Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Física i Enginyeria Nuclear
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Terrassa

Problemas de Física III

Juan Belana Punseti
Miguel Mudarra López

1. Álgebra y análisis vectorial

1 Sean dos vectores, $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, un vector unitario cuyas componentes cumplen: $a/b = 2/3$; $b/c = 3/4$, y $\vec{w} = \sqrt{29}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$. a) Determinar el vector producto vectorial de ambos, $\vec{p} = \vec{v}\times\vec{w}$, y el ángulo θ que forman. b) Hallar también la ecuación cartesiana del plano determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y que pasa por el punto $Q(1,-2,-1)$, así como el vector unitario $\vec{u}_n$ perpendicular a dicho plano.

SOLUCIÓN

(a) $\cos(\theta) = \frac{9}{\sqrt{87}}$

(b) $x - 2y + z - 4 = 0$

(c) $\vec{u}_n = \frac{(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{6}}$

2 Un campo escalar viene dado por la ecuación:

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$$

Determinar: a) el gradiente del campo en el punto P(1,1,2); b) la derivada direccional del campo en el mismo punto según la dirección que va hacia el origen; y c) el máximo valor de la derivada direccional en (1,1,2)

SOLUCIÓN

(a) $\text{grad}\, U(1,1,2) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

(b) 0

(c) $\sqrt{12}$

3 Sea el campo de escalares que asocia a cada punto su distancia al origen de coordenadas. Determinar: a) las superficies equiescalares; b) la superficie equiescalar que pasa por (1,1,1); c) el gradiente en (1,1,1).

SOLUCIÓN

(a) Esferas centradas en el origen de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = C$

(b) La superficie es: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

(c) $\text{grad}\, U(1,1,1) = \frac{(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{3}}$.

4 Sea la superficie $x^2 + 3xyz + z^3 - 5 = 0$. Determinar la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto punto (1,1,1)

SOLUCIÓN

$5x + 3y + 6z - 14 = 0$

5 Hallar la divergencia y el rotacional del campo:

$$\vec{E} = x\cos(z)\vec{i} + y\ln(x)\vec{j} - z^2 e^x \vec{k}$$

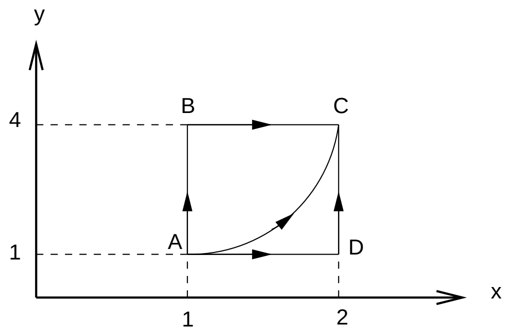
en el punto (1,2,0).

SOLUCIÓN

$\mathrm{div}\vec{E}(1,2,1) = 1$

$\mathrm{rot}\vec{E}(1,2,1) = 2\vec{k}$

6 Calcular la circulación del campo: $\vec{E} = \frac{1}{x+y}\vec{i}$ a lo largo de los caminos: a) ABC; b) ADC y c) AC, que conducen de A a C y que están indicados en la figura.



SOLUCIÓN

(a) $\ln 6/5$

(b) $\ln 3/2$

(c) $\ln 4/3$

La curva AC es un arco de parábola de la forma
$y = ax^2$

7 Calcular la circulación del campo:

$$\vec{E} = 2xy\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} - 3z^2 x\vec{k}$$

entre los puntos A (0,0,0) y B (2,1,3) siguiendo la curva:

$$x = 2t \qquad y = t^3 \qquad z = 3t^2;$$

SOLUCIÓN

C = -1615/35

8 Calcular el trabajo efectuado por una partícula que se mueve describiendo un arco de hélice de ecuaciones paramétricas $x = \cos t, y = \sin t, z = t$, entre los puntos $A(1,0,0)$ y $B(-1,0,\pi)$, si está sometida a una fuerza cuyo módulo vale $F(x,y,z) = xy + z^2$, es tangente en cada punto a la trayectoria, y su sentido es de A a B.

SOLUCIÓN

$W = \sqrt{2}\pi^3/3$

9 Una partícula recorre un círculo de radio 5 y centro en el punto (0,0,3). El círculo esta contenido en el plano z = 3. En el espacio hay el campo de fuerzas:

$$\vec{F} = (2x + y - 2z)\vec{i} + (2x - 4y + z^2)\vec{j} + (x - 2y - z^2)\vec{k}$$

Hallar la circulación del campo a lo largo del círculo.

SOLUCIÓN

25π.

10 Hallar los valores de las constantes a, b y c para los que el campo vectorial:

$$\vec{E} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

es conservativo.

SOLUCIÓN

a=4, b=2 y c=−1

11 Sea: $\vec{E} = ay(y^2 - 3z^2)\vec{i} + 3ax(y^2 - z^2)\vec{j} - 6axyz\vec{k}$. Demostrar que el campo $\vec{E}$ es conservativo y hallar la función V(x,y,z) tal que: $\vec{E} = \text{grad}V$, tomando V(0,0,0) = 0.

SOLUCIÓN

$V(x, y, z) = axy(y^2 - 3z^2)$

12 Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{E} = (z^2 - x^2)\vec{k}$, a través del cubo de lado unidad y de aristas en los ejes: a) directamente a partir de la definición de flujo y b) aplicando el teorema de la divergencia.

SOLUCIÓN

$\Phi = 1$

13 Hallar el flujo del campo de vectores de posición a través de la superficie de un cilindro de radio R y altura h, cuyo eje coincide con el eje z y se halla centrado en el origen de coordenadas a) directamente por integración, y b) aplicando el teorema de la divergencia.

SOLUCIÓN

$\Phi = 2\Phi_B + \Phi_C = 3\pi R^2 h$

14 Sea $\vec{E} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3yz\vec{k}$. Hallar el flujo de $\vec{E}$ a través de la superficie cerrada definida por la porción del cilindro de generatriz paralela al eje Z, centrado en el origen, radio R=4 y situado en el primer octante entre z=0 y z=5, y los propios planos coordenados x=0 y y=0.

SOLUCIÓN

$\Phi = -320$

15 Hallar el flujo del campo vectorial: $\vec{E} = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$ a través de la esfera de radio 2, centrada en el origen, aplicando el teorema de la divergencia.

SOLUCIÓN

$\Phi = 32\pi/3$

16 Hallar el valor de la divergencia del campo:

$$\vec{E} = x^2\vec{i} - 2y\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

en el origen (0,0,0) aplicando la definición de divergencia como límite. Aplicarlo a un cubo de lado a centrado en el origen y de aristas paralelas a los ejes.

SOLUCIÓN

$\text{div}\vec{E}\ ]_{(0,0,0)} = 2.$

17 Hallar el flujo del rotacional del campo vectorial E:

$$\vec{E} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$$

a través de la mitad superior de la esfera de radio unidad centrada en el origen: a) por integración directa, y b) aplicando el teorema de Stokes.

SOLUCIÓN

$\Phi = 2\pi R^2$

18 Sea el campo $\vec{E} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$. Hallar el flujo del rotacional del campo $\vec{E}$ a través de la superficie S del paraboloide: $x^2 + y^2 = 2z$, limitado por el plano $z = 2$: a) directamente, y b) aplicando el teorema de Stokes.

SOLUCIÓN

$\Phi = 20\pi$

19 Calcular la integral de volumen:

$$\int_V z\mathrm{dV}$$

en la que el volumen V se extiende a la mitad superior de una esfera de radio R centrada en el origen. **Sugerencia:** Utilice coordenadas cilíndricas.

SOLUCIÓN

$\frac{\pi R^4}{4}$

20 Calcular la integral de volumen:

$$\int_V r\mathrm{dV}$$

en la que la integral se extiende a la mitad superior de una esfera de radio R centrada en el origen. **Sugerencia:** Utilice coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN

$\frac{\pi R^4}{2}$

21 Calcular la carga eléctrica total que contiene un volumen cilíndrico de radio R y altura H, cuya densidad de carga está dada por la función que se expresa en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = \frac{K}{r}$$

SOLUCIÓN

$2\pi KHR$

22 Calcular la carga eléctrica total que contiene un volumen esférico de radio R, cuya densidad de carga está dada por la función que se expresa en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \frac{r}{a} \qquad 0 \leq r \leq a \\ \rho &= \rho_0 \frac{a}{r} \qquad a \leq r \leq R \end{aligned}$$

donde $0 \leq a \leq R$ es cierta constante

SOLUCIÓN

$\pi\rho_0(2aR^2 - a^3)$

2. Electrostática

Cargas puntuales

23 Supongamos que la carga del electrón fuera un 0.1% mayor que la del protón ($+e$). Calcular cuanto valdría, bajo esta suposición, la fuerza repulsiva F entre dos gotas esféricas de agua, de masa m=1 g cada una, separadas una distancia d=1 m.

SOLUCIÓN

$F = 2.6 \times 10^{15}$ N

24 Se dispone de tres bolitas conductoras iguales que designamos por A, B y C. Las dos primeras se hallan fijas, distan 1.0 m y están cargadas negativamente, siendo la carga de A ocho veces la de B. Mediante pinzas aislantes cogemos la C, inicialmente descargada, y la ponemos en contacto primero con la A, después con la B, y la dejamos entre A y B. Determinar la distancia x a la que queda la bola C de la A en la situación final de equilibrio.

SOLUCIÓN

$x = \frac{16-\sqrt{160}}{6} = 0.558$ m

25 Dos péndulos iguales, formados cada uno de ellos por un hilo aislante de una longitud l=25 cm que termina en una esfera conductora de m=1.30 g de masa, están colgados de un mismo punto del techo. Las dos esferas están inicialmente descargadas y en contacto. Otra esfera igual a las anteriores, cargada con una carga Q desconocida, contacta con una de las dos primeras de manera que los péndulos quedan formando un ángulo $\theta = 30^o$. Determinar la carga Q de la última esfera.

SOLUCIÓN

$Q = 0.23 \mu C$

26 Un péndulo está formado por una esfera metálica de m= 1.5 g de masa, colgada de un hilo aislante de masa despreciable y de l= 103 cm de longitud. La esfera se carga con una carga $q = 2.40x10^{-8}$ C y seguidamente se hace oscilar el péndulo en el seno de un campo eléctrico vertical uniforme E dirigido de arriba hacia abajo. En estas condiciones se mide el periodo de oscilación del péndulo y se obtiene T = 1.796 s. Posteriormente, se le hace oscilar de nuevo pero en el seno de un campo de igual magnitud, pero sentido opuesto, obteniéndose ahora un periodo de T = 2.303 s. ¿ Cuánto valen el campo eléctrico E aplicado y la aceleración g de la gravedad?.

SOLUCIÓN

$g = 10.13$ m/s $\qquad E = 150$ kV/m

27 Según el modelo atómico de Bohr, el atómo de hidrógeno en su estado fundamental está constituido por un protón y un electrón moviéndose en una órbita circular cuyo radio tiene un valor conocido como "radio de Bohr", a. A partir de los valores de las masas y cargas de esas partículas, determinar: a) la velocidad v con que se mueve el electrón en su órbita; b) el campo eléctrico E a que está sometido y c) el cociente entre la fuerza electrostática y la gravitatoria a que están sometidas ambas partículas.

SOLUCIÓN

(a) $v = 2.19 \times 10^6$ m/s

(b) $E = 5.15 \times 10^{11}$ V/m

(c) $\frac{F_{\text{elec}}}{F_{\text{grav}}} = 2.27 \times 10^{39}$

28 Dos cargas puntiformes iguales de valor q están separadas una distancia 2a. Una carga -q, de masa m, está girando alrededor del eje determinado por las dos cargas, describiendo una circunferencia de radio R situada en el plano medio del segmento. Determinar la velocidad angular ω de dicha carga.

SOLUCIÓN

$\omega^2 = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 m(a^2+R^2)^{3/2}}$

29 Cuatro cargas puntuales de 100 μC se hallan sobre los vértices de un cuadrado de 10 m de lado. Calcular la fuerza que experimenta una carga de -50 μC que se halla situada directamente sobre el punto medio del cuadrado a 5 m de altura sobre el plano del mismo.

SOLUCIÓN

1.385 N, dirigida hacia el plano del cuadrado

30 Dos iones de carga +Ze están separados una distancia 2a (grande frente a las dimensiones de los iones). En la mediatriz del segmento que los une, y a una distancia pequeña de su punto medio $x << a$, colocamos un electrón de carga -e y masa m. Hallar su ecuación de movimiento x(t).

SOLUCIÓN

El electrón describirá un movimiento armónico (aproximadamente) simple, de ecuación $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, en la que $\omega = \sqrt{k/m}$, con:

$$k \approx \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

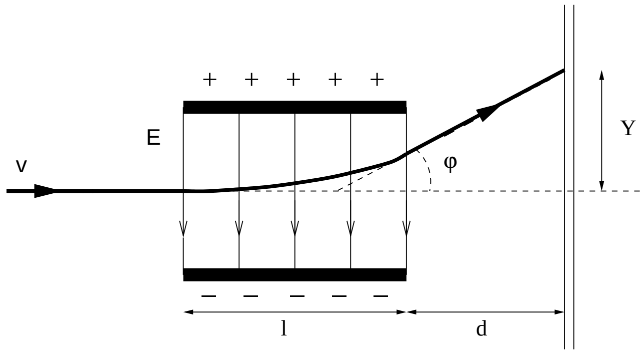
A y ϕ son dos constantes que dependen de las condiciones iniciales.

31 Un electrón, de cociente carga-masa e/m, entra en un campo eléctrico uniforme E, vertical y dirigido hacia abajo, con una velocidad inicial v. Este campo está creado por dos placas paralelas horizontales cargadas (ver figura) de longitud l. Si a una distancia d del extremo de las placas se coloca una pantalla fluorescente, deducir el ángulo φ de desviación de la trayectoria del electrón y la distancia vertical Y, medida desde la dirección inicial del electrón hasta el punto en que el electrón choca con la pantalla.

SOLUCIÓN

$$v = \arctan(\frac{eEl}{mv^2})$$

$$Y = \frac{eEl}{mv^2}(\frac{l}{2} + d)$$



32 En cada uno de los vértices de un cuadrado de lado 2a tenemos una carga igual a q. Si colocamos una carga puntiforme de valor q y de masa m en la línea media del cuadrado, en un punto próximo a su centro y situado a una distancia x, determinar el movimiento de dicha carga.

SOLUCIÓN

La fuerza sobre la carga es:

$$F = -\left(\frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)x$$

luego es del tipo recuperadora elástica y el movimiento resultante será un movimiento armónico simple.

Cálculo de campos y potenciales por integración

33 Dos circunferencias de igual radio R están cargadas uniformemente con cargas +Q y -Q respectivamente. Si se disponen de tal forma que sus ejes coinciden y quedan separadas una distancia d, determinar la diferencia de potencial ΔV entre sus centros.

SOLUCIÓN

$$\Delta V = V(0_+) - V(0_-) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right)$$

34 Sea un hilo de longitud l sobre el que hay distribuida uniformemente una carga q. ¿ Qué fuerza F ejerce este hilo sobre una carga puntual Q alineada con él y situada a una distancia d de su extremo más cercano.

SOLUCIÓN

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 d(d+l)}$$

35 Sea un hilo recto de longitud 2a provisto de una carga uniformemente repartida con una densidad lineal λ. Hallar el campo $\vec{E}$ creado por este hilo en un punto P distante h del mismo y desde el que la recta perpendicular al hilo divida al segmento bajo dos ángulos α_1 y α_2 dados. Aplicar el resultado al caso de que el hilo sea infinito.

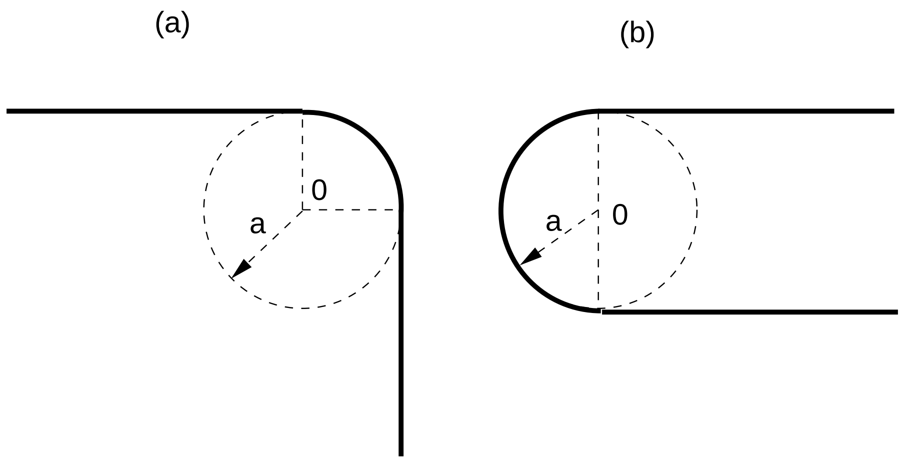
SOLUCIÓN

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \qquad E_y = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

siendo las direcciones de x e y perpendicular y paralela al hilo respectivamente. En el caso de que el hilo sea infinito, tenemos que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}; \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = E_x\vec{i} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\vec{i}$$

36 Las figuras (a) y (b), muestran las configuraciones de dos hilos uniformemente cargados con densidades lineales λ. Si los hilos son mucho más largos que el radio de curvatura a, determinar en ambos casos el valor del campo eléctrico en los puntos 0.



SOLUCIÓN

(a) $\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$, en un ángulo de 45^o.

(b) 0

37 Sea un marco cuadrado rígido, de lado L, homogéneamente cargado con una densidad lineal λ. En su mismo plano se encuentra un hilo infinito, también cargado con la misma densidad lineal uniforme λ. Determinar la fuerza de repulsión F que se ejercen entre ambos si la distancia de separación entre el hilo y el lado más próximo del cuadrado es L.

SOLUCIÓN

$$F = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right)$$

38 (a) Calcule el campo eléctrico que crea un aro de radio a, uniformemente cargado con una carga total q, en un punto de su eje situado a una altura z sobre el plano del aro.

(b) Aproveche el resultado anterior para calcular el campo que crea un disco de radio a, uniformemente cargado con densidad σ, en un punto sobre su eje a una altura z de su plano.

(c) Mediante a aproximación $a >> z$ obtenga el valor del campo eléctrico que crea un plano, uniformemente cargado con densidad σ, en puntos próximos a su superficie y alejados del borde (aproximación del plano infinito).

SOLUCIÓN

(a)

$$\frac{zq}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}$$

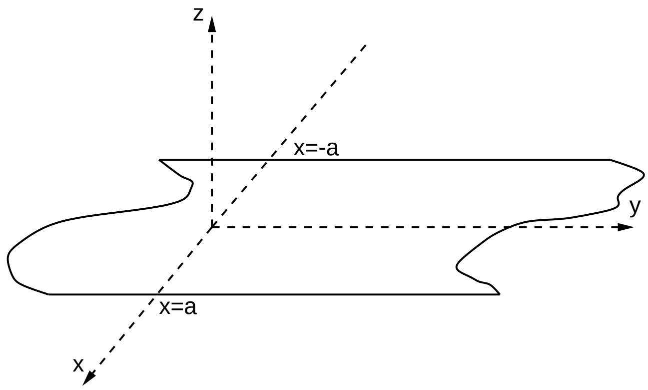
(b)

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}}\right)$$

(c)

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

39 En el plano XY, hay una banda de longitud infinita, limitada por las rectas x=a y x=-a, con una densidad superficial de carga uniforme σ. Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto cualquiera del plano YZ. Comprobar que el resultado anterior está de acuerdo con que si la banda fuera, además, infinitamente ancha (y, por tanto, un plano) el valor del campo sería, entonces $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



SOLUCIÓN

$$E = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\arctan(\frac{a}{z})$$

40 Un cilindro muy largo tiene su superficie lateral cargada uniformemente con una densidad superficial de valor $\sigma = \sigma_0\cos(\varphi)$ en la que φ representa el ángulo azimutal de las coordenadas cilíndricas y σ_0 una constante. Determinar el campo eléctrico E en un punto cualquiera de su eje.

SOLUCIÓN

$$E_x = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

en la que x tiene la dirección del origen de ángulos para φ

41 Determinar la fuerza repulsiva F entre la circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$ y el semieje z positivo, si ambos están cargados con una densidad lineal uniforme λ

SOLUCIÓN

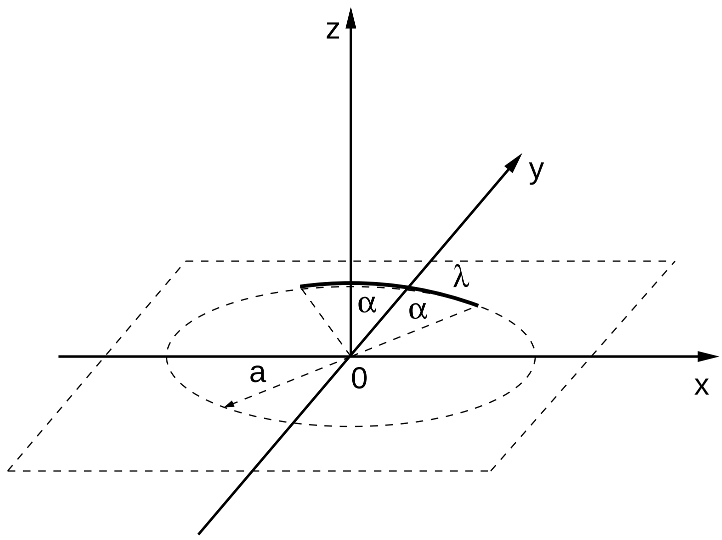
$$F = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0}$$

42 Un rectángulo de lados 2a y 2b está cargado uniformemente con una densidad superficial σ. Determinar el campo eléctrico E en un punto del eje perpendicular al rectángulo, que pasa por su centro, si el punto se halla a una altura z del plano del rectángulo.

SOLUCIÓN

$$E(z) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \arctan\left(\frac{ab}{z\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\right)$$

43 Un arco de una circunferencia de radio a está cargado con una densidad lineal de carga uniforme de valor λ. Sabiendo que el ángulo de dicho arco es 2α, determinar: a) el campo eléctrico E en un punto P del eje del arco distante z de su plano; y b) el módulo E del campo y el potencial V en P para el caso de que el arco fuese un semicírculo.



SOLUCIÓN

(a)

$$E_y = \frac{-\lambda \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 a^2 (1 + z^2/a^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\lambda z \alpha}{2\pi\varepsilon_0 a^2(1+z^2/a^2)^{3/2}}$$

(b)

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda a}{4\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\sqrt{z^2+\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2}$$

$$V(z) = \frac{\lambda\pi a}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

Aplicaciones del Teorema de Gauss

44 Una carga puntual de valor q se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular el valor del flujo Φ del campo eléctrico creado por la carga a través del cuadrado determinado por los puntos: (L,-L,L), (L,L,L), (-L,L,L) y (-L,-L,L).

SOLUCIÓN

$$\Phi = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

45 Determinar el flujo F del campo eléctrico creado por dos cargas puntuales +q y -q separadas una distancia 2L a través de un círculo de radio a cuya circunferencia es equidistante de ambas cargas. Si el radio a crece indefinidamente, ¿ sabría relacionar el resultado con el teorema de Gauss ?

SOLUCIÓN

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a}{L})^2}}\right)$$

46 Una esfera de radio a tiene una carga total Q distribuida con simetría esférica de forma que su densidad cúbica vale:

$$\rho(r) = kr$$

siendo r la distancia al centro de la esfera y k una constante. Determinar: a) el campo eléctrico en el exterior de la esfera; b) el campo en su interior; y c) el potencial en el centro de la misma.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
E_{\text{ext}} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
E_{\text{int}} &= \frac{kr^2}{4\varepsilon_0} \\
V(r=0) &= \frac{ka^3}{3\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

47 Una esfera de radio a está cargada uniformemente con una densidad cúbica de carga ρ. a) Hallar el campo electrostático y el potencial en los puntos exteriores e interiores de la esfera. b) Representar gráficamente de forma cualitativa V y E en función de r, la distancia al centro de la esfera.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}}(r) &= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \\ E_{\text{int}}(r) &= \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \\ V_{\text{ext}}(r) &= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \\ V_{\text{int}}(r) &= \rho\frac{3R^2 - r^2}{6\varepsilon_0} \end{aligned}$$

48 Dentro de una esfera de radio a cargada uniformemente con una densidad ρ hay una cavidad esférica de radio b. Los centros de ambas esferas 0 y 0' están separados por una distancia d. Hallar el campo eléctrico en un punto cualquiera del interior de la cavidad.

SOLUCIÓN

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'}$$

49 Determinar el campo eléctrico que crea una distribución uniforme de carga, ρ, con simetría cilíndrica, de radio $a < 1$ m y altura infinita. Determinar el potencial en cualquier punto del espacio tomando el origen del mismo en la superficie $r = 1$ m.

SOLUCIÓN

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C' \qquad \text{para } r \leq a$$

$$E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad V(r) = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln r \qquad \text{para } r \geq a$$

donde

$$C' = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln a + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0}$$

50 Determinar el campo eléctrico en un punto que se encuentra a una distancia r del centro O de una distribución esférica de carga ilimitada cuya densidad volúmica ρ es:

$$\rho(r) = \rho_0\frac{a}{r}$$

en la que ρ_0 y a son constantes.

SOLUCIÓN

$$E(r) = \frac{a\rho_0}{2\varepsilon_0}$$

51 Sea el campo $\vec{E}(x,y,z) = ax\vec{i} + ay\vec{j}$ en el que a es una constante. Determinar: (a) el potencial V(x,y,z) si se toma como origen de potenciales el punto (0,0,0), (b) el trabajo W realizado al desplazar una carga q del punto $(x,y,0)$ al $(x',y',0)$ y (c) la densidad cúbica de carga ρ en un punto cualquiera del espacio.

SOLUCIÓN

(a) $V(x,y,z) = -a\frac{x^2+y^2}{2}$

(b) $W = \frac{qa}{2}(x'^2 + y'^2 - x^2 - y^2)$

(c) $\rho(x,y,z) = 2a\varepsilon_0$

52 Un campo E es originado por una distribución volúmica de carga de valor:

$$\rho(x) = \frac{k}{r^2}$$

en la que k es una constante. Hallar el potencial V(x) en un punto cualquiera del espacio si se toma el plano $x = 1$ m como origen del potencial.

SOLUCIÓN

$$V(x) = \frac{k}{\varepsilon_0}\ln x$$

53 Considérese una lámina plana infinita con un cierto grosor a, cargada homogéneamente con una densidad cúbica ρ. Determine el potencial V que crea en un punto exterior situado a una distancia h del plano medio de la lámina, que se tomará como origen del potencial.

SOLUCIÓN

$$V(h) = \frac{\rho a}{8\varepsilon_0}(a - 4h)$$

54 En el interior de una esfera hueca de radios a y b hay cierta distribución volúmica de carga $\rho(r)$ que crea un campo eléctrico $\vec{E}$ radial dado por

$$\begin{aligned} E &= 0 \qquad \text{para } r < a \\ E &= k(r-a) \qquad \text{para } a < r < b \\ E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{para } r > b \end{aligned}$$

Si la carga total de la distribucion es Q, determinar (a) la densidad de carga $\rho(r)$ y la constante k y (b) el potencial V al que se encuentra la superficie interior de la esfera.

SOLUCIÓN

(a) $\rho(r) = \varepsilon_0 k\left(3 - \frac{2a}{r}\right)$ para $a < r < b$, y es nula en cualquier otro punto.
$K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2(b-a)}$

(b) $V(r=a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{k}{2}(a-b)^2$

55 El potencial en un punto situado a la distancia r del centro de una distribución esférica de carga ilimitada viene dado por:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$$

en que a es una constante. Determinar la densidad cúbica de carga $\rho(r)$ de la distribución y demostrar que este potencial $V(r)$ es debido a la superposición de la densidad de carga $\rho(r)$ más una carga puntual Q en el centro de la distribución.

SOLUCIÓN

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi\rho}a^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$$

56 Una esfera de radio a está cargada con una densidad cúbica de carga de la forma:

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

en la que ρ_0 es una constante y r la distancia del punto al centro de la esfera. Aplicando las ecuaciones de Poisson y de Laplace determinar el campo eléctrico en puntos interiores y exteriores de la esfera, así como el potencial en el centro de la misma.

SOLUCIÓN

$$V(r=0) = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0}$$

Energía de una distribución de carga en el vacío

57 Fijados en los vértices de un cubo de lado a se encuentran ocho electrones y en su centro un ion positivo con Z protones. La carga de los electrones es $-e$ y su masa m. a) Hallar la energía W de la configuración en función de Z. b) Determinar el valor de Z mínimo, Z_0, por encima del cual la energía total del sistema es negativa. c) Y para $Z = Z_0$, determinar las velocidades finales de los ocho electrones si en un instante determinado se dejan libres simultáneamente.

SOLUCIÓN

(a)

$$W = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}(\alpha - \beta z)$$

con $\alpha = 24 + \frac{24}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}}$ y $\beta = \frac{32}{\sqrt{3}}$

(b) $Z_0 = 2$

(c) $v^2 = 4.32\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 ma}$

58 Sea una distribución de carga uniforme, con forma esférica de radio a y carga total Q. Determinar la energía W electrostática que posee por las tres vías siguientes: a) como la energía de una distribución de carga; b) como la energía que posee el campo eléctrico creado; y c) como el trabajo que ha sido necesario efectuar para formar esa distribución.

SOLUCIÓN

$$W = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Conductores: Ecuaciones de Poisson y de Laplace

59 Dos placas planas conductoras muy extensas y paralelas están separadas una distancia d; una está conectada a tierra ($V = 0$) y la otra al potencial $V = V_0$. Tomamos el eje OX perpendicular al plano de las placas, con su origen en el centro de la que se halla conectada a tierra. Si el espacio que hay entre las placas está cargado con densidad cúbica de valor

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{d}$$

determinar: a) el potencial $V(x)$ en el espacio que hay entre las placas y b) la densidad superficial de carga σ de las placas.

SOLUCIÓN

(a)

$$V(x) = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d} + Ax$$

donde $A = \frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}$

(b)

$$\sigma_{x=0} = -\varepsilon_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = -\frac{6V_0\varepsilon_0 + \rho_0 d^2}{6d}$$

$$\sigma_{x=d} = \varepsilon_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=d} = \frac{3V_0\varepsilon_0 - \rho_0 d^2}{3d}$$

Esferas conductoras concéntricas en influencia

60 A una esfera conductora de radio a se le da una carga Q y se la aisla. a) Determinar a qué potencial V_0 se encuentra. A continuación se la rodea sin tocarla por una capa esférica descargada de radio interior b y exterior c . b) Determinar a qué potenciales V_1 y V_2 pasarán a estar la esfera y la capa exterior respectivamente?

SOLUCIÓN

(a)

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

(b)

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \qquad V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

61 Sean tres esferas huecas, conductoras, concéntricas, aisladas y cargadas como sigue. La interna tiene una carga q_1. La intermedia se sabe que está al potencial V_2 pero se desconoce su carga Q. Y la externa tiene una carga q_3. Los radios interiores de las capas esféricas son a, b, d y los radios exteriores, A, B y D. Con estos datos determinar Q.

SOLUCIÓN

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 V_2 - \frac{q_3}{D}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{d} + \frac{1}{D}} - q_1$$

62 Tres esferas conductoras huecas de radios a, b y c, de espesor despreciable, dispuestas concéntricamente ($a < b < c$) están descargadas. Determinar el potencial y la carga de cada una de ellas si: a) la más externa se conecta a una tensión V_0. b) A continuación se conecta la esfera interior a la misma ten- sion V_0 y c) finalmente se conecta la esfera intermedia a tierra.

SOLUCIÓN

(a)

$$Q_1 = Q_2 = 0 \qquad Q_3 = 4\pi\varepsilon_0 c V_0 \qquad V_1 = V_2 = V_3 = V_0$$

(b) La situación es idéntica a la del apartado anterior.

(c)

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right) \quad ; \quad Q_2 = -4\pi\varepsilon_0 V_0 \left(\frac{c}{c-b} + \frac{a}{b-a}\right) b$$

$$Q_3 = 4\pi\varepsilon_0 V_0 \left(c + \frac{bc}{c-b}\right) \quad ; \quad V_1 = V_3 = V_0 \qquad V_2 = 0$$

Presión electrostática

63 Si el material con que se fabricase un globo esférico ligero fuese conductor, una manera posible de hincharlo podría ser conectándolo a una fuente de alta tensión. Supongamos que tenemos uno de tales globos de $R = 5.0$ cm de radio. a) Determinar a qué potencial V_m, debemos conectarlo si queremos que esté hinchado lo máximo posible pero que el campo eléctrico creado no sobrepase el valor del campo de ruptura en el aire, E_r, que es de unos 3×10^6 V/m. b) ¿ Qué sobrepresión Δp en su interior (dada en atmósferas) produciría el mismo efecto?

SOLUCIÓN

(a) $V_m = 1.5 \times 10^5$ V

(b) $\Delta p = 3,9 \times 10^{-4}$ atm

64 Determinar la fuerza de origen electrostático F a que está sometido uno de los hemisferios de una esfera conductora de radio a por estar conectada a un potencial V_0.

SOLUCIÓN

$$F = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{2} = 1.4 \times 10^{-11}\ V^2$$

Capacidades de conductores aislados

65 Una esfera metálica de radio a se carga al potencial V_0 y se aisla. A una gran distancia de esa esfera se encuentra otra, también metálica, de radio b inicialmente descargada. Con un hilo conductor muy delgado se tocan ambas esferas y a continuación se descarga la segunda. Si este proceso se va repitiendo indefinidamente (tocar y descargar), determinar el potencial V_n a que habrá quedado la primera esfera después de la n-ésima operación, suponiendo despreciable la carga que pueda adquirir el hilo después de cada uno de los contactos.

SOLUCIÓN

$$V_n = V_0 \left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}} \right)^n$$

66 Haciendo las aproximaciones que considere oportunas, determinar la capacidad de los siguientes conductores aislados: a) una esfera de radio a; b) un disco circular de radio a y espesor despreciable; y c) un alambre cilíndrico recto, de longitud l y radio a, con $a << l$.

SOLUCIÓN

(a) esfera: $C = 4\pi\varepsilon_0 a$

(b) disco plano: $C \approx 2\pi\varepsilon_0 a$

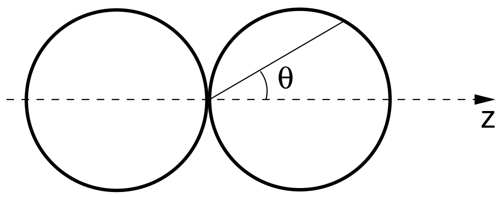
(c) alambre cilíndrico :

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{l}{a}}$$

67 Dos esferas conductoras de igual radio a son tangentes entre sí. Si se les conecta a una fuente de tensión sabemos que llegan al equilibrio electrostático adquiriendo una densidad superficial σ que se distribuye según la ley

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$$

siendo σ_0 es una constante y θ el ángulo que forma el vector de posición, fijando su origen el punto O de tangencia de ambas esferas, con la recta que une sus dos centros (ver la figura).Determinar a) la capacidad C del conjunto y b) la fuerza repulsiva F entre las dos esferas.



SOLUCIÓN

(a) $C = 6pi\varepsilon_0 a$

(b) $\frac{\pi a^2 \sigma_0}{3\varepsilon_0}$

68 Determinar la capacidad de un disco metálico delgado, de radio a, sabiendo que si se conecta a un potencial dado adquiere una carga que se distribuye sobre la superficie del disco en la forma:

$$\sigma(r) = \frac{k}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

siendo k una constante y r la distancia al eje del disco.

SOLUCIÓN

$C = 8\varepsilon_0 a$

Coeficientes de capacidad y de potencial

69 Calcular los coeficientes de capacidad e influencia C_{ij} de un sistema de conductores formado por dos esferas: a) de radios a y b, separadas una distancia d mucho mayor que a o que b; y b) concéntricas, de radios a y b ($b > a$). c) Calcular, además, los coeficientes de potencial p_{ij} para las dos esferas del apartado (a).

SOLUCIÓN

(a) $C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 a$; $C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{d}$; $C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 b$

(b) $C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 a$; $C_{12} = C_{21} = -C_{11}$; $C\_22 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{b^2}{b-a}$

(c) $p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$; $p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}$; $p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$

70 Determinar los 9 coeficientes de capacidad e influencia C_{ij} de tres esferas conductoras iguales, de radio a, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado d, suponiendo que d es mucho mayor que a. ¿ cuánto valdrán sus coeficientes de potencial P_{ij}?

SOLUCIÓN

$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 4\pi\varepsilon_0 a$ $\quad$ $C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{d}$

$p_{11} = p_{22} = p_{33} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$ $\quad$ $p_{12} = p_{23} = p_{13} = p_{21} = p_{32} = p_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$

71 Determinar los coeficientes de capacidad C_{ij}, de un sistema de conductores formado por tres placas planas iguales y paralelas, de área S, y separadas por las distancias d_{12} y d_{23}. Supóngase que estas distancias son muy pequeñas frente a las dimensiones de las placas.

SOLUCIÓN

$C_{12} = C_{21} = -C_{11}$; $C_{11} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_{12}}$; $C_{33} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_{23}}$;
$C_{22} = C_{11} + C_{33}$; $C_{32} = C_{23} = -\frac{\varepsilon_0 S}{d_{23}}$

72 Sean tres conductores cuya proximidad hace que se influencien entre sí. Sus potenciales son V_1, V_2 y V_3. La matriz de los coeficientes de capacidad es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

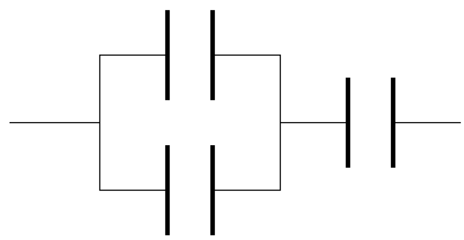
Determine el potencial V que adquieren los tres conductores si se unen mediante un hilo de capacidad despreciable.

SOLUCIÓN

$$V = V_2 + \frac{V_3}{2}$$

Condensadores

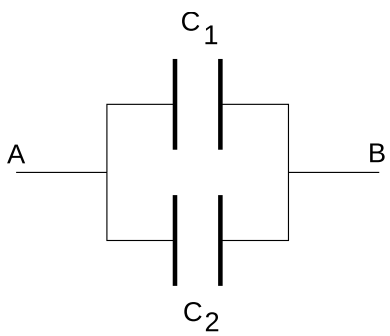
73 Se tiene el circuito de la figura formado por dos condensadores en paralelo de capacidades C_1 y C_2, cargados bajo tensiones V_1 y V_2,y un tercero, en serie, a V_3. Hallar la capacidad C_3 del tercero.



SOLUCIÓN

$$C_3 = (C_1 + C_2)\frac{V_1}{V_3}$$

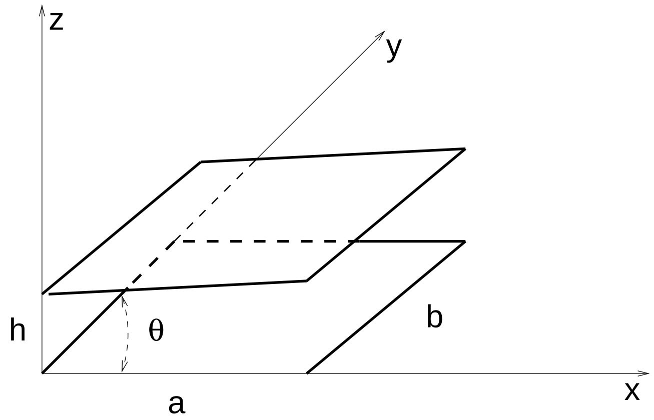
74 Se conectan en paralelo dos condensadores. Uno C_1, de 2 μF, está cargado a 300 V, el otro, C_2, está descargado. El resultado da una tensión entre A y B de 250 V. Hallar la capacidad del segundo condensador.



SOLUCIÓN

$C = 0.4\ \mu$F

75 Dos láminas rectangulares iguales de lados a y b conductoras y dispuestas como se indica en la figura constituyen un condensador diédrico. Si el ángulo θ que forman es pequeño, determinar: a) su capacidad C, y b) como se distribuye la carga sobre cada lámina si se aplica al condensador una diferencia de potencial V.



SOLUCIÓN

$$C \approx C_0 \left(1 - \frac{a\theta}{2h}\right)$$

donde:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{ab}{h}$$

La densidad de carga se distribuye según la expresión:

$$\sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V}{h + x\tan(\theta)}$$

76 Dos láminas metálicas iguales, que se encuentran fijas enfrentadas paralelamente y separadas por la distancia d, se conectan a los potenciales V_1 y V_3. Entre estas dos láminas hay otra igual paralela a las anteriores, de masa despreciable y que puede desplazarse libremente entre las otras dos sin perder su paralelismo. Si esta última lámina se conecta al potencial V_2, se moverá a derecha o a izquierda hasta encontrar su posición final de equilibrio. Determinar para la posición de equilibrio: a) la distancia x_f (referida a la placa que está a V_1) a la que ha quedado dicha lámina; b) el tipo de equilibrio en que se halla; y c) las fuerzas F a las que está sometida la lámina.

SOLUCIÓN

$$x_f = \frac{V_2 - V_1}{2V_2 - V_1 - V_3} d \qquad \text{si} \qquad V_2 > V_3 > V_1$$

$$x_f = \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_1} d \qquad \text{si} \qquad V_1 < V_2 < V_3$$

$$|F| = \frac{\varepsilon_0 S}{2} (V_2 - V_3)^2 \frac{1}{(d - x_f)^2}$$

77 Tres esferas conductoras huecas de grosor despreciable concéntricas tienen los radios a, b, y c, con $a < b < c$. Si unimos la tercera con la primera, determinar la capacidad C del sistema.

SOLUCIÓN

$$c = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

78 En un condensador plano cuyas armaduras están separadas una distancia d se inserta, paralelamente a las mismas una lámina conductora de grosor t ($t < d$) de área suficientemente grande para cubrirlas. Determinar en que proporción aumenta la capacidad del condensador.

SOLUCIÓN

La capacidad aumenta en la proporción $\frac{d}{d-t}$

79 Tres condensadores de capacidades C_1, C_2 y C_3 están conectados a los potenciales V_1, V_2 y V_3, respectivamente. Se desconectan y se asocian los tres en serie uniendo las armaduras de signo distinto. Calcular: a) La cargas finales que han adquirido los tres condensadores después de la unión y b) la disminución de energía electrostática del sistema. c) ¿En que se ha invertido la energía que se ha perdido?

SOLUCIÓN

(a) $Q_1' = Q_1 - \Delta Q \qquad Q_2' = Q_2 - \Delta Q \qquad Q_3' = Q_3 - \Delta Q$

(b)

$$\Delta W = W_f - W_i = -\frac{1}{2} \frac{(V_1 + V_2 + V_3)^2}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

(c) Se ha perdido en forma de calor por efecto Joule

3. Electrocinética

80 Un conductor cilíndrico hueco, de longitud L, tiene radios R_1 y R_2. Se aplica una diferencia de potencial entre sus extremos de tal modo que una corriente I fluye paralelamente a su eje. Demostrar que si σ es la conductividad del material, la resistencia del conductor es

$$R = \frac{L}{\pi\sigma(R_2^2 - R_1^2)}$$

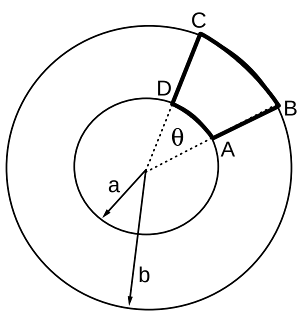
Demostrar que si la diferencia de potencial se aplica entre la superficie interior y la exterior de modo que la corriente fluye en dirección radial hacia afuera, entonces la resistencia es

$$R = \frac{\ln(\frac{R_2}{R_1})}{2\pi\sigma L}$$

81 Se recorta un sector de ángulo θ de un disco de espesor c. Si la conductividad del material del disco es σ, hallar la resistencia de la corona ABCD,

(a) si los electrodos son AB y CD.

(b) si los electrodos son AD y BC.



SOLUCIÓN

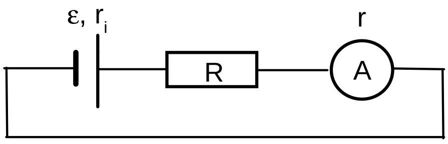
(a) $R = \frac{\theta}{\sigma c \ln \frac{b}{a}}$.

(b) $R = \frac{\ln \frac{b}{a}}{\sigma c \theta}$.

82 En el circuito de la figura el amperímetro A tiene una resistencia $r = 2\ \Omega$. Si la resistencia R vale $R_1 = 38\ \Omega$ entonces A marca 0,2 A y si R es $R_2 = 17\Omega$, A marca 0,4 A. ¿ Qué valen la resistencia interna y la fem de la batería?

SOLUCIÓN

La resistencia interna 2 Ω y la fem 8,4 V.



83 Se monta un circuito como el de la figura con los valores de los condensadores y la fem conocidos. Inicialmente al conectar el generador hay un transitorio, pero inmediatamente se alcanza el estado estacionario. Se pide

(a) Corriente que circula por el generador.

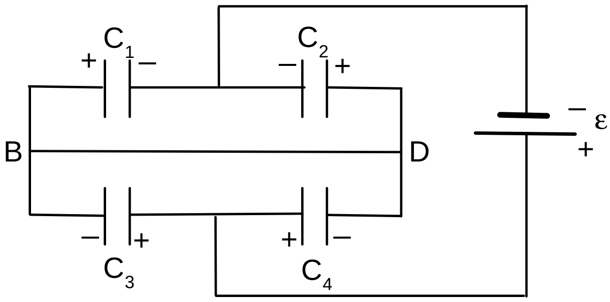
(b) Carga de cada condensador.

(c) Energía total almacenada en los condensadores

(d) ¿ Qué ocurre si se abre la rama BD ?

(e) ¿ Cómo se distribuye la carga si se desconecta el generador?

(f) ¿ Qué ocurre si se cortocircuita el generador ?



SOLUCIÓN

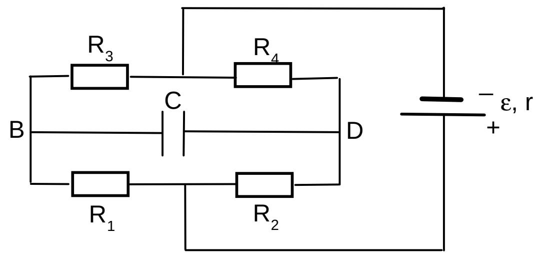
a) $I = 0$
b) $Q_1 = \varepsilon c_1(c_3+c_4)/C$; $Q_2 = \varepsilon c_2(c_3+c_4)/C$; $Q_3 = \varepsilon c_3(c_1+c_2)/C$; $Q_4 = \varepsilon c_4(c_1+c_2)/C$; donde $C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$
c) $W = \varepsilon^2(c1 + c2)(c3 + c4)/2C$
d) Nada.
e) $Q_1 = \varepsilon c_1(c_3 + c_4)/C$; $Q_2 = \varepsilon c_2(c_3 + c_4)/C$; $Q_3 = \varepsilon c_3(c_1 + c_2)/C$; $Q_4 = \varepsilon c_4(c_1 + c_2)/C$.
f) Se descargan los condensadores.

84 Se tiene la red de la figura con $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$,$R_4 = 8\ \Omega$, $C = 20\ \mu$F, $\varepsilon = 23$ V, y $r = 1\ \Omega$. Se supone que está en estado estacionario. Se pide

(a) La relación entre las resistencias para que la armadura conectada entre R_3 y R_1 sea positiva.

(b) Las intensidades que circulan por cada rama.

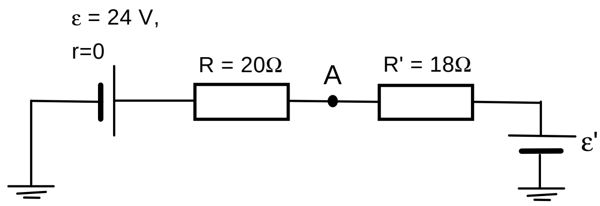
(c) La carga del condensador.



SOLUCIÓN

a) $R_1(R_2 + R_4) > R_2(R_1 + R_3)$
b) $I_1 = 2$ A, $I_2 = 1$ A ; $I = 3$ A
c) 120 μC

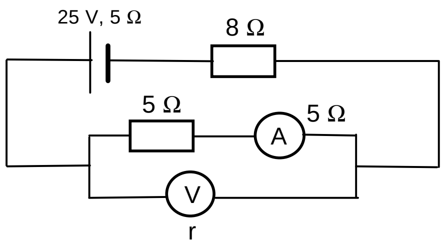
85 Hallar el potencial V, respecto de tierra, de A si se intercala entre R' y el suelo una segunda pila $\varepsilon' = 5$ V como se indica



SOLUCIÓN

14 V

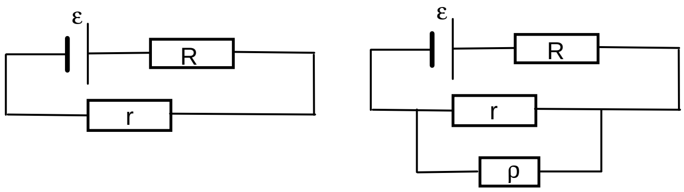
86 Si el amperímetro A del circuito de la figura marca 1 A. ¿ Cuánto marca el voltímetro V ? Hallar la resistencia r del voltímetro.



SOLUCIÓN

$r = 65\ \Omega$, V=10 V

87 En el circuito (1).a) Hallar la ddp V entre los bornes de r en función de R, ε y r. b) Para medir V, se coloca en derivación con r un voltímetro (ver circuito (2)) de resistencia interna ρ. Calcular el valor del potencial V' que indica el voltímetro en función de ε, R, r y ρ. c) Hallar V/V'. ¿ Qué condición ha de satisfacer ρ si el error relativo cometido al medir V deber ser inferior a 1/1000?.



(1) (2)

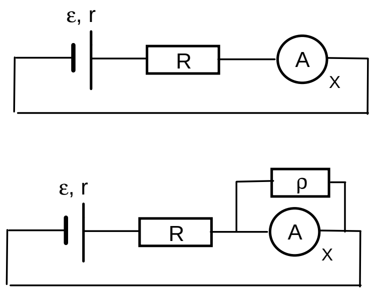
SOLUCIÓN

(a) $V = \varepsilon r/(R + r)$

(b) $V' = \rho r\varepsilon/(\rho(R + r) + rR)$

(c) $V/V' = (Rr + \rho(R + r))/\rho(R + r)$; $\rho > 1000Rr/(R + r)$

88 Se tiene un amperímetro cuya resistencia interna x se desconoce. Para determinarla se hacen dos montajes: primero se coloca el amperímetro A en serie con una pila de fem ε y resistencia interna r y con una resistencia R, ambas conocidas. De esta manera pasa una cierta intensidad por A. A continuacií sumo una resistencia ρ en paralelo con A y ajusto hasta que la intensidad por A es justo la mitad que antes. Hallar la verdadera resistencia x del amperímetro A. Hallar el error absoluto y relativo cometidos en la medida respecto a ρ si se toma éste como valor admitido de A. ¿ Cuál debe ser el valor de R si se desea que el error relativo sea inferior a 1 / 1000?.

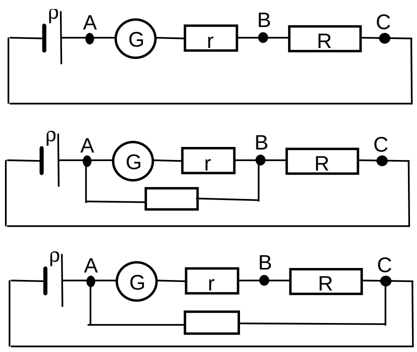


SOLUCIÓN

$x = (r\rho + R\rho)/(R + r - \rho)$; $e_a = x - \rho$; $e_r = \rho/(R + r)$; $R > 1000\rho - r$

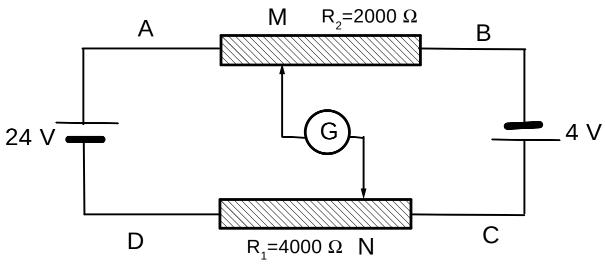
89 Se monta en serie con una pila de fem ε un galvanómetro G y dos resistencias R y r. Entre A y B se coloca un shunt y se observa en el galvanómetro cierta desviación. Si coloco el shunt entre A y C la desviación es la misma. Hallar la resistencia interna ρ de la pila .Los valores de las resistencias R y r son datos.

SOLUCIÓN



$\rho = R + r$

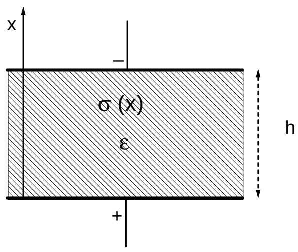
90 Halla el valor que puede tener la resistencia x entre NC de manera que para alguna posición del cursor M, se tenga que i(G)=0.



SOLUCIÓN

$2000 < x < 4000$

91 Entre dos electrodos planos y paralelos se coloca una placa dieléctrica de espesor h y permitividad ε. Su conductividad varía linealmente desde σ_0 en la placa positiva hasta $\sigma_0(1+h)$ en la negativa. Si se forma una carga espacial $\rho(x)$ independiente del tiempo. Hallar $rho(x)$ en el supuesto que la densidad de corriente j que se origina es óhmica

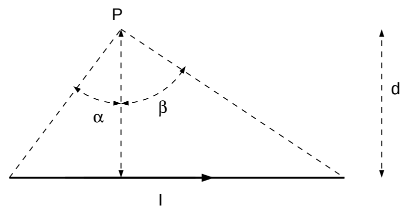


SOLUCIÓN

$\rho = -\varepsilon k/(\sigma_0 + x)^2$

4. Magnetostática

92 Hallar el campo magnético creado por una corriente de intensidad I que recorre un segmento rectilíneo en un punto situado entre sus extremos a una distancia d del hilo. A partir del resultado anterior, determine el campo magnético que crea una corriente rectilínea muy larga.



SOLUCIÓN

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin(\alpha) + \sin(\beta))$$

En el caso de que el hilo sea muy largo α , $\beta \to \pi/2$ y

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

93 Campo de una espira circular:

(a) Determinar el campo magnético creado por una corriente de intensidad I que recorre una espira circular de radio a, en un punto P del eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro.

(b) Determine el valor de dicho campo en el centro de la espira.

SOLUCIÓN

(a) $B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$

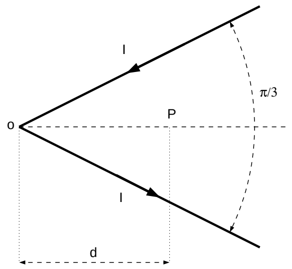
(b) $B_z(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$

94 Un hilo infinito se ha doblado formando un àngulo $\theta = \pi/3$ en un punto 0. Hallar el campo magnético B en el punto P de la bisectriz del ángulo, situado a una distancia $d = 1$ cm del vértice, si la corriente es de $I = 1000$ A.

SOLUCIÓN

B = 0.0746 T

95 Hallar el campo magnético en el centro de una espira formada por un polígono regular de $2n$ lados, siendo $2a$ la distancia entre dos lados paralelos, si por la misma circula una corriente de

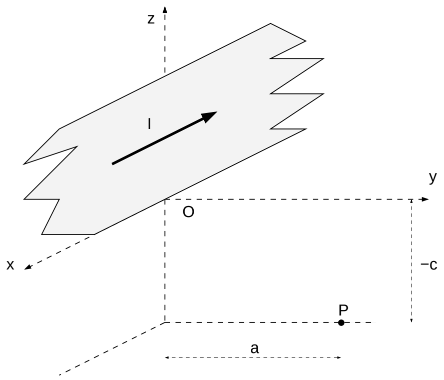


intensidad I. Ver que si n tiende a infinito, el campo resultante es el obtenido en el problema 2, correspondiente a una espira circular.

SOLUCIÓN

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi a}\sin(\frac{\pi}{n})$$

96 Una cinta metálica muy larga y de anchura d está recorrida por una corriente I distribuida uniformemente por ella. Hallar el campo magnético en el punto P que está colocado en el punto (0,a,-c) en el sistema de coordenadas de la figura.



SOLUCIÓN

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\ln\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\theta_2 - \theta_1)$$

donde $\tan\theta_1 = c/a$ y $\tan\theta_2 = (c+d)/a$

97 Se fabrica una bobina sobre una esfera de material no magnético utilizando hilo conductor fino, enrollando N espiras por unidad de longitud en la dirección diametral. Si la esfera tiene radio a

y por el hilo hacemos circular una corriente de intensidad I, determinar el campo magnético en el centro de la esfera.

SOLUCIÓN

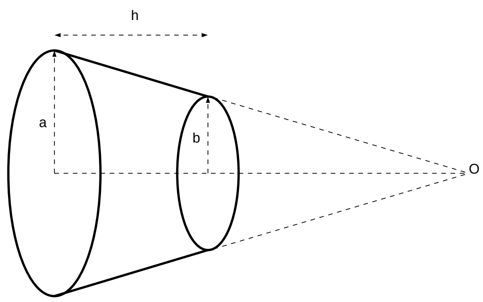
$$B = \frac{2N\mu_0 I}{3}$$

98 Hallar el campo magnético en el centro de una esfera conductora hueca de radio a, cargada a potencial V_0, que gira a velocidad angular constante ω.

SOLUCIÓN

$$B = \frac{2\mu_0\epsilon_0 V_0\omega}{3}$$

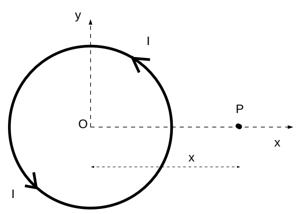
99 Se fabrica una bobina con n espiras sobre un tronco de cono de altura h, que tiene el círculo de la base mayor de radio a y el de la base menor de radio b, utilizando hilo conductor delgado. Si hacemos circular una corriente de intensidad I, hallar el campo magnético en el vértice O del cono que resulta de prolongar el tronco.



SOLUCIÓN

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2h^2}\frac{\ln(a/b)}{(1 + a^2/h^2)^{3/2}}$$

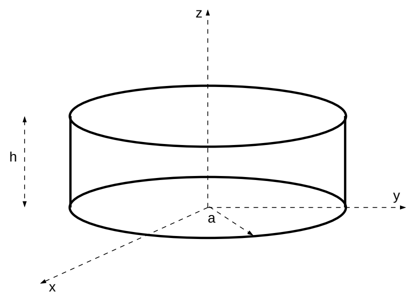
100 Hallar el campo magnético creado por una corriente de intensidad I que recorre una espira de radio a en el punto P del plano de la espira indicado en la figura (suponga que $x \gg a$).



SOLUCIÓN

$$B = -\frac{\mu_o I a}{4x}\vec{k}$$

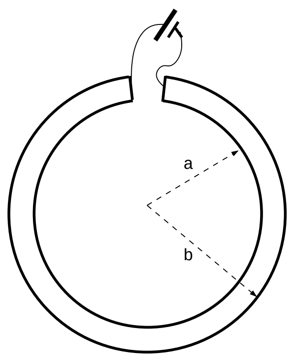
101 Tenemos un conductor cilíndrico de radio a y altura h. En el mismo hay una distribución volúmica de corriente que en coordenadas cilíndricas viene dada por $\vec{j} = j_0 \frac{r}{a} \vec{u_\varphi}$. Hallar el campo magnético en un punto del eje del cilindro situado a una altura a del plano superior del mismo. (Suponga que $h \ll a$.



SOLUCIÓN

$$B = \mu_0 j_0 h \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \vec{k}$$

102 Se forma un toroide de sección rectangular de radio interior a radio exterior b y altura e con un material de conductividad γ. Se corta una sección muy pequeña y se conectan las caras a una fuente de potencial de manera que circula por el toroide una corriente de intensidad I. Como la sección cortada es muy pequeña podemos suponer que las caras del corte son equipotenciales. Determine la densidad volúmica de corriente en el material, la potencia disipada por la corriente y el campo magnético que crea en su centro. Para el cálculo del campo magnético, suponga que e es muy pequeña.



SOLUCIÓN

$$j(r) = \frac{I}{er\ln(b/a)}$$
$$P = \frac{2\pi I^2}{\gamma e\ln(b/a)}$$
$$B = \frac{\mu_0 I(b-a)}{2ab\ln(b/a)}$$

103 Dos espiras iguales de radio a se colocan una frente a otra a una distancia a. Si ambas son recorridas por corrientes en el mismo sentido, hallar el punto del eje que une los centros de ambas espiras para el que el campo magnético es mínimo.

SOLUCIÓN

$x_{min} = a/2$

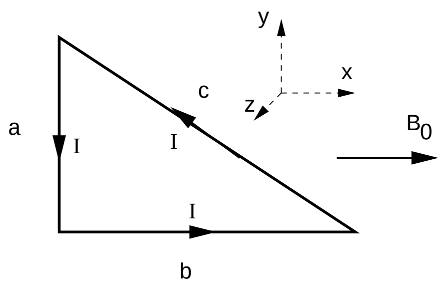
Fuerzas y pares

104 Un conductor cilíndrico de radio a es recorrido por iones libres con carga q , masa m, a velocidad constante v, siendo N su concentración. Demostrar que sobre un ión distante r del eje del cilindro hay una aceleración radial. Hallar su valor, y ver en que caso es nula. Si la v es muy pequeña, ver que en este caso depende unicamente de r.

SOLUCIÓN

$$a_r = \frac{Nq^2r}{2m\epsilon_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

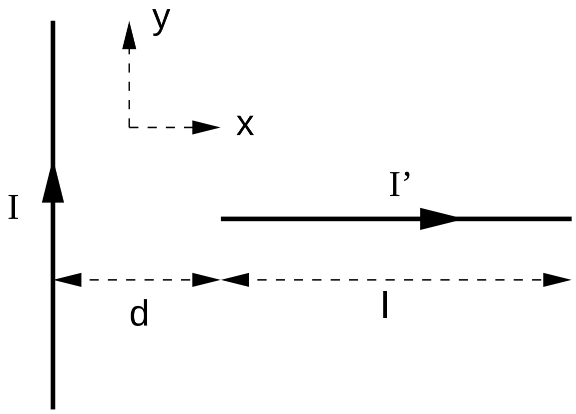
105 Con un hilo conductor construimos un triángulo rectángulo de catetos c y b, e hipotenusa a. Lo colocamos en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{i}$ de dirección paralela al cateto b. Hallar la acción del campo sobre el triángulo si se supone que sus lados están recorridos por una corriente I en el sentido opuesto al de las agujas del reloj.



SOLUCIÓN

La fuerza total sobre el triángulo es nula.
Sobre él actúa un par de fuerzas cuyo momento es $\Gamma = IbaB/2$ y que tiende a girar la normal al plano del triángulo en dirección de $\vec{B}$

106 Se coloca verticalmente un hilo recto e indefinido por el que circula una corriente I y horizontalmente otro finito de longitud l, de modo que ambos definen un plano. El punto del hilo horizontal más próximo al hilo vertical se halla a una distancia d. Si por el hilo horizontal circula una corriente I', ¿ qué fuerza actúa sobre éste y dónde tiene su punto de aplicacion ?



SOLUCIÓN

$$F = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \ln\left(\frac{l+d}{l}\right)\vec{k}$$

a una distancia

$$s = \frac{d}{\ln(\frac{d+l}{d})}$$

107 Un condensador cilindrico se coloca en el seno de un campo magnético de manera que el eje del cilindro es paralelo al campo. El condensador tiene la armadura interna de radio R_1 y la externa de radio R_2 y está sometido a una diferencia de potencial V_0 entre las armaduras. De la armadura interna se fuga radialmente un electrón de carga q y masa m, cuya trayectoria se curva bajo la acción del campo magnético aplicado. ¿Qué valor debe tener el campo magnético para que el electrón al contactar con la armadura externa sea tangente al cilindro?.

SOLUCIÓN

$$B = \frac{8Mm}{q}\frac{R_2^2\ln(R_2/R_1)}{(R_2^2-R_1^2)^2}$$

, donde

$$M = \frac{qV_0}{m\ln(R_2/R_1)}$$

108 Una varilla de masa m, formada por un material de densidad dad δ, está situada sobre el eje X en el seno de un campo magnético $\vec{B} = -B\vec{k}$. Se observa que, cuando por la varilla circula cierta corriente, la varilla permanece en equilibrio. Hallar la densidad cúbica de corriente j que circula por la varilla cuando está en equilibrio

SOLUCIÓN

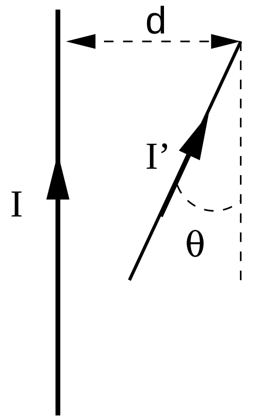
$$\vec{j} = \delta g / B\vec{i}$$

109 Una varilla está colocada perpendicularmente entre dos rieles paralelos situados en un plano horizontal. Entre las varillas hay un campo magnético B=1000 G, perpendicular al plano que forman y sentido hacia abajo. Si tenemos que la densidad de la varilla es de $\delta = 8$ g/cm^3, que el coeficiente de rozamiento entre varilla y rieles es $\mu = 0.2$ y que la varilla es recorrida por una corriente de densidad $j = 0.3$ A/mm^2, hallar el tipo de movimiento que realizará la varilla.

SOLUCIÓN

Se trata de un movimiento uniformemente acelerado con aceleración $a = (Bj/\delta) - mg = 1,79$ m/s

110 Un hilo recto vertical e indefinido es recorrido por una corriente de intensidad I. A una distancia d, hay un hilo, de longitud h, que puede oscilar entorno a un punto fijo O. Al circular por este hilo una intensidad I' en el mismo sentido que I, resulta atraído por el hilo largo formando en equilibrio un ángulo pequeño θ. Determinar el valor de θ si el hilo corto tiene masa m



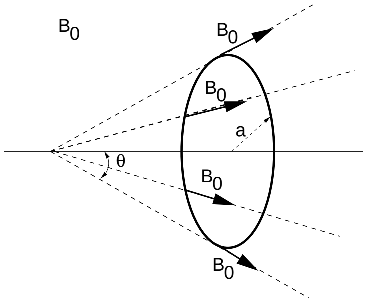
SOLUCIÓN

$$\theta = \left(\frac{2\pi dmg}{\mu_0 hII'} - \frac{2h}{3d} \right)^{-1}$$

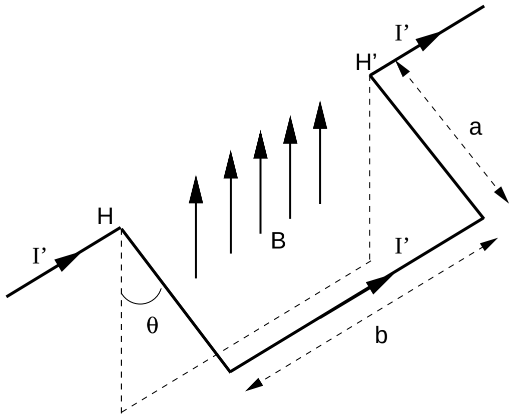
111 Un anillo metálico de radio a y masa m está sometido a un campo magnético de valor B_0 cuyas líneas vectoriales convergen en un punto, de forma que definen un cono de ángulo θ cuyo eje es normal al plano de la espira. Determinar la intensidad de la corriente que debe recorrer el anillo para que se desplace 2 cm en 5 s. Suponer que no existe rozamiento.

SOLUCIÓN

$$I = \frac{1.6 \times 10^{-3}}{2\pi a B_0 \sin(\theta)} \text{ A}$$



112 Un hilo conductor rígido de densidad lineal de masa δ está doblado en forma de U como se muestra en la figura. Se coloca en un plano vertical, de manera que sus extremos se apoyan sobre dos horquillas H y H' dispuestas horizontalmente, con lo que la U puede girar libremente sobr el eje HH'. Si por el hilo pasa una corriente de intensidad I, y éste está bajo la influencia de un campo magnético B uniforme y vertical, determinar el ángulo θ que formará el plano de la U con la vertical en la posición final de equilibrio.

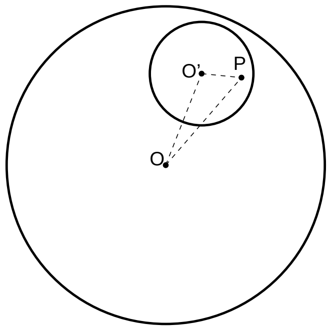


SOLUCIÓN

$$\tan\theta = \frac{IBb}{lg(a+b)}$$

Teorema de Ampère

113 (a) Un hilo cilíndrico muy largo tiene radio a y está recorrido por una corriente en la dirección de su eje, cuya densidad cúbica, j, es constante. Dar los valores del campo magnético en el interior y en el exterior del cilindro. (b) A continuación se supone que se hace un hueco, también cilíndrico de eje paralelo al eje del primero. Determinar el campo magnético en un punto P interior al hueco.



SOLUCIÓN

(a)

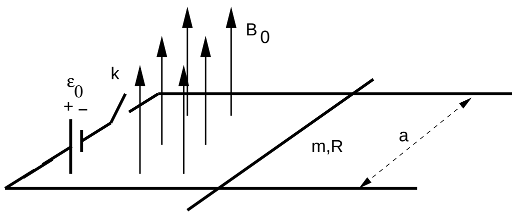
$$B(r < a) = \frac{\mu_0 j r}{2} \qquad B(r > a) = \frac{\mu_0 j a^2}{2r}$$

(b)

$$B(P) = \frac{\mu_0}{2} \vec{OO'}$$

5. Inducción magnética

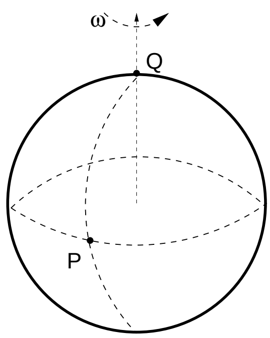
114 Dos barras conductoras, de resistencia despreciable, están dispuestas paralelamente sobre un plano horizontal, separadas una distancia a. Por un extremo, las barras se han conectado a una batería de fem ϵ_0. sobre las barras hay otra barra conductora móvil, que se mantiene siempre perpendicular a las otras barra y cierra el circuito, cuya resistencia eléctrica es R. El circuito está en el seno de un campo magnético uniforme, perpendicular al plano de las barras que va de abajo a arriba y de valor B_0. Hallar el valor de la velocidad de la barra móvil en función del tiempo cuando se cierra el interruptor k (Despreciar los efectos de la corriente de cierre)



SOLUCIÓN

$$v = \frac{\epsilon_0}{aB_0}\left(1 - \exp\left(-\frac{a^2B_0^2t}{mR}\right)\right)$$

115 Una capa esférica metálica de radio a gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. En la dirección z hay un campo magnético, con módulo B_0 y dirigido en el sentido positivo del eje z. ¿Qué fem se induce entre los puntos P y Q de la capa como consecuencia de la rotación?



SOLUCIÓN

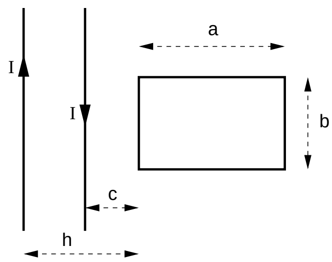
$$\epsilon_{ind} = \frac{\omega a^2 B_0}{2}$$

116 Un anillo de alambre circular está situado en el plano XY con su centro en el origen de coordenadas. El anillo se calienta de manera que su radio crece con el tiempo t a velocidad v siguiendo la ley $r = vt$. Se aplica un campo magnético $\vec{B} = B_0(1 + at)\vec{k}$ donde B_0 y a son constantes. Hallar la fem inducida en el anillo

SOLUCIÓN

$$\epsilon = B_0\pi v^2(2t + 3at^2)$$

117 Una espira rectangular se sitúa a la derecha de dos hilos conductores verticales muy largos recorridos por sendas corrientes cuyas intensidades son de igual valor pero de sentido contrario, como se muestra en la figura. Si se supone que las corrientes crecen a velocidad $\dot{I} = v$. Hallar la fem inducida en la espira.



SOLUCIÓN

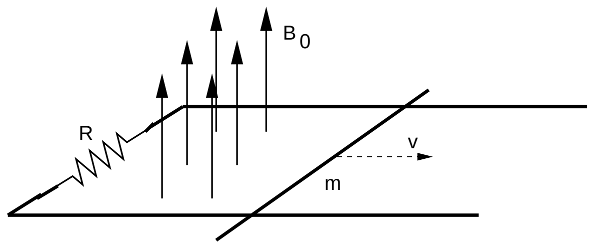
$$\epsilon_{ind} = \frac{\mu_0 vb}{2\pi}\ln\left(\frac{(h+a)c}{(c+a)h}\right)$$

118 Se tiene un conductor rectangular de lados a y b, contenido en el plano YZ, con uno de sus lados paralelo a uno de los ejes, cuya resistencia eléctrica es R. Se supone que hay un campo aplicado $\vec{B} = (1 - y, x, z)$. El cuadro se desplaza hacia los valores de Y crecientes. En t=0, su lado vertical esta sobre el eje Z. Si su aceleración es g, hallar la intensidad de la corriente que circula por el circuito pasado un tiempo t.

SOLUCIÓN

$$I = \frac{agbt(gt^2 + b)}{R}$$

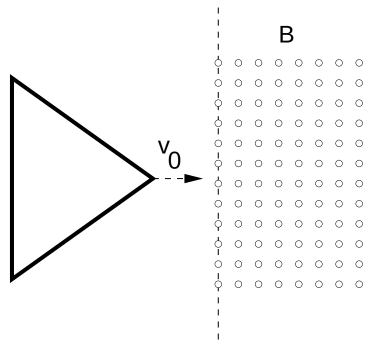
119 Una barra de masa m desliza sin rozamiento sobre dos largos carriles conductores paralelos separados por una distancia a. Por un extremo los carriles están conectados mediante una resistencia R. En la región hay un campo magnético uniforme de módulo B_0 en dirección normal al plano de los carriles , como se muestra en la figura. Se da un impulso a la barra de manera que inicia su movimiento con velocidad inicial v_0. Determinar: (a) la fem inducida; (b) la intensidad de la corriente inducida; (c) la fuerza sobre la varilla; (d) la velocidad de la barra en el instante t; (e) La distancia Δx que debe recorrer la barra para pararse; (f) Explique qué ocurre con la energía cinética inicial de la barra.



SOLUCIÓN

(a) $\epsilon_{ind} = B_0 av$; (b) $I = B_0 av/R$; (c) $F = B^2a^2v/R$; (d) $v = v\exp(-B^2a^2t/mR)$; (e) $\Delta x = \frac{mRv_0}{B^2a^2}$; (f) Se disipa en forma de calor en la resistencia por efecto Joule. Se puede comprobar que $\int_0^\infty RIdt = \frac{1}{2}mv_0^2$

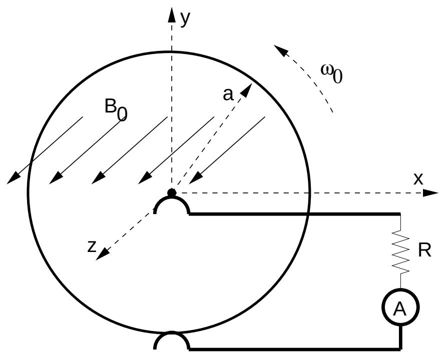
120 Una espira conductora de masa m está formada por un material cuya resistencia por unidad de longitud es ρ. La espira tiene forma de triángulo equilátero cuya altura es h. Se supone que la espira se desplaza sin rozamiento y a velocidad v_0 constante, sobre un plano horizontal. La espira penetra en una región en la que hay un campo magnético uniforme de módulo B perpendicular la plano de la espira. Hallar el valor que debe tener el campo B para que en el instante en el que la espira penetre completamente en dicha región se detenga.



SOLUCIÓN

$$B = \sqrt{\frac{9m\rho v_0}{2h^2}}$$

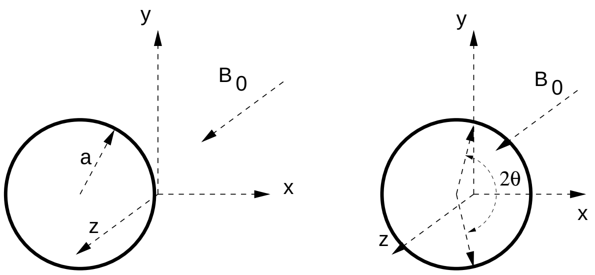
121 Un disco conductor de radio a, situado en el plano XY, y con su centro en el origen de coordenadas, gira entorno al eje Z con velocidad angular constante $w = w_0\vec{k}$. Este disco se halla bajo la acción de un campo magnético uniforme y estacionario $B = B_0\vec{k}$ y tiene conectadas en su eje centro y periferia unas escobillas conectadas a través de una resistencia R y un amperímetro. Hallar (a) la fem inducida en el disco; (b) la intensidad que indica el amperímetro y (c) la potencia mecánica que hay que suministrar al disco para que mantenga su rotación a velocidad angular constante como hemos supuesto.



SOLUCIÓN

(a) $\epsilon_{ind} = \omega_0 a^2 B_0/2$; (b) $I = \omega_0 a^2 B_0/2R$; (c)$P = B^2 a^4 \omega_0^2/4R$

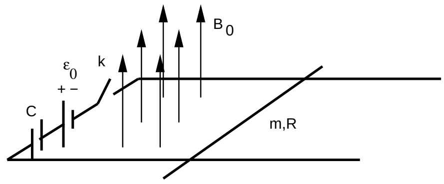
122 Una espira circular de radio a, de resistencia eléctrica R, está situada en el plano XY. En el instante inicial se halla justo al borde de una línea que tomaremos como eje Y. En la zona $x > 0$ hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{k}$. Si la espira inicia un desplazamiento, hacia el interior de la zona $x > 0$. Calcular (a) la intensidad de la corriente inducida en la espira cuando ha penetrado un sector de ángulo 2θ; (b) la fuerza sobre la espira en dicha situación y (c) el trabajo que debemos desarrollar para llevar a velocidad constante v_0 el centro de la espira hasta el eje Y.



SOLUCIÓN

(a) $\epsilon_{ind} = 2B_0 a^2 \dot{\theta} \sin^2(\theta)$; (b) $I_{ind} = 2B_0 a^2 \dot{\theta} \sin^2(\theta)/R$; (c) $P = 8B_0^2 a^3 v_0/3R$

123 Una barra conductora de resistencia R y masa m se mueve sin rozamiento sobre dos raíles conductores paralelos, separados una distancia a y que se hallan sobre un plano horizontal, de manera que siempre se mantiene perpendicular a las guías. Los raíles se hallan conectados por un extremo a través de una batería de fem ϵ y un condensador de capacidad C. Entre los raíles existe un campo magnético uniforme de módulo B_0 en dirección perpendicular al plano que determinan las guías. Si la barra se halla inicialmente en reposo y cerramos el interruptor k, determinar (a) la velocidad de la barra en función del tiempo; (b) la carga del condensador en función del tiempo; (d) la energía total que proporciona el generador; (e) La energía total disipada por efecto Joule y (f) la energía final almacenada en el condensador.



SOLUCIÓN

(a)

$$v = \frac{\epsilon B a \tau}{mR}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{, donde} \qquad \tau = \frac{mRC}{m + CB^2a^2}$$

(b)

$$i = \frac{m}{Ba}\frac{dv}{dt} = \frac{\epsilon}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

(c)

$$Q = \frac{\epsilon\tau}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad Q_{final} = \frac{\epsilon\tau}{R}$$

(d)

$$W_{Generador} = \frac{\epsilon^2\tau}{R}$$

(e)

$$W_{Joule} = \frac{\epsilon^2\tau}{2R}$$

(f)

$$W_{Condensador} = \frac{\epsilon^2\tau^2}{2R^2C}$$

124 Una varilla conductora de masa m se deja caer sin velocidad inicial desde lo alto de un plano inclinado θ respecto de la horizontal. La varilla desliza sobre dos carriles paralelos que distan a entre sí, con un coeficiente de rozamiento μ. Se supone que hay aplicado un campo magnético vertical ascendente de valor constante B_0 y se sabe que en el extremo de los raíles hay una resistencia R que cierra el circuito. Hallar (a) la velocidad de caída de la varilla y (b) su velocidad cuando alcanza el régimen estacionario

SOLUCIÓN

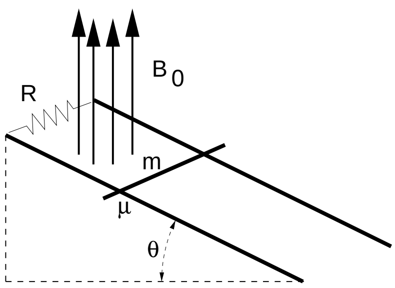
(a)

$$v = \frac{A}{C}(1 - \exp(-Ct))$$

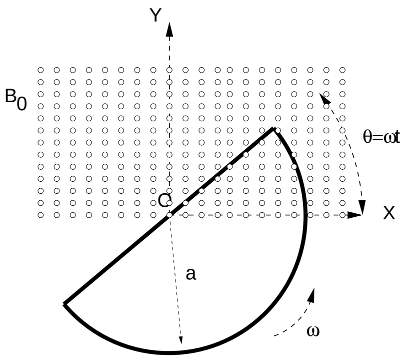
donde $A = g(\sin(\theta) - \mu\cos(\theta))$ y $C = (Ba)^2(\cos^2(\theta) + \mu\sin(\theta)\cos(\theta))/mR$

(b)

$$v_{lim} = A/C$$



125 Con hilo de resistencia por unidad de longitud igual a ρ se forma circuito con forma de una semicircunferencia de radio a cerrada por su diámetro mediante un conductor recto de resistencia despreciable. Se cuelga de su centro O de manera que su plano queda vertical y el diámetro que la cierra queda sobre el eje X. A continuación se hace girar alrededor de O con velocidad angular constamte $\vec{\omega} = \pi\vec{k}$ rad/s. Si se supone que existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{i}$ en la región la zona $y > 0$, deducir (a) el flujo del campo magnético a través del circuito en función del tiempo cuando la circunferencia ha penetrado un ángulo θ; (b) la fem inducida en el circuito; (c) la intensidad que circula por el circuito; (d) la fuerza que actúa sobre un elemento de arco y de diámetro y (e) el momento total de las fuerzas que actúan sobre el circuito.



SOLUCIÓN

(a)

$$\Phi = B_0 a^2 \pi t/2$$

(b)

$$\varepsilon = B a^2 \pi/2$$

(c)

$$i = \frac{B_0 a}{2\rho}$$

(d)

$$M_0 = \frac{B_0^2 a^3}{4\rho}$$

Potencial vector

126 Si un campo magnético $\vec{B}$ es uniforme, demostrar que el potencial vector $\vec{A}$ asociado a cada punto de vector posición $\vec{r}$ vale $\vec{A} = -(\vec{r} \times \vec{B})/2$. Aplicación: Se tiene un cilindro que tiene como eje el Z, formado de un material de conductividad γ, y se supone el espacio libre de cargas. Al aplicar el campo $\vec{B} = B_O \cos(\omega t)\vec{k}$, demostrar que en el cilindro se inducen corrientes circulares. Deducir la densidad de corriente y calcular su valor máximo .

SOLUCIÓN

$$j = \frac{B_0 \omega r \gamma}{2} \sin(\omega t)$$

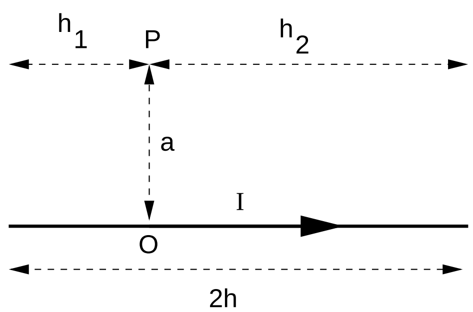
$$j_{max} = \frac{B_0 \omega r \gamma}{2}$$

127 Tenemos un cable coaxial muy largo formado por un cilindro conductor de radio a y una capa conductora concéntrica con él de radio interno $b = 5a$ y externo $c = 6a$. Por el conductor cilíndrico interno circula una corriente de intensidad I_0 y por el externo circula la misma intensidad, pero en sentido contrario. Si el potencial vector en $r = b$ es cero, hallar el potencial vector en el cilindro externo.

SOLUCIÓN

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{44\pi} \left(r^2 - 25a^2 - 72 \ln(r/5a)\right)$$

128 Una corriente de intensidad I_0 recorre un hilo recto vertical de longitud $2h$. Hallar el potencial vector en un punto P distante a del hilo.



SOLUCIÓN

$$A = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln\left(\frac{h_2 + \sqrt{a^2 + h_2^2}}{-h_1 + \sqrt{a^2 + h_1^2}}\right)$$

129 Hallar el potencial vector en el punto P del eje de un cuadrado de lado $2a$ por el que circula una corriente I en sentido horario, si dicho eje pasa por el centro del cuadrado y es paralelo a uno de sus lados

SOLUCIÓN

$$A(AC) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln\left(\frac{a + \sqrt{(x-a)^2 + a^2}}{-a + \sqrt{(x-a)^2 + a^2}}\right)$$

$$A(BD) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln\left(\frac{a + \sqrt{(x+a)^2 + a^2}}{-a + \sqrt{(x+a)^2 + a^2}}\right)$$

$$\vec{A} = (A(BD) - A(AC))\vec{j}$$

130 Un hilo tiene longitud $2h$ y está recorrido por una corriente de intensidad I_0. En la mediatriz del hilo y a una distancia a del mismo hay un electrón en reposo. Si la corriente varía con el tiempo a velocidad v. Determinar la fuerza que actúa sobre el electrón si se supone que el potencial electrodinámico escalar es constante y que $a \ll h$.

SOLUCIÓN

$$F = \frac{\mu_0 e v}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{4h^2}{a}\right)$$

Coeficientes de autoinducción e inducción mútua

131 Determinar el coeficiente de autoinducción de un solenoide largo de n espiras, sección recta S y longitud a.

SOLUCIÓN

$$L = \frac{\mu_0 S n^2}{a}$$

132 Determinar el coeficiente de autoinducción interno por unidad de longitud de un hilo cilíndrico recto de radio a.

SOLUCIÓN

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

133 Determinar el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de un sistema formado por 2 hilos cilíndricos de radio a, dispuestos paralelamente y cuyos ejes se hallan separados por una distancia $d \gg a$.

SOLUCIÓN

$$L = \left(\frac{1}{4} + \ln(\frac{d}{a})\right)\frac{\mu_0}{\pi}$$

134 Calcular el coeficiente de autoinducción de un toroide de sección rectangular, de radio interno a y externo b, altura h, formado por N espiras.

SOLUCIÓN

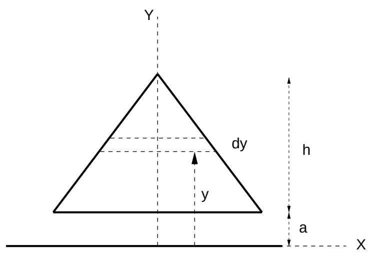
$$L = \frac{\mu_0 N^2 h \ln(b/a)}{2\pi}$$

135 Se tienen dos espiras rectangulares situadas paralelamente. La primera es grande y de dimensiones $l_1 \times w_1$. La otra es más reducida y tiene dimensiones $l_2 \times w_2$. No se solapan entre ellas, de manera que la distancia entre los lados mas próximos es s. Hallar su coeficiente de inducción mútua. (Considerar que $l_2 \ll l_1$)

SOLUCIÓN

$$M_{12} = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln\left(\frac{s + w_2}{s(1 + (w_2/(s + w_1))}\right)$$

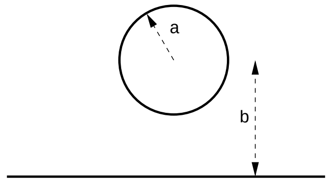
136 Hallar el coeficiente de inducción mútua del sistema formado por un hilo muy largo y un circuito en forma de triángulo equilátero, de altura h, según indica la figura. La distancia entre hilo y el lado más próximo del triángulo es a.



SOLUCIÓN

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{\pi\sqrt{3}} \left((a + h)\ln(\frac{a + h}{a}) - h\right)$$

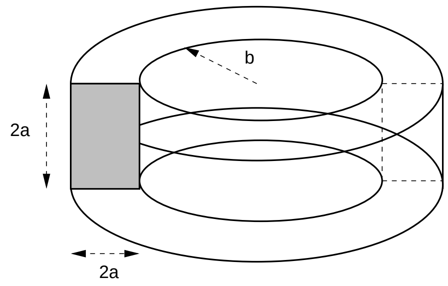
137 Hallar el coeficiente de inducción mútua correspondiente a un hilo recto muy largo y una espira de radio a cuyo centro dista b del hilo. Hilo y espira son coplanarios.



SOLUCIÓN

$$M_{12} = \mu_0 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$$

138 Una superficie tórica está engendrada por la rotación de un cuadrado de lado $2a$ que gira alrededor de un eje paralelo a uno de los lados del cuadrado situado a distancia b (ver la figura). (a)Calcular el coeficiente de autoinducción L de un arrollamiento uniforme de N espiras realizado sobre esta superficie tórica. (b) ¿ Qué valor tiene L si $a/b \ll 1$?. Aplicación numérica: $N = 500$, $2a = 1.8$ cm y $b = 5$ cm.



SOLUCIÓN

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$$

En el caso $a/b \ll 1$ resulta de la anterior expresión:

$$L = \frac{2\mu_0 N^2 a}{\pi b}$$

Aplicación numérica: (a) $L = 0.327$ mH; (b) $L = 0.324$ mH.

139 Si en un cilindro conductor de altura h, de radio a y conductividad γ, existe un campo magnético con dirección axial y valor $B = B_0 \cos(\omega t)$. Dar el valor de la potencia media que se disipa por efecto Joule. Hallar la intensidad que circula por el cilindro.

SOLUCIÓN

$$P = \pi B_0^2 \omega^2 \gamma h a^4 / 16$$
$$I = \frac{\gamma B_0 \omega h \pi a^2}{2\pi} \sin(\omega t)$$

140 Determinar el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de una capa cilíndrica hueca de radio interior a y exterior b de cierto material conductor no magnético.

SOLUCIÓN

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(\frac{b^2 - 3a^2}{4} + \frac{a^4}{b^2 - a^2} \ln(b/a)\right)$$

141 Determinar el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de un cable coaxial muy largo, formado por un conductor cilíndrico de radio a rodeado por una capa conductora cilíndrica coaxial, de radio interior b y radio exterior c.

SOLUCIÓN

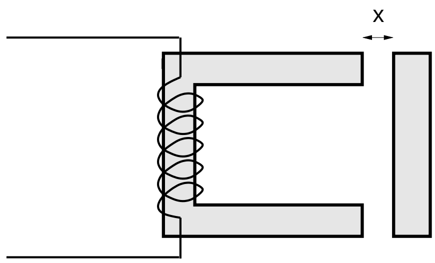
$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln(\frac{b}{a}) + \frac{c^4}{c^2 - b^2}\ln(\frac{c}{b}) - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)}\right)$$

142 Determinar la fuerza mútua entre dos espiras coaxiales de radios a y b, recorridas respectivamente por sendas corrientes de intensidad I_1 e I_2, cuyos centros se hallan separados por una distancia d. Suponga que $a \ll b$ (el campo magnético creado por la espira grande actúa sobre la pequeña de forma uniforme).

SOLUCIÓN

$$F = \frac{3\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2 \pi d}{2(b^2 + d^2)^{(5/2)}}$$

143 Un relé magnético tiene una armadura que es móvil y que al aplicar el campo puede acercarse al núcleo. Armadura y núcleo son del mismo material, el cual tiene una permeabilidad relativa $\mu_r = 5000$. La bobina tiene $n = 2000$ vueltas y entre la armadura y el núcleo queda un entrehierro de $x = 1$ mm. La longitud del núcleo es de $l_1 = 40$ cm y la de la armadura $l_2 = 20$ cm, con secciones rectas de $S = 6$ cm^2. Por la bobina circula una intensidad de 1.5 A. Hallar (a) el flujo magnético en el nucleo, (b) la energía magnética almacenada, (c) la autoinducción de la bobina, (d) la fuerza que actua sobre la armadura.



SOLUCIÓN

(a)

$$\Phi = \frac{nI}{R_1 + R_2 + \frac{2x}{\mu_0 S}}$$

donde

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S}$$

(b)

$$W_m = \frac{(nI)^2}{R_1 + R_2 + \frac{2x}{\mu_0 S}}$$

(c)

$$L = \frac{n\Phi}{I}$$

(d)

$$F = \frac{(nI)^2}{\mu_0 S \left(R_1 + R_2 + \frac{2x}{\mu_0 S}\right)^2}$$

6. Corriente alterna

Circuitos con R, C y L

144 Un condensador de $C = 1\ \mu$F se carga aplicándole 10 kV, a continuación se conectan sus bornes a través una bobina de coeficiente de autoinducción $L = 1$ H y resistencia $R = 1\ \Omega$. Estudiar la descarga de condensador.

SOLUCIÓN

Por ser $R/2L < 4L/C$ la descarga es oscilante.

$$Q = 10^{-2} \exp(-0.5t) \cos(1000t - 1.57) \text{ C}$$

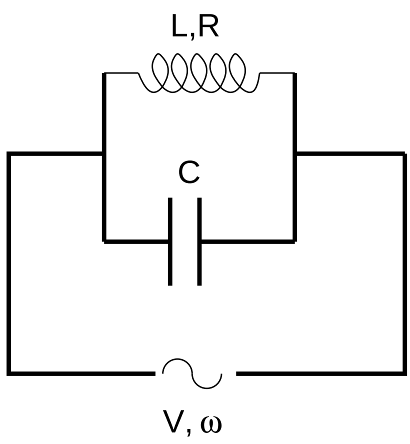
145 Con hilo conductor de radio a y resistividad ρ se forma un solenoide cilíndrico muy largo con las espiras en contacto y cuyo núcleo de aire tiene radio b. Hallar la constante de tiempo de la bobina

SOLUCIÓN

$$\tau = \frac{\mu_0 \pi a b}{4\rho}$$

Circuitos de CA

146 En el circuito de la figura. (a) Dibujar el diagrama vectorial; (b) determinar Z, I_L, I_C, la I total y el defasaje; (c) Determinar R en función de C, L y ω de manera que el conjunto sea equivalente a una resistencia pura.



SOLUCIÓN

(a)

(b)

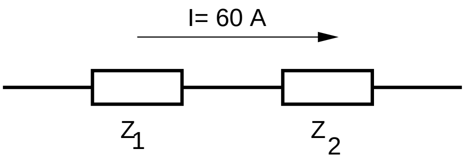
$$Z = \frac{V}{\sqrt{I_L^2 + I_C^2 + 2I_L I_C \cos(\varphi + \pi/2)}}$$

; $I_L = V/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$; $I_C = VC\omega$; $\cos(\varphi + \pi/2) = -L\omega/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

(c)

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}(1 - LC\omega^2)}$$

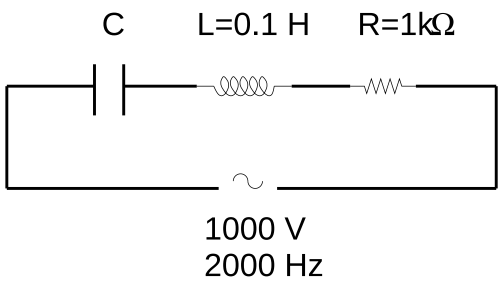
147 En el circuito de la figura, por el que circulan 60 A, se tiene que $Z_1 = 4 + 3\mathrm{j}\ \Omega$ y $Z_2 = 13 + 5\mathrm{j}\ \Omega$. (a) Dibujar el diagrama vectorial y (b) dar la potencia total disipada.



SOLUCIÓN

P=57.6 kW

148 En el circuito de la figura determinar: (a) el valor de C para que la corriente sea máxima; (b) la potencia consumida por el circuito; (c) dar el valor de C para que la potencia sea 3/4 de la inicial.



SOLUCIÓN

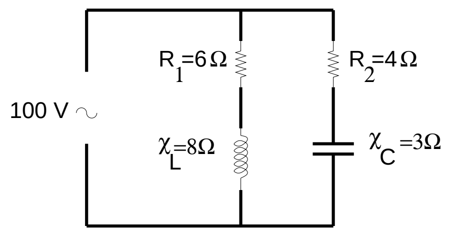
(a) $C = 63$ nF

(b) $P = 1$ kW

(c) $C = 3.1\ \mu$F

149 Dado el circuito de la figura, hallar (a) la conductancia y la susceptancia de cada rama y la total; (b) la I en cada rama y la total y (c) los defasajes

SOLUCIÓN

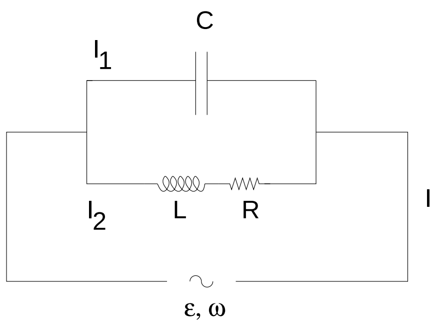


(a) $\rho_1 = 6/100\ \Omega^{-1}$; $\sigma_1 = 8/100\ \Omega^{-1}$ $\rho_2 = 16/100\ \Omega^{-1}$; $\sigma_2 = 12/100\ \Omega^{-1}$

(b) $I_1 = 6 - 8\text{j}$; $I_2 = 16 + 12\text{j}$; $I = 22 + 4\text{j}$

(c) $\tan(\varphi_1) = -1.33$; $\tan(\varphi_2) = 0.75$; $\tan(\varphi) = 0.18$;

150 En el circuito de la figura nos dan C, L, R, ϵ y ω. Hallar: (a) los valores eficaces de las intensidades I, I_1 y I_2; (b) la potencia suministrada por la fuente; (c) el valor de C para que I sea mínima. Dar este valor de I; (d) aplicar numéricamente a los valores siguientes $R = 3\ \Omega$, $L = 20$ mH , $\omega = 200$ rad/s, $\epsilon = 8100$ V, $C = 12,5\ \mu$F.



SOLUCIÓN

(a) $I_1 = \epsilon C\omega = 0.25$ A; $I_2 = \epsilon/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 20$ A; $I = \epsilon\sqrt{C^2\omega^2 + \frac{1-2CL\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}} = 19.8$ A

(b) $P = \frac{R\epsilon^2}{R^2+L^2\omega^2} = 1200$ W

(c) $C = \frac{L}{R^2} + L^2\omega^2 = 800\ \mu$F; $I = \frac{\epsilon R}{R^2+L^2\omega^2} = 12$ A

7. Ecuaciones de Maxwell

151 Un condensador plano, formado por 2 discos circulares de radio $a = 6$ m separados una distancia $d = 1$ mm, está colocado en un circuito en el que hay una batería de $\epsilon = 100$ V, una resistencia $R = 1$ MΩ y un interruptor K. De el valor en los puntos interiores del condensador del vector de Poynting tras cerrar K. Dé su valor a una distancia $r = 2$ m del eje del sistema, a los 2 s tras iniciarse la carga.

SOLUCIÓN

El vector de Poynting a una distancia r del eje es:

$$P = \frac{\epsilon^2 r \exp(-t/RC)(1 - \exp(-t/RC))}{2\pi a^2 d}$$

donde C es la capacidad del condensador $C = \varepsilon_0 \pi a^2/d$.

152 Por un cilindro muy largo de radio a circula una corriente en la dirección del eje, cuya densidad volúmica en $r < R$ vale $j = kr/a$. Si el material del cilindro tiene una conductividad γ, hallar el flujo del vector de Poynting (por unidad de longitud) a través de la superficie lateral del cilindro.

SOLUCIÓN

$$\Phi_P = \frac{2\pi k^2 a^2}{3\gamma}$$

153 Dar la densidad cúbica de corriente en el punto $P(2, 1, 1)$, si en el espacio hay un campo aplicado $\vec{B} = (10^4/y, 10^4/x, 0)$ T.

SOLUCIÓN

$\vec{j} = 7.5 \times 10^3 \vec{k}$ A/m^2

154 Dados los campos $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{j}$ y $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kx + a)\vec{k}$ en el espacio vacío (sin cargas ni corrientes libres), hallar los valores de k/ω y a para que los campos se correspondan a una onda electromagnética sabiendo que $E_0/B_0 = c$ (c=velocidad de la luz).

SOLUCIÓN

Los valores son $a = \pi/2$ y $k/\omega = 1/c$.

155 Se tiene una espira de radio a, cuyo plano es normal a un campo magnético $\vec{B}(0, 0, kt)$. ¿ Qué valor tiene el potencial vector y el campo eléctrico inducido en un punto cualquiera si se supone el potencial electrodinámico nulo ?. (para t=0, es B=0 y A=0). Hallar la fem inducida en la espira

SOLUCIÓN

$\vec{A} = (-kty/2, ktx/2, 0)$; $\vec{E} = (ky/2, -kx/2, 0)$; $|\vec{E}| = ka/2$; $\epsilon = k\pi a^2$