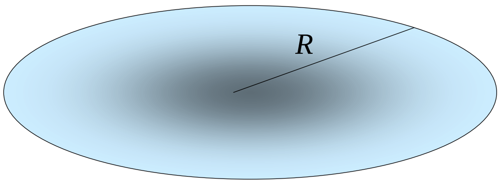
El potencial en la superficie está dado por

$$V = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2\pi h R\sigma}{2\pi h\, \varepsilon_0} \ln\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{Q}{2\pi h\, \varepsilon_0} \ln\left(\frac{1}{R}\right)$$

Opernado se tiene

$$\frac{C}{h} = \frac{2\,\pi\varepsilon_0}{\ln(1/R)}$$

Problema 2 Determinar la capacidad de una superficie conductora de forma circular de radio R .



SOLUCION

Suministremos a la superficie cierta cantidad de carga Q. La densidad superficial de carga es

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

El campo eléctrico en los puntos del eje del disco es

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

y el potencial

$$\Psi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]$$

El potencial de la superficie se obtiene haciendo z = 0 *en la ecuación del potencial,* $V = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

Sustituyendo σ y operando se obtiene la capacidad

$$C = 2\pi\varepsilon_0 R$$

Problema 3 Una esfera conductora de radio R está conectada al potencial V_0 . Otra esfera conductora de radio R' descargada, se encuentra a una gran distancia de la primera (no se ejercen influencia). Con un hilo conductor muy delgado (capacidad despreciable) se unen ambas esferas. Calcular : a) la capacidad del conjunto ; b) el potencial común de ambas esferas ; c) la carga que adquiere la esfera de radio R'.

SOLUCION

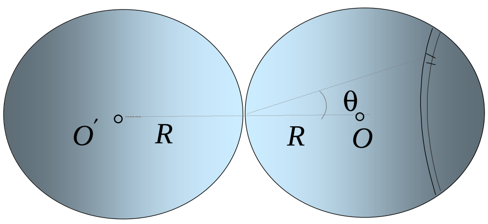
Carga de la esfera de radio R $\Rightarrow$ $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$

a) *La capacidad es una cantidad aditiva. La capacidad del conjunto es* $C = 4\pi\varepsilon_0 (R + R')$

b) *La carga se reparte entre las dos esferas ; el potencial común es* $V = \dfrac{Q_0}{C} = \left[\dfrac{1}{1+ R'/R}\right] V_0$

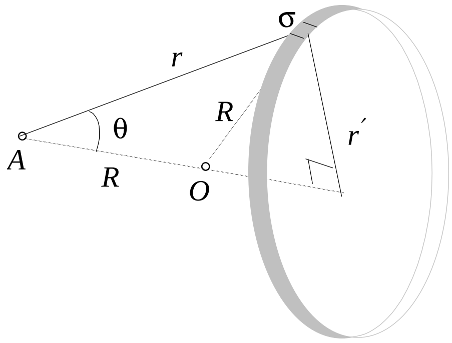
c) *La carga que adquiere la segunda esfera es* $Q' = C' V = 4\pi\varepsilon_0 \left[\dfrac{R'}{1+ R'/R}\right] V_0$

Problema 4 Dos esferas conductoras de radio R se tocan en un punto. El conjunto se conectada a un potencial V. La densidad superficial de carga sobre la superficie de ambas esferas está dada por $\sigma = \sigma_0 \cos^2\theta$ siendo θ el ángulo indicado en la figura adjunta. Determinar la capacidad de la superficie del conjunto



SOLUCION

La capacidad es una cantidad aditiva. La capacidad total será el doble de la capacidad de una de las dos esferas. Sea A el punto de contacto de las dos esferas.



El potencial en A debido a la carga contenida en el área diferencial dS_θ *situada a la distancia r de A, está dado por*

$$dV_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d\,q_\theta}{r}$$

De la figura se tiene que $r' = R\,\mathrm{sen}\,2\,\theta$ *y* $dS_\theta = (\,2\,R\,d\,\theta\,)\,2\,\pi\,r'$ *; efectuando el producto* $\sigma\,dS_\theta$ *se obtiene la carga* $d\,q_\theta$*. La distancia de la carga al punto A es* $r = 2\,R\,\cos\,\theta$*. Sustituyendo e integrando queda el potencial del conjunto*

$$V = \frac{R\,\sigma_0}{2\,\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,2\,\theta\cos^2\theta\,d\,\theta \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{2\,R\,\sigma_0}{3\,\varepsilon_0}$$

La carga del conjunto es el doble de la carga de una de las esferas.

$$Q = 2\int_0^{\pi/2} d\,q_\theta = 4\,\pi\,R^2\,\sigma_0$$

La capacidad del conjunto se obtiene del cociente entre la carga y el potencial

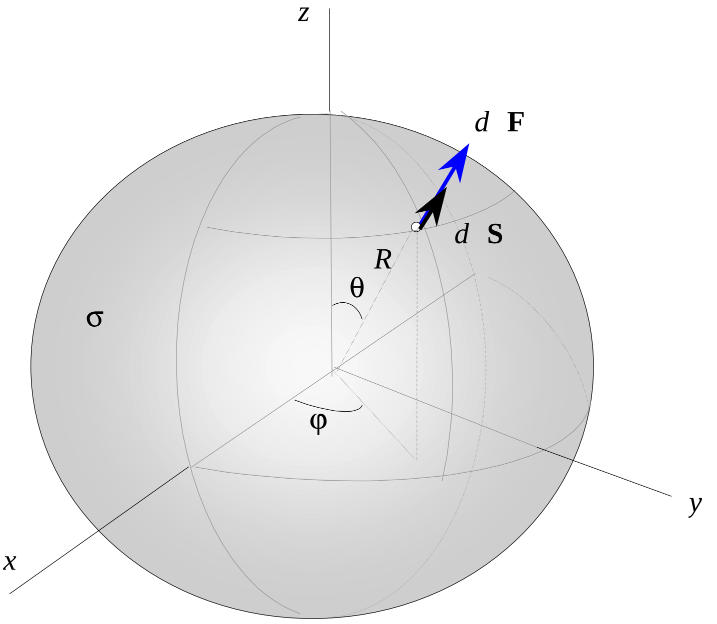
$$C = \frac{Q}{V} = 6\,\pi\,\varepsilon_0\,R$$

Problema 5 Una esfera conductora de radio *R* esta conectada a un potencial V. Determinar la fuerza que se ejercen entre si las cargas contenidas en dos casquetes semiesféricos .

SOLUCION

La presión electrostática estás dada por $p = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ *siendo σ la densidad superficial de carga del conducto. La fuerza por unidad de superficies*

$$d\,\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,d\,\mathbf{S}$$



El potencial expresado en función de la densidad superficial de carga está dado por $V = \sigma R / \varepsilon_0$; *el elemento de área en coordenadas esféricas es*

$$d\,S = R^2 \;\mathrm{sen}\,\theta\, d\,\varphi\;\; d\,\theta$$

El vector unitario es la dirección radial es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\;\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\;\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$$

Por simetría, la fuerza resultante total sobre la semiesfera a la derecha del plano x-z, tiene únicamente componente según el eje y. Sustituyendo e integrando queda

$$F = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 V^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

operando se tiene la fuerza sobre la semiesfera.

$$F = \frac{1}{2}\,\pi\,\varepsilon_0 V^2$$

Problema 6 Un globo desinflado de material conductor se conecta a un potencial V y adquiere forma esférica de 25 cm de radio. Determinar : a) el potencial máximo para que adquiera la forma esférica sin que el campo en la superficie sobrepasa el valor del campo de ruptura en el aire (3×10^6 V/m) ; b) la sobre presión en el interior del globo que produciría el mismo efecto.

SOLUCION

a) *La relación entre el potencial y el campo en los puntos de una superficie esférica conductora está dada por*

$$V = R\,E$$

Sustituyendo valores se tiene $V = 7{,}5 \times 10^5\ \mathrm{V}$

b) *La fuerza ejercida por la sobrepresión* Δp *sobre cada elemento de superficie del globo, ha de ser igual a la ejercida por las cargas eléctricas. Igualando se tiene*

$$\Delta p = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}$$

La densidad superficial de carga y el potencial están relacionados por la ecuación $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R}$

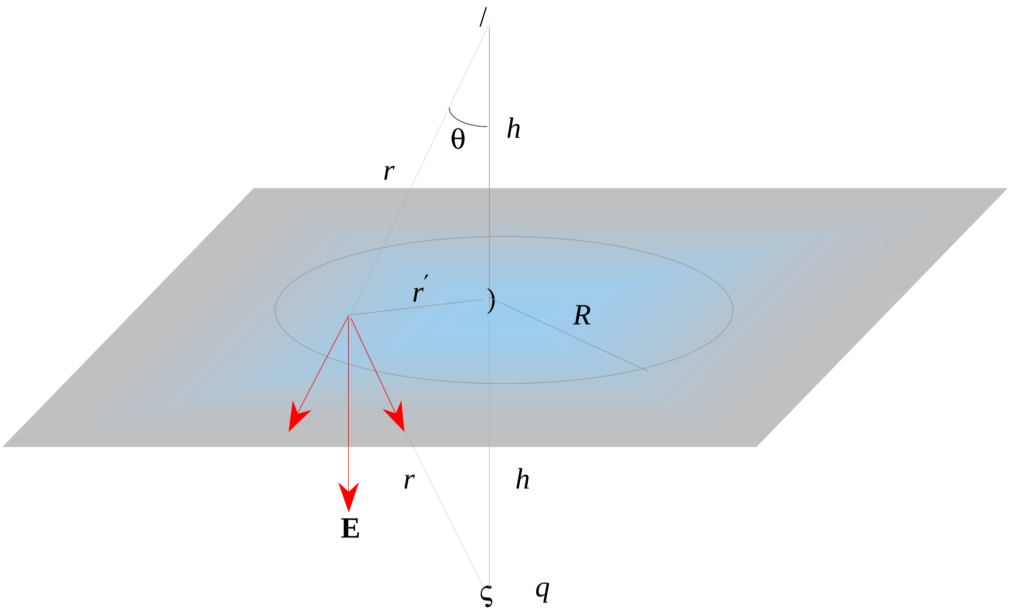
Sustituyendo y operando se tiene

$$\Delta p = 10\ \mathrm{N/m^2}$$

Problema 7 Una carga puntual $+q$ se encuentra a una altura h sobre un superficie conductora plana infinita conectada a tierra. Determinar : a) la carga inducida en el interior de una circunferencia de radio R cuyo centro es el pie de la perpendicular de q a la superficie ; b) el valor de R para que la carga inducida sea igual a $-q/2$; c) demostrar que la carga total inducida en la superficie infinita es igual a $-q$.

SOLUCION

a) *El potencial de la lámina es cero. Se puede suponer que se elimina la lámina y que se coloca la carga $-q$ a la distancia h del pie de la perpendicular y alineada con $+q$. El potencial que crean ambas cargas en los puntos del plano medio es cero .La carga $-q$ se le llama la carga imagen de la primera. Ambas forman un sistema eléctricamente equivalente a la carga inicial y la superficie conductora.*



El campo eléctrico en un punto cualquiera del plano es el campo en el mismo punto de la superficie conductora. A una distancia r' del pie de la perpendicular, el campo resultante **E** *es perpendicular a la superficie y dirigido hacia abajo . Tomando el origen de coordenadas en el pie de la perpendicular y los ejes x-y contenidos en el plano, la expresión del campo es*

$$\mathbf{E} = E_z\,\mathbf{k}$$

De la figura se deduce que $E_z = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ *; la densidad superficial de carga se obtiene de*

$$\sigma = -\varepsilon_0\, E = -\varepsilon_0 \left|E_z\right| = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{h\,q}{2\pi}\,\frac{1}{\left(r'^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

La carga contenida entre los círculos de radios r' *y* $r' + d\,r'$, *está dada por* $d\,q' = \sigma\, 2\pi\, r'\, d\,r'$. *La carga inducida contenida en el círculo de radio R se obtiene de la integral*

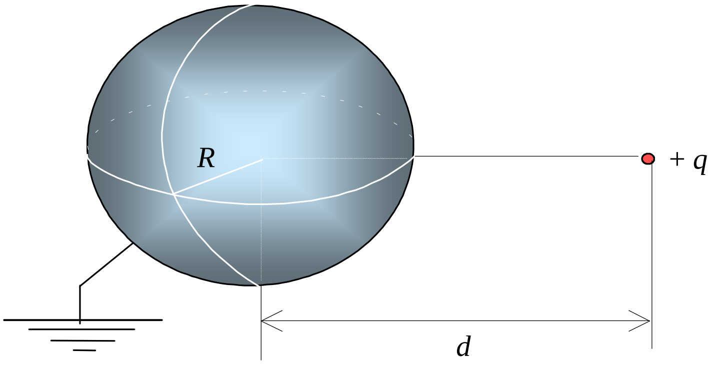
$$q(R) = \int_0^R d\,q' \qquad \Rightarrow \qquad q(R) = -\,q\left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right] \qquad (1)$$

b) *Haciendo* $q(R) = -\,q/2$, *igualando con la ecuación* (1) *y operando se tiene* $R = h\sqrt{3}$

c) *La carga total inducida se obtiene tomando límites en la ecuación* (1) *cuando R tiende a infinito*

$$q' = \lim_{R\to\infty} q(R) = -q$$

Problema 8 Una esfera conductora de radio R descargada esta conectada a tierra tal como se muestra en la figura adjunta. A una distancia $d > R$, se coloca una carga puntual $+q$. Calcular : a) la carga inducida en la esfera ; b) el campo eléctrico E en la superficie de la esfera; c) la fuerza ejercida sobre la carga q.

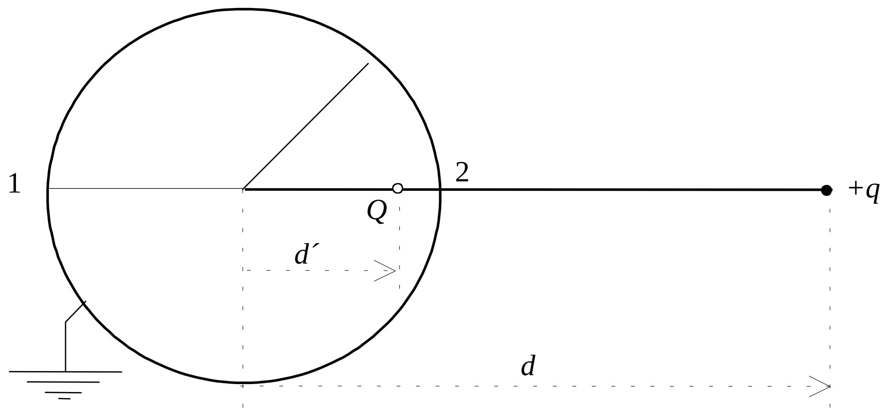


SOLUCION

a) *El potencial en los puntos de la superficie de la esfera es cero. Sea Q la carga imagen situada a una distancia* d' *del centro de la esfera. El potencial creado por las cargas Q y q ha de ser cero sobre los puntos de la superficie esférica. Seleccionemos los puntos* 1 *y* 2 .

Potencial en el punto 1 $$\frac{q}{d + R} + \frac{Q}{d' + R} = 0$$

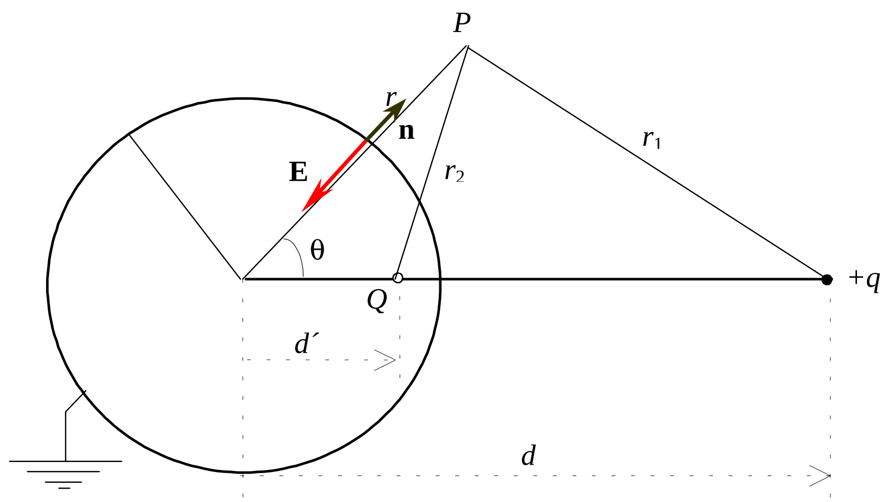
Potencial en el punto 2 $$\frac{q}{d - R} + \frac{Q}{R - d'} = 0$$



El sistema de dos ecuaciones proporciona la posición y el valor de la carga imagen

$$d' = R^2 / d \qquad ; \qquad Q = -R\,q / d$$

b) *La carga inducida sobre la esfera es la carga imagen que se distribuye sobre la superficie esférica con una densidad superficial de carga* σ . *El campo eléctrico en los puntos de la superficie de la esfera tiene dirección radial y está dirigido hacia el centro de la esfera.*



El potencial en el punto P a la distancia r del centro O de la esfera está dado por

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1} + \frac{Q}{r_2}\right]$$

De la figura se deduce que

$$r_1^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta$$

$$r_2^2 = R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\theta$$

El campo eléctrico en la superficie de la esfera esta dado por

$$E = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}$$

Operando queda

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2 - R^2}{R}\frac{1}{\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)^{3/2}}\ \mathbf{n}$$

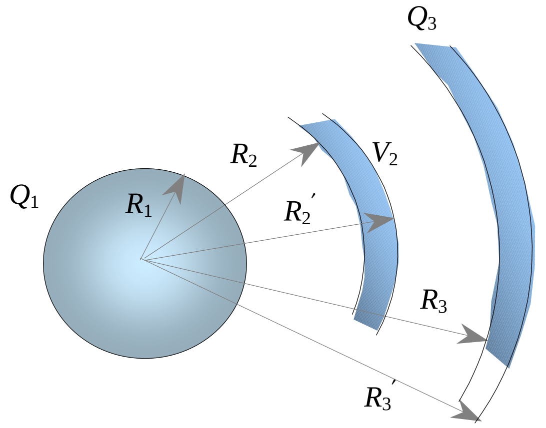
La densidad superficial de carga es

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi}\frac{d^2 - R^2}{R}\frac{1}{\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)^{3/2}}$$

c) *La fuerza ejercida por la carga inducida sobre la carga q es la fuerza que la carga imagen Q ejerce sobre ella, cuyo valor se obtiene de la ley de Coulomb*

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\left(d - d'\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R\,d}{\left(d^2 - R^2\right)^2}$$

Problema 9 Una esfera conductora de radio R_1 tiene una carga Q_1. Se colocan concentricamente con ella, dos capas metálicas de radios interiores R_2 y R_3 y radios exteriores R_2' y R_3' respectivamente. La capa intermedia se conecta a un potencial V_2 y la capa externa tiene una carga Q_3. Determinar : a) el potencial V_1 de la esfera interior ; b) el potencial V_3 de la esfera exterior ; c) la carga Q_2 de la capa intermedia



SOLUCION

a) *La diferencia de potencial entre la esfera* 1 *y la primera capa es*

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dr}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = V_2 + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

b) *La carga de cada capa metálica es la suma de la carga interior mas la carga exterior. En el interior de los conductores el campo eléctrico es nulo, luego las cargas de las superficies enfrentadas son iguales y de signo opuesto. La carga del conductor* 2, *es* $Q_2 = -Q_1 + Q_2'$ *y la carga del conductor* 3, *es* $Q_3 = -Q_2' + Q_3'$.

La superficie exterior de la capa externa no está en influencia, luego $Q_3' = 4\pi\varepsilon_o R_3' V_3$

La carga de la capa 2 *es* $Q_2 = -Q_1 + Q_2'$; *la diferencia de potencial entre el conductor* 2 *y el conductor* 3 *está dada por*

$$V_2 - V_3 = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0}\int_2^3 \frac{dr}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = V_3 + \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_3}\right) \qquad (1)$$

De $\quad Q_3 = -Q_2' + Q_3'$ *se tiene* $\quad Q_3 = -Q_2' + 4\pi\varepsilon_o R_3' V_3 \qquad (2)$

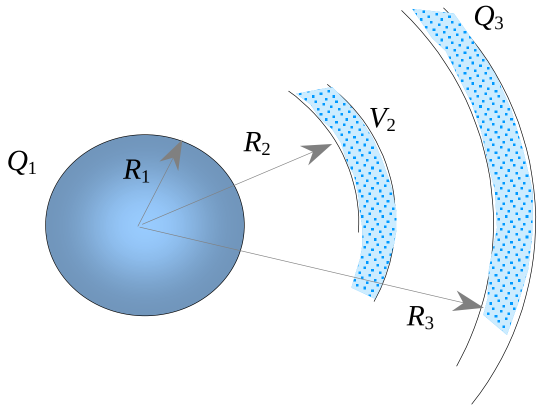
Eliminando Q_2' *entre las ecuaciones* (1) *y* (2) *y operando se tienen*

$$V_3 = \frac{V_2 + \dfrac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2'} - \dfrac{1}{R_3}\right)}{1 + \dfrac{R_3'}{R_2'} - \dfrac{R_3'}{R_3}} \qquad (3)$$

c) *Sustituyendo en la ecuación* $Q_2 = -Q_1 + Q_2'$ *la expresión de* Q_2' *obtenida de la ecuación* (2) *y teniendo en cuenta la ecuación* (3), *se obtiene la carga* Q_2

$$Q_2 = -(Q_1 + Q_3) + \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2' R_3 R_3' V_2 + R_3' (R_3 - R_2') Q_3}{R_2' R_3 + R_3 R_3' - R_2' R_3'}$$

Problema 10 Una esfera conductora de radio R_1 = 5 cm tiene una carga $Q_1 = 10^{-8}$ C . Se colocan dos capas metálicas de espesor 1 cm y radios interiores de R_2 = 6 y R_3 = 8 cm respectivamente, situadas concentricamente con la esfera interior. La capa intermedia, conductor 2, se conecta a un potencial de V_2 = 7850 V y a la capa externa, conductor 3, se le da una carga de $Q_3 = 2\times 10^{-8}$ C. Determinar : a) el potencial V_1 de la esfera interior; b) la carga Q_2 del conductor 2 ; c) el potencial V_3 del conductor 3.



SOLUCION

La carga de cada capa metálica es la suma de la carga interior mas la carga exterior. En el interior de las capas metálicas, el campo eléctrico es nulo, luego las cargas de las superficies esféricas enfrentadas son iguales y de signo opuesto. La carga de la primera capa esférica, conductor 2, *será* $Q_2 = -Q_1 + Q_2^{ex}$ *y la carga de la segunda capa esférica, conductor* 3, *será* $Q_3 = -Q_2^{ex} + Q_3^{ex}$.

La superficie exterior de la capa externa del conductor 3 *no está en influencia, luego su carga es* $Q_3^{ex} = 4\pi\varepsilon_o (R_3 + 1) V_3$

a) *La diferencia de potencial entre la esfera* 1 *y la primera capa es*

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dr}{r^2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 + \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad V_1 = 8150 \text{ V}$$

b) *La carga de la capa 2 es* $Q_2 = -Q_1 + Q_2^{ex}$ *; la diferencia de potencial entre los conductores* 2 *y* 3 *, está dada por*

$$V_2 - V_3 = \frac{Q_2^{ex}}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_2^3 \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_2 = V_3 + \frac{Q_2^{ex}}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2+1} - \frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow 7850 = V_3 + \frac{9\times 10^{11}}{56}\,Q_2^{ex}$$

De $Q_3^{ex} = 4\,\pi\,\varepsilon_o\,(R_3 + 1)\,V_3$ *se tiene* $Q_3^{ex} = 10^{-11}\,V_3$ *; pero* $Q_3^{ex} = -Q_2^{ex} + 2\times 10^{-8}$,
y de ambas queda

$$10^{-11}\,V_3 = -Q_2^{ex} + 2\times 10^{-8}$$

Operando se tiene $Q_2^{ex} = 5{,}0 \times 10^{-8}$ C $\Rightarrow$ $Q_2 = 4{,}0 \times 10^{-8}$ C

c) *El potencial del conductor* 3 *es* $V_3 = 7000$ V

Problema 11 Una esfera conductora de radio R_1 se le rodea con dos capas esféricas de radios R_2 y R_3, ambas de espesor despreciable y dispuestas concentricamente con la primera. Inicialmente los tres conductores están descargados. Determinar el potencial y la carga de cada una de ellos si: a) el conductor 3 se conecta a una tensión V_0 ; b) a continuación se desconecta el conductor 3 de la tensión y se conecta la esfera 1 a la tensión V_0 ; c) finalmente se desconecta la esfera 1 de la tensión V_0 y se conecta la esfera 2 a tierra .

SOLUCION

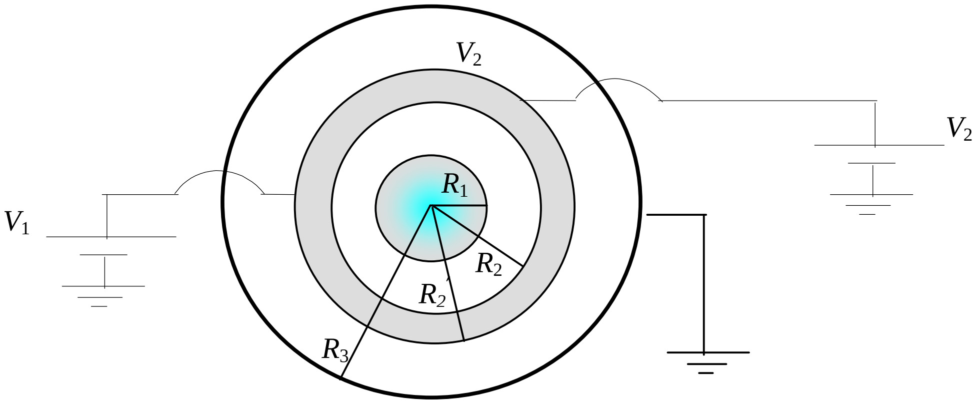
a) *Potenciales* $V_1 = V_2 = V_3 = V_o$; *cargas*
$Q_1 = Q_2 = 0$ *y* $Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\,R_3\,V_0$

b) *Potenciales* $V_1 = V_2 = V_3 = V_o$; *cargas*
$Q_1 = Q_2 = 0$ *y* $Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\,R_3\,V_0$

c) *Potenciales* $V_1 = V_2 = 0$; $V_3 = \left(\dfrac{R_3 - R_2}{R_3}\right)V_0$

Cargas $Q_1 = 0$; $Q_2 = -4\pi\varepsilon_0\,R_2\,V_0$; $Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\,R_3\,V_0$

Problema 12 Se disponen de tres conductores esféricos concéntricos, el interior de radio R_1 , el intermedio de radios R_2 y R_2' y el exterior de radio R_3 y grosor despreciable. La esfera interior y la capa intermedia están conectados a potenciales V_1 y V_2 ($V_1 > V_2$) y el conductor 3 conectado a tierra.. Calcular : a) las cargas de cada conductor, Q_1, Q_2, Q_3 ; b) Se desconecta de tierra el conductor 3 y se conecta a tierra la esfera interior, manteniendo la intermedia conectada al potencial V_2. Dar la expresión de las cargas de los conductores Q_1', Q_2', Q_3' y el potencial V_3 del tercer conductor ; c) **)** Dar valores numéricos en los apartados a) y b) cuando R_1 = 0,5 m, R_2 = 0,9 m, R_2' = 1,2 m , R_3 = 1,5 m, V_1 = 3000 V y V_2 = 1000 V ; d) Dibujar las gráficas del potencial en función de la distancia al centro de las esferas para a) y b)



SOLUCION

a) *La diferencia de potencial entre el conductor 1 y el conductor 2 es igual a la circulación del campo entre ambos conductores .Integrando y operando se tiene la carga* Q_1.

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E\,dr \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2)$$

Por influencia electrostática, en la cara interior del conductor 2 hay una carga Q_2^{in} *igual y de signo opuesto a* Q_1 *. El conductor 2 está al potencial* V_2 *, luego en la superficie exterior hay una carga* Q_2^{ex}*. La d. de p. entre el conductor 2 y el conductor 3, es la circulación del campo entre ambos conductores.*

$$V_2 = \int_2^3 E\,dr \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{Q_2^{ex}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_3 - R_2'}{R_3 R_2'} \quad \Rightarrow \quad Q_2^{ex} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_3 R_2'}{R_3 - R_2'} V_2$$

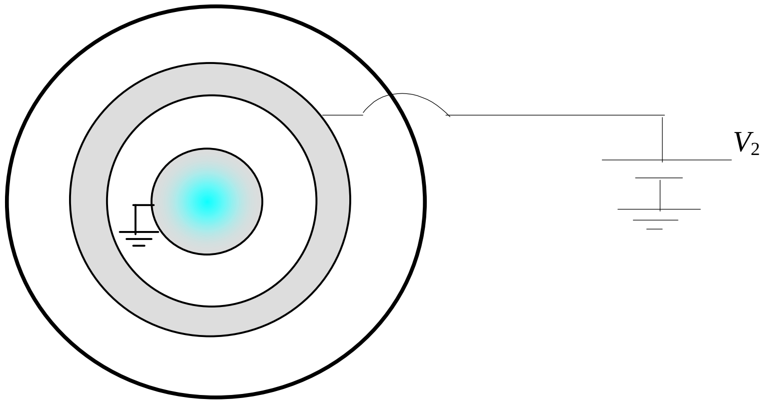
La carga del conductor 2 es la suma de la carga interior mas la exterior $Q_2 = -Q_1 + Q_2^{ex}$*. Sustituyendo queda*

$$Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 \left[\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(V_2 - V_1) + \frac{R_2' R_3}{R_3 - R_2'} V_2 \right]$$

La carga exterior del conductor 3 *es cero ya que está conectado a tierra, luego su carga es la interior que por influencia es la carga exterior del conductor* 2 *cambiada de signo.*

$$Q_3 = - Q_2^{ex}$$

b) *Desconectar de tierra la esfera 3 y mantenerla esfera 2 al potencial V_2, no modifica la carga exterior del conductor 2 ni la carga del conductor 3, luego se cumple* $Q_3' = Q_3 = - Q_2^{ex}$. *La carga exterior del conductor 3 sigue siendo cero, luego el potencial del 3 es cero* $V_3 = 0$.



Al conectar a tierra la esfera interior, fluye carga negativa de tierra hacia la esfera hasta que su potencial sea cero y quedará con una carga Q_1'. La d. de p. Entre el conductor 1 y el 2 es la circulación del campo entre ambos conductores. Operando se tiene

$$-V_2 = \int_1^2 E\,dr \quad \Rightarrow \quad -V_2 = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \qquad \Rightarrow \qquad Q_1' = -4\pi\varepsilon_0 \left[\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right] V_2$$

La carga del conductor 2 es $Q_2' = - Q_1' + Q_2^{ex}$. *Sustituyendo queda*

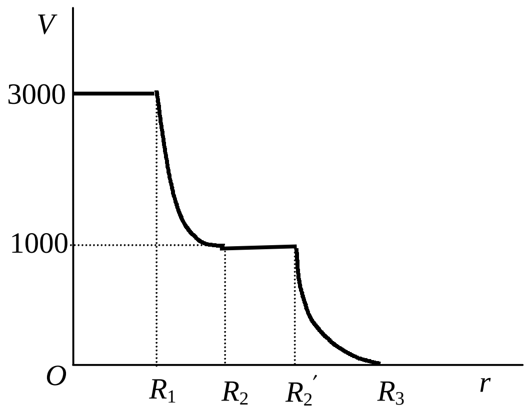
$$Q_2' = 4\pi\varepsilon_0 \left[\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{R_2' R_3}{R_3 - R_2'} \right] V_2$$

c) *Resultados numéricos.*

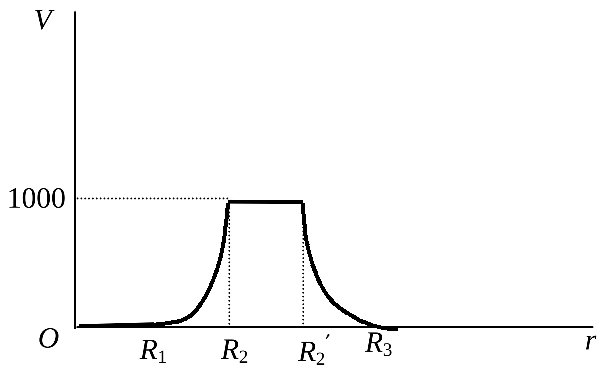
a) $Q_1 = \frac{1}{4}\mu C \quad ; \quad Q_2 = \frac{5}{12}\mu C \quad ; \quad Q_3 = -\frac{2}{3}\mu C$

b) $Q_1' = -\frac{1}{8}\mu C \quad ; \quad Q_2' = \frac{19}{24}\mu C \quad ; \quad Q_3' = -\frac{2}{3}\mu C \quad ; \quad V_3 = 0$

d) *Gráficas de los potenciales.*

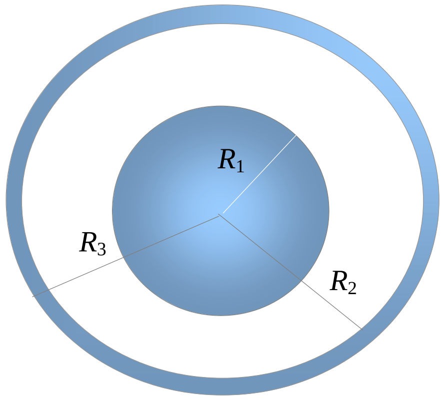


a)



b)

Problema 13 Calcular los coeficientes de capacidad de un sistema de dos conductores esféricos cuando a) el radio del primero es R_1 y el segundo conductor es un esfera hueca de radio interior R_2 y exterior R_3 colocado concentricamente con el primero ; b) el segundo conductor es una esfera de radio R_2 y la distancia d entre sus centros es mucho mayor que sus radios.



SOLUCION

a) *Los coeficientes de capacidad relacionan las cargas con los potenciales mediante las ecuaciones*

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \qquad ; \qquad Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$

Los valores de los coeficientes dependen únicamente de la geometría del sistema y cumplen que

$$C_{12} = C_{21}$$

Haciendo $V_2 = 0$ *, las cargas cumplen* $\quad Q_1 = -Q_2 \quad \Rightarrow \quad C_{11} = -C_{21}$

Designando por C *el valor común de los tres coeficientes* $\quad C = C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$ *, el sistema de ecuaciones queda*

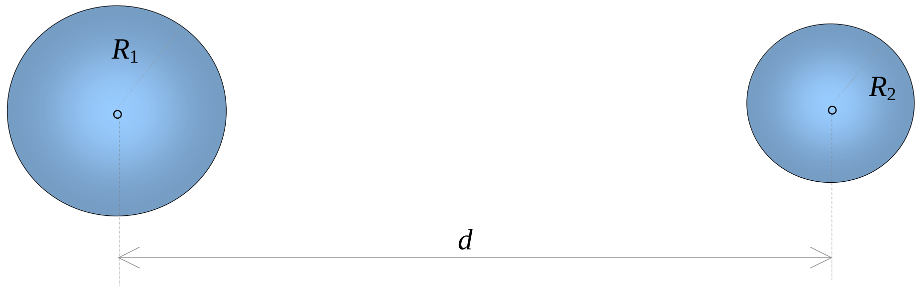
$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \quad ; \quad Q_2 = -CV_1 + C_{22} V_2$$

Fácilmente se calculan sus valores

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \; R_1 \; R_2}{R_2 - R_1} \quad ; \quad C_{22} = C + 4\pi\varepsilon_0 R_3$$

La C se denomina capacidad del condensador esférico formado por las dos superficies esféricas enfrentadas.

b) *La condición* $d >> R_1 , R_2$ *, implica que cuando las esferas poseen cargas, vistas desde cada una desde la otra esfera, estás pueden considerarse como cargas puntuales colocadas en el centro de las esferas.*



Los coeficientes de capacidad relacionan las cargas con los potenciales mediante las ecuaciones

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \quad ; \quad Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$

Los valores de los coeficientes dependen únicamente de la geometría del sistema y cumplen que

$$C_{12} = C_{21}$$

Consideremos que los potenciales son : $V_1 \neq 0$ *y* $V_2 = 0$ *; para estos valores , las cargas serán*

$$Q_1 = C_{11} V_1 \quad ; \quad Q_2 = C_{21} V_1$$

Los potenciales en función de las cargas están dados por

$$V_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{d}\right] \qquad ; \qquad 0 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{R_2}\right]$$

Operando se obtiene $\quad C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \quad ; \quad C_{21} = C_{12} = -4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1\ R_2}{d}$

Consideremos que los potenciales son : $V_1 = 0$ *y* $V_2 \neq 0$. *Operando con en el caso anterior se tiene*

$$C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 R_2$$

Problema 14 Se dispone de tres conductores en influencia conectados a potenciales V_1 V_2 V_3 . La matriz de los coeficientes de capacidad e influencia es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Si se unen los tres conductores mediante un hilo de capacidad despreciable, determinar su potencial común *V*.

SOLUCION

Las cargas de los conductores son:

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_1 - 2\,V_2 \\ Q_2 &= -2\,V_1 + 4\,V_2 - 3\,V_3 \\ Q_3 &= -3\,V_2 + 3\,V_3 \end{aligned}$$

Al unirlos mediante un hilo, las cargas se distribuyen entre los tres conductores hasta que adquieren el mismo potencial. Sean Q'_1 , Q'_2 , Q'_3 *las nuevas cargas y V su potencial común. Las cargas están dadas por*

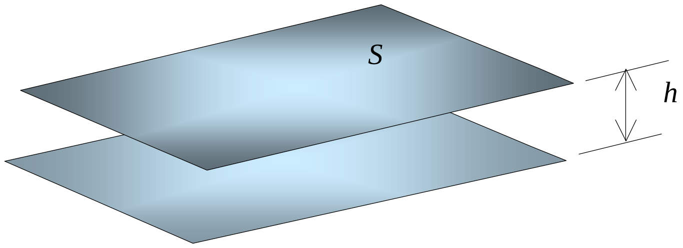
$$\begin{aligned} Q'_1 &= V - 2\,V &&= -\,V \\ Q'_2 &= -2\,V + 4\,V - 3\,V &&= -V \\ Q'_3 &= -3\,V + 3\,V &&= 0 \end{aligned}$$

Igualando el valor de la suma de las cargas antes y después de conectar, se tiene

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

CONDENSADORES

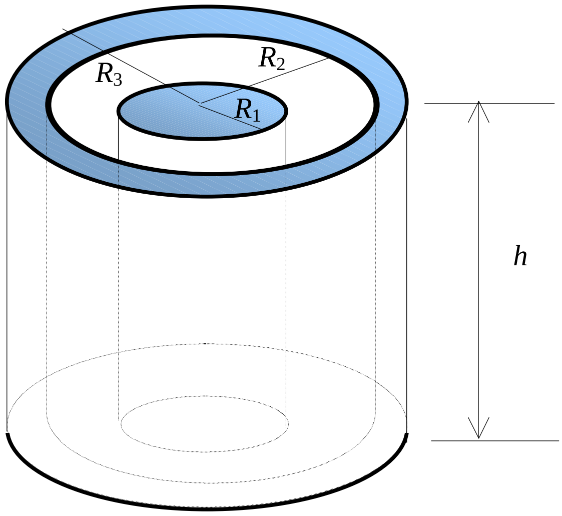
Problema 15 Determinar la capacidad de los condensadores plano formado por dos conductores planos de área S , separados una distancia h



SOLUCION

$$C = \frac{\varepsilon_0 \; S}{h}$$

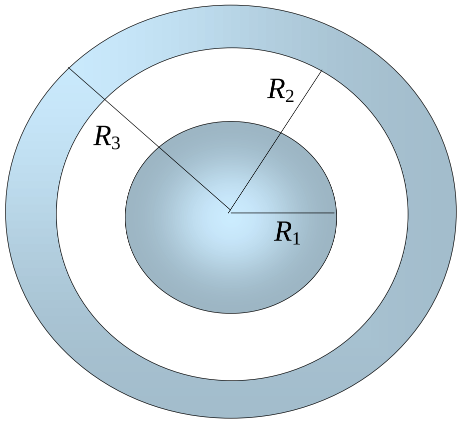
Problema 16 Dado un sistema de dos conductores cilíndricos coaxiales tal como el mostrado en la figura adjunta, determinar la capacidad del condensador cilíndrico formado por las superficies interiores y el coeficiente de capacidad C_{22} del sistema.



SOLUCION

$$C = \frac{2\,\pi\,\varepsilon_0\, h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} \qquad ; \qquad C_{22} = C + C_3 \qquad ; \qquad C_3 = \frac{2\,\pi\,\varepsilon_0\, h}{\ln \dfrac{1}{R_3}}$$

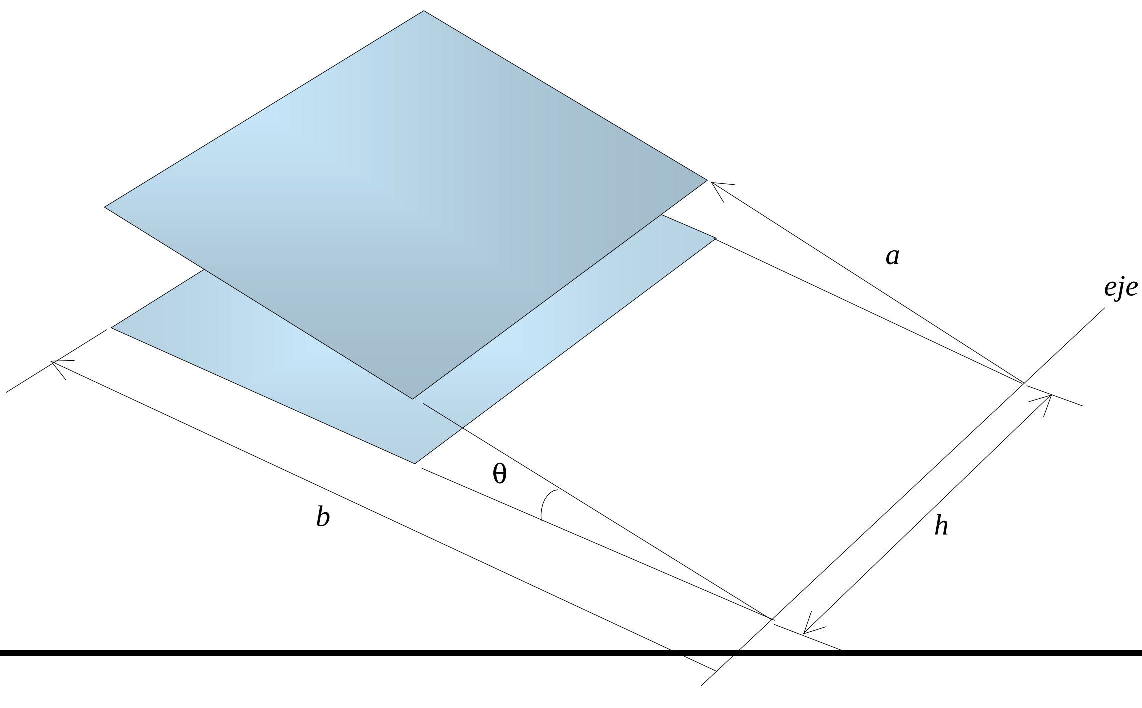
Problema 17 Dado un sistema de dos conductores esféricos concéntricos tal como el mostrado en la figura adjunta, determinar la capacidad del condensador esférico formado por las superficies interiores y el coeficiente de capacidad C_{22} del sistema.



SOLUCION

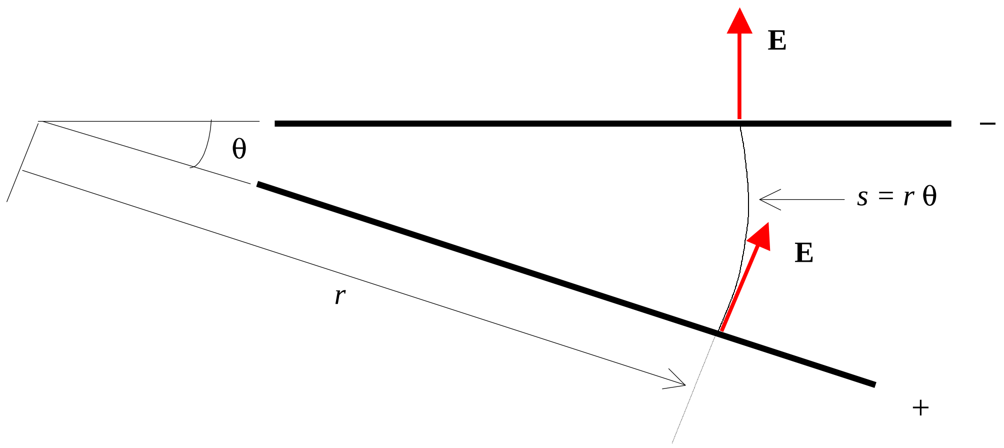
$$C = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\, R_1\, R_2}{R_2 - R_1} \qquad ; \qquad C_{22} = C + C_3 \qquad ; \qquad C_3 = 4\,\pi\,\varepsilon_0\, R_3$$

Problema 18 Dos conductores planos de lados $c = b\text{-}a$ y l , forman un ángulo θ tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar la capacidad del condensador formado por los dos conductores.



SOLUCION

La capacidad se calcula mediante la ecuación $C = \dfrac{Q}{V}$. *Apliquemos a los conductores una diferencia de potencial talque* $V = V_1 - V_2$. *Despreciando el efecto de bordes , las cargas de las caras enfrentadas serán iguales y de signo opuesto. Sea Q el valor absoluto de la carga.*
La densidad superficial de carga será mayor en las zonas en que los conductores estén próximos y menor en las zonas en que estén mas alejados, es decir será inversamente proporcional a la distancia al eje. El campo eléctrico es perpendicular a las superficies planas en cada uno de sus puntos y las líneas de campo son arcos de circunferencia.



La diferencia de potencial V es la circulación del campo entre las placas. Luego $V = E\ r\ \theta$; *pero el campo en un punto de la superficie de un conductor es* $E = \sigma / \varepsilon_0$. *Sustituyendo y operando se tiene la densidad superficial de carga a una distancia r del eje.*

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0\ V}{\theta}\ \frac{1}{r}$$

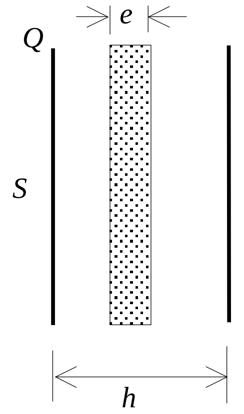
La carga Q se obtiene de la siguiente integral

$$Q = \int_a^b \sigma\, h\, dr = \frac{\varepsilon_0\, V\, h}{\theta}\ \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Operando se tiene la capacidad del condensador

$$C = \frac{\varepsilon_0 \; h}{\theta} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Problema 19 Un condensador plano paralelo de área S y distancia entre placas h , está cargado con una carga Q. En el interior del condensador se coloca, paralelamente a las armaduras, una lámina metálica de la misma área y grosor e. Determinar : a) El incremento de capacidad del condensador al introducir la placa ; b) El incremento de energía del condensador al introducir la placa



SOLUCION

a) *Las superficies enfrentadas de las placas del condensador y de las caras de la lámina forman un sistema de dos condensadores en serie cuya capacidad es*

$$C_s = \frac{\varepsilon_0 \, S}{h - e}$$

El incremento de capacidad es la diferencia entre C_s y C_0

$$\Delta C = C_s - C_0 = \frac{\varepsilon_0 \, S \, e}{h\,(h-e)} = \frac{e}{h-e} \, C_0$$

b) *La energía de un condensador a carga constante está dada por*

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

el incremento de energía del condensador es

$$\Delta W = W_s - W_0 = -\frac{e\ Q^2}{2\varepsilon_0\ S}$$

Problema 20 Un condensador plano de área S = 113 cm^2 y distancia entre las armaduras h = 2 mm se conecta a un diferencia de potencial V = 2000 V. Calcular: a) El incremento de energía del condensador si se desconecta de la fuente de tensión y se separan sus armaduras hasta h' = 4 mm. Explicar el signo del incremento de energía. ¿ Cual es el trabajo efectuado para separar las placas del condensador ? ; b) El incremento de energía del condensador si, manteniéndolo conectado a la fuente de tensión, sus armaduras se separan hasta h' = 5 mm. Explicar el signo del incremento de energía. ¿ Cual es el trabajo efectuado para separa las placas del condensador ?

SOLUCION

a) *La carga que adquiere el condensador es*

$$Q = C\ V = \frac{\varepsilon_0\ S\,V}{h} = 10^{-7}\ \ \mathrm{C}$$

Una vez desconectado de la fuente de tensión , la carga se mantiene constante.

La energía de un condensador a carga constante está dada por

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

El incremento de energía del condensador al aumentar la distancia entre las armaduras es

$$\Delta\ W_C = W_1 - W_0 = \frac{Q^2}{2\ \varepsilon_0\ S}\ (h_1 - h_0) = 100\ \ \mathrm{J}$$

Signo del incremento de energía. Al aumentar la distancia entre las placas la capacidad disminuye , luego la energía aumenta
Trabajo . Del principio de conservación de la energía se tiene que el trabajo efectuado para separar las placas es igual al incremento de energía del condensador , Wex = 100 J.

b) *La energía de un condensador a potencial constante está dada por*

$$W = \frac{1}{2}C\ V^2$$

El incremento de energía del condensador es

$$\Delta W_C = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} V^2 \Delta C = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) = -6 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Signo del incremento de energía. Al aumentar la distancia entre las placas, la capacidad disminuye, luego la energía final es menor que la inicial

Trabajo . Al aumentar la distancia entre las armaduras manteniendo el potencial constante, el campo eléctrico entre las placas disminuye, lo que implica que pasa carga del condensador a la batería. El incremento de carga del condensador es $\Delta Q = V \Delta C$.

$$\Delta Q_C = -\left(\frac{\Delta h}{h + \Delta h} \right) Q_0$$

Incremento de energía de la batería

$$\Delta W_B = V \Delta Q_B = - V \Delta Q_C = - V^2 \Delta C = - 2 \Delta W_C = 12 \times 10^{-3} \text{ J}$$

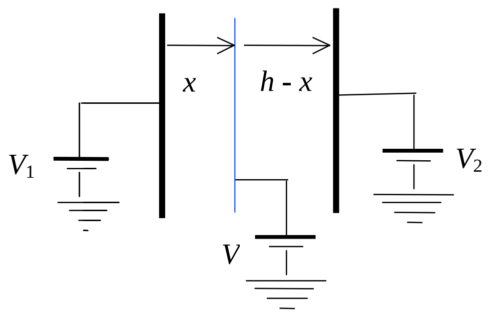
Del principio de conservación de la energía se tiene

$$W_{ex} = \Delta W_C - \Delta W_B = 6 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Problema 21 Un condensador plano, cuya área es de S m^2 y la distancia entre ellas h m, se conectan sus armaduras a potenciales V_1 , V_2 . Se introduce en el condensador una lámina metálica de espesor despreciable, conectada a una fuente de tensión V, de superficie S y situada paralelamente a las placas, la cual puede desplazarse libremente entre las armaduras manteniendo el paralelismo. Calcular:

a) Para la condición $V_1 > V > V_2$, determine la posición x de equilibrio de la lámina, contada desde la placa a potencial V_1 ¿ Cual es el campo eléctrico entre las placas ? La fuerza F sobre una de las caras de la lámina

b) Para la condición $V > V_1 > V_2$, determine la posición x de equilibrio de la lámina, contada desde la placa a potencial V_1. ¿ Cual es el campo eléctrico entre las placas ? La fuerza F sobre una de las caras de la lámina



SOLUCION

a) *Por influencia, las cargas de las superficies enfrentadas son iguales de distinto signo*. *La carga de la cara izquierda de la lámina interior es negativa y la de la cara derecha positiva. Para la posición de equilibrio, el campo eléctrico en ambas caras de la lámina tiene el mismo módulo.*

$$E_1 = \frac{V_1 - V}{x} = E_2 = \frac{V - V_2}{h - x}$$

Despejando se tiene

$$x = \left(\frac{V_1 - V}{V_1 - V_2} \right) h$$

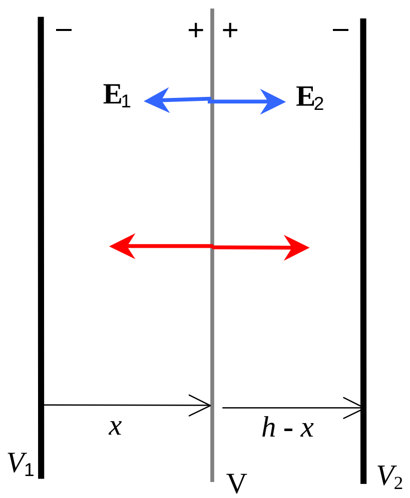
Sustituyendo el valor de x se obtiene el campo eléctrico entre las placas

$$E = E_1 = E_2 = \frac{V_1 - V_2}{h}$$

La fuerza sobre una de las caras de la lámina interior es

$$F = \frac{S}{2\ \varepsilon_0} \sigma^2 = \frac{\varepsilon_0\, S}{2} \left(\frac{V_1 - V_2}{h} \right)^2$$

b) *El potencial de la lámina es mayor que el potencial de las placas del condensador. La carga de la lámina será positiva y las cargas de las placas del condensador serán negativas.*



Para la posición de equilibrio, el campo eléctrico tiene el mismo módulo en ambas caras de la lámina.

$$E_1 = \frac{V - V_1}{x} = E_2 = \frac{V - V_2}{h - x}$$

Despejando se tiene

$$x = \left(\frac{V - V_1}{2\,V - V_1 - V_2}\right) h$$

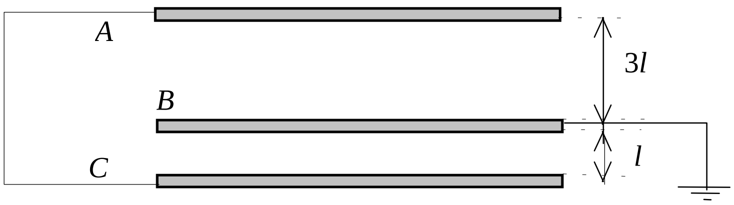
Sustituyendo el valor de x se obtiene el campo eléctrico entre las placas

$$E_1 = E_2 = \frac{2\,V - V_1 - V_2}{h}$$

La fuerza sobre una de las caras de la lámina es

$$F = \frac{\varepsilon_0\, S}{2} \left(\frac{2\,V - V_1 - V_2}{h}\right)^2$$

Problema 22 Tres placas metálicas de área S (m^2) se colocan paralelas entre sí tal como se indica en la figura adjunta siendo l (m) mucho menor que S.

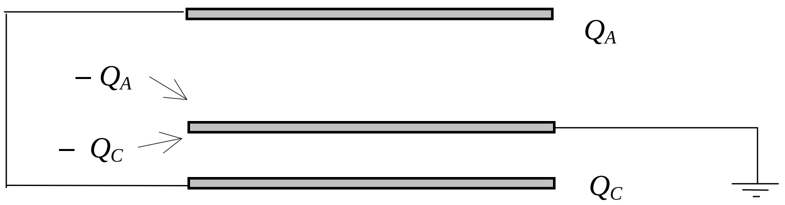


Las placas A y C están unidas mediante una cable y la placa central B se conecta a tierra. Se le da una carga positiva Q la placa A. Determinar : a) la carga de cada una de las placas ; b) el potencial de las placas A y C; c) la fuerza que actúa sobre la placa B ; d) la capacidad del conjunto

---

SOLUCION

a) *La carga Q se distribuye entre las placas A y C. Sean* Q_A *y* Q_C *las cargas de cada una de ellas. Las superficies enfrentadas se ejercen influencia total, luego se tiene que* $Q_B = -Q_A - Q_C = -Q$.



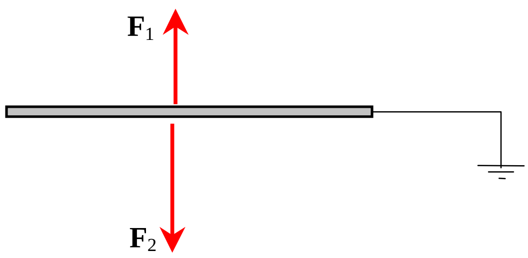
Las superficies enfrentadas forman condensadores, luego

$$Q_A = \frac{\varepsilon_0 S}{3l} V_A \quad ; \quad Q_C = \frac{\varepsilon_0 S}{l} V_C \quad ; \quad V_A = V_C \quad ; \quad Q_A + Q_C = Q \quad \Rightarrow \quad Q_A = \frac{Q}{4} \quad ; \quad Q_C = \frac{3Q}{4}$$

b)

$$V_A = \frac{Q_A}{C_A} \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{3lQ}{4\varepsilon_0 S} \quad ; \quad V_C = V_A$$

c)



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

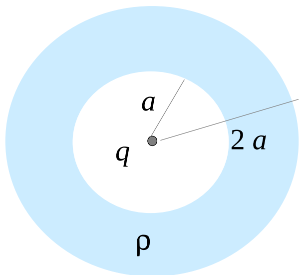
$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_A{}^2}{\varepsilon_0 S} \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_C{}^2}{\varepsilon_0 S}$$

$$F = \frac{1}{4} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} \downarrow$$

d) *El conjunto es un sistema de dos condensadores en paralelo.*

Su capacidad es $$C_e = \frac{4\varepsilon_0 S}{3l}$$

Problema 1 Se dispone de una distribución de carga esférica de radio interior a y radio exterior $b = 2a$ Si la densidad de carga es $\rho = k\,r$, donde $k = 4/a^4$ calcular : a) el trabajo necesario para trasladar una carga puntual q desde el infinito hasta el centro de la esfera, b) el valor de q para que el campo eléctrico en puntos tales que $b \leq r$ sea nulo



SOLUCION

a) El origen del potencial de esta distribución de carga está en el ∞, luego el trabajo para trasladar la carga q desde el infinito hasta el centro de la esfera está dado por

$$W = q\,V(0) \qquad (1)$$

donde $V(0)$ es el potencial en el centro de la esfera, dado por $V(0) = \int_0^\infty \mathbf{E}\,.\,d\,\mathbf{r}$ (2)

El campo eléctrico ente 0 y a es nulo; el campo eléctrico entre a y $2\,a$ está dado por

$$E_1 = \frac{r^4 - a^4}{\varepsilon_0\,a^4\,r^2} \qquad (3)$$

y el campo eléctrico entre $2a$ y el ∞ está dado por

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2} \qquad (4)$$

donde Q la carga total de la distribución, dada por $Q = 60\,\pi$ C .

Sustituyendo (3) y (4) en la ecuación (2) se tiene el potencial en el centro de la esfera

$$V(0) = \int_a^{2a} E_1\,dr + \int_{2a}^{\infty} E_2\,dr = \frac{28}{3\varepsilon_0 a}$$

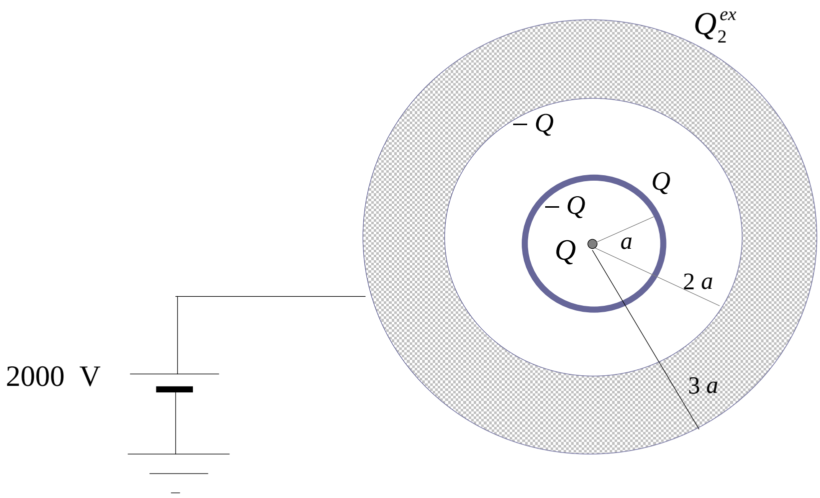
El trabajo para trasladar la carga es $\Rightarrow$ $W = \dfrac{28\, q}{3\varepsilon_0\, a}$ J

b) El campo eléctrico en puntos del espacio tales que su distancia al centro sea $r \geq b$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q + q}{r^2}$$

Para que sea nulo, el valor de la carga q ha de ser $q = -Q = -60\,\pi$ C

Problema 2 Una carga puntual $Q = 10^{-7}$ C se sitúa en el centro de una esfera metálica de radio a = 0,3 m y espesor despreciable. El conjunto se rodea de una capa metálica esférica concéntrica de radio interior b = 2 a y exterior c = 3a, conectada a un potencial V_2 = 2000 V. Calcular: a) el potencial V_1 de la esfera interior y la carga (total) Q_2 de la exterior; b) si se conecta a tierra la esfera interior, calcular las cargas (totales) Q'_1 y Q'_2 de ambas esferas.



SOLUCION

a) El conjunto está formado por dos esferas metálicas concéntricas, la interior de espesor despreciable y la exterior conectada a 2000 V. El potencial del conductor 1 está dado por

$$V_1 = V_2 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{2a}\frac{dr}{r^2} = 3500 \text{ V}$$

La cara interior de la esfera de radio a tiene una carga $-Q$ y la exterior una carga + Q. La carga del conductor 1 es nula $\Rightarrow$ $Q_1 = 0$

La cara interior del conductor 2 tiene una carga $-Q$ y la carga en la cara exterior está dada por $Q_2^{ex} = V_2\, 4\pi\varepsilon_0\, 3a = 2\times 10^{-7}$ C .La carga total del conductor 2 es $\Rightarrow$ $Q_2 = -Q + Q_2^{ex} = 10^{-7}$ C.

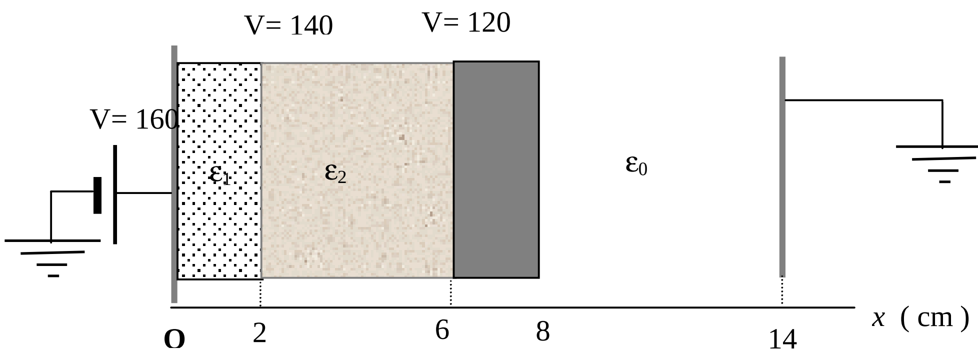
b) Al conectar a tierra la esfera interior, esta se queda a potencial cero. La carga en la cara interior no varía, pero sí la carga de la cara exterior. Su potencial será

$$0 = V_2 + \frac{Q_1^{ex}}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{2a}\frac{d\,r}{r^2} \;\Rightarrow\; Q_1^{ex} = -\frac{4}{3}\times 10^{-7}\ \text{C} \;\Rightarrow\; Q_1' = -\frac{7}{3}\times 10^{-7}\ \text{C}$$

La carga exterior del conductor 2 es la misma que en el apartado *a*), y la carga en la cara interior es $-Q_1^{ex}$, luego su carga total es

$$Q_2' = -Q_1^{ex} + Q_2^{ex} = \frac{10}{3}\times 10^{-7}\ \text{C}$$

Problema 3 Se dispone de dos superficies conductoras plano-paralelas (se consideran de superficie infinita) tal como se ve en la figura adjunta



Entre 0 y 2 cm hay un dieléctrico de constante ε_1 ; entre 2 y 6 cm hay un dieléctrico de constante ε_2 ; entre 6 y 8 cm una placa metálica y entre 8 y 14 cm, el vacío. Calcular : a) el valor de ε_1 y de ε_2 ; b) las densidades de carga de polarización.

SOLUCION

a) De la (variación del potencial con la distancia) se tienen los valores del campo eléctrico en cada zona:

$$E_1 = 1000\ \text{V/m} \;;\; E_2 = 500\ \text{V/m} \;;\; E_4 = 2000\ \text{V/m}$$

La inducción en cualquier punto de los dieléctricos o en el vacío es igual a la densidad superficial de carga de los conductores planos de superficie infinita $\Rightarrow$ $D = \sigma$; a partir del cual, se tiene las expresiones de los campos

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\,\varepsilon_1} \;;\; E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\,\varepsilon_2} \;;\; E_3 = 0 \;;\; E_4 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La densidad superficial de carga es: $\Rightarrow$ $\sigma = 2000\,\varepsilon_0$ y las permeabilidades relativas

$$\varepsilon_1 = 2 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = 4$$

b) Las densidades cúbicas de carga de polarización son nulas en ambos dieléctricos. Las superficiales están dadas por

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma$$

Sustituyendo queda,

$$\sigma_1(0) = 1000\,\varepsilon_0 \;\; ; \;\; \sigma_1(2) = -1000\,\varepsilon_0 \;\; ; \;\; \sigma_2(2) = 1500\,\varepsilon_0 \; ; \; \sigma_2(6) = -1500\,\varepsilon_0$$