Moviment harmònic simple. Superposició i figures de Lissajous.

1 Objectiu

Caracterització de la vibració produïda per un diapasó. Mesura de la diferència de freqüències a partir de la superposició de dos moviments harmònics simples en la mateixa direcció. Obtenció de figures de Lissajous.

2 Material

Oscil·loscopi de raigs catòdics de dos canals Hameg 303-4 o Hameg 303-6, dos generadors de baixa freqüència GF-230, dos diapasons amb caixa de ressonància i anella lliscant, i micròfon.

3 Fonament teòric

3.1 Moviment harmònic simple

El **moviment harmònic simple** (MHS) és una oscil·lació periòdica que podem trobar en un gran número de sistemes. Moltes de las vibracions mecàniques pròpies de sistemes que es troben en el nostre entorn quotidià, com per exemple les vibracions dels edificis, vibracions dels materials d'un instrument sonor, el moviment del pèndol d'un rellotge, etc... poden considerar-se com moviments harmònics simples en el cas que es verifiquin unes certes condicions sobre els paràmetres que defineixen el sistema. El MHS, sigui quin sigui el sistema que s'utilitzi per produir-lo, és sempre descrit per una equació diferencial del tipus:

$$\frac{d^2}{dt^2}y + \omega^2 y = 0 \tag{1}$$

que es pot obtenir a partir de propietats físiques que defineixen el sistema. En aquesta equació y representa l'amplitud del moviment, t el temps, i ω la freqüència angular del MHS. Una de les solucions de l'equació 1 és la funció sinusoïdal:

$$y = Asin(\omega t + \phi) \tag{2}$$

on A, l'amplitud, i ϕ, la fase inicial del moviment, són constants que es poden determinar a parir de les condicions inicials. Cal recordar que la freqüència angular, ω està relacionada amb la freqüència f per: $\omega = 2\pi f$; i que $T = 1/f$ on T és el període.

Aquest tipus d'oscil·lació es troba tant en sistemes mecànics com en molts d'altres com ara en un circuit elèctric senzill format per una inductància i un condensador carregat, que pot utilitzar-se per construir un generador d'ona sinusoïdal. En aquesta pràctica s'utilitza un generador GF-230 basat en aquests principis i que proporciona un voltatge que és una funció del temps com l'equació 2, on l'amplitud es mesura en volts.

3.2 Superposició de dos MHS en la mateixa direcció

La superposició de dos MHS que oscil·len en la mateixa direcció però que tenen diferent freqüència dóna lloc, quan la freqüència dels dos MHS és semblant, a una variació periòdica de l'amplitud màxima de l'oscil·lació que es coneix amb el nom de **pulsació**. Aquesta pulsació de baixa freqüència té gran utilitat pràctica en sistemes de radar ja que la mesura d'aquesta diferència de freqüències permet determinar amb gran precisió la velocitat a la que es mou un objecte determinat.

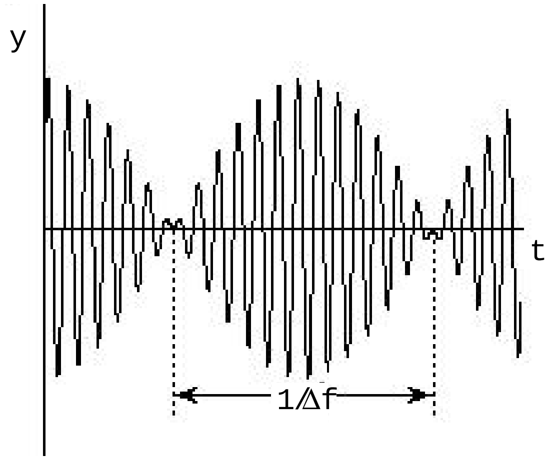

Figura 1: Oscil·lació en funció del temps de la superposició de dos MHS de diferent freqüència.

Suposem que tenim dos MHS de la mateixa amplitud i fase, però de diferent freqüència tals com els descrits per les funcions:

$$y_1 = Asin(\omega_1 t) \tag{3}$$

$$y_2 = Asin(\omega_2 t) \tag{4}$$

mitjançant àlgebra simple es pot demostrar que la funció resultant de la superposició, representada en funció del temps en la Figura 1, ve donada per:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\ cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\ sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t) \tag{5}$$

Aquesta oscil·lació es pot interpretar com una oscil·lació sinusoïdal de freqüència $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, l'amplitud de la qual,

$$2Acos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t), \tag{6}$$

no és constant en el temps i presenta un variació periòdica, o pulsació, de freqüència igual a:

$$\triangle f = f_1 - f_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}. \tag{7}$$

Observa que en el cas que las freqüències són semblants, la freqüència de la pulsació és molt més petita que la de l'oscil·lació, vegeu la Figura 1.

3.3 Superposició de dos MHS en direccions perpendiculars: Figures de Lissajous

La superposició de dos MHS en direccions perpendiculars i freqüències f_x i f_y, dóna una figura que, en el cas que la relació de freqüències ($\frac{f_x}{f_y}$) sigui una relació entre números enters senzills, és una figura tancada i rep el nom de **Figura de Lissajous**.

En una Figura de Lissajous es verifica que:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{f_x}{f_y} = \frac{n_x}{n_y} \tag{8}$$

on n_x n_y són el número de punts de tangència de la figura amb els costats (esquerre o dret i superior o inferior, respectivament) del quadrat imaginari on es troba inscrita, vegeu la Figura 2.

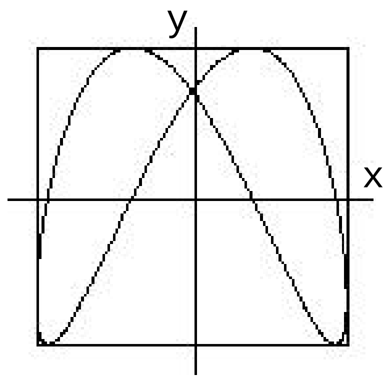

Figura 2: Corba de Lissajous corresponent a la superposició de dos MHS perpendiculars, quan la freqüència del MHS en la direcció y és el doble que la freqüència del MHS en la direcció x.

4 Mètode experimental

4.1 Oscil·lació harmònica d'un diapasó

En aquest apartat es pretenen mesurar i estudiar els paràmetres que defineixen la vibració mecànica produïda en colpejar un dels extrems d'un diapasó. La vibració es transmet a las molècules d'aire de l'entorn que permeten, al mateix temps, la seva propagació fins un micròfon que pot convertir la oscil·lació mecànica en un senyal elèctric. La dependència temporal d'aquest senyal elèctric que reprodueix l'oscil·lació mecànica original es pot observar a la pantalla d'un oscil·loscopi.

Connecta el micròfon a l'entrada de l'oscil·loscopi que correspon al canal 1 (INPUT CH1), enroscant el connector BNC en sentit horari, i col·loca el micròfon davant la caixa de ressonància del diapasó.

Cal que la tecla CH I/II estigui sense polsar. Colpeja un dels extrems del diapasó amb un martellet de goma i observa la forma de l'ona que s'obté a la pantalla de l'oscil·loscopi tot ajustant l'escala de temps (TIME/DIV) de forma que apareguin com a mínim tres oscil·lacions completes. Per poder observar la forma de l'ona cal mantenir el botó de trigger en posició normal (botó AT/NORM polsat) i ajustar adequadament el botó LEVEL.

Colpeja el diapasó amb diferents intensitats y determina quins dels paràmetres que defineixen la vibració (freqüència, amplitud,..) romanen constants i quins no.

Determina els valors de l'amplitud i la freqüència.

4.2 Superposició de dos MHS en la mateixa direcció

En aquest apartat es considera la superposició de dos MHS en la mateixa direcció i de freqüències semblants, però no iguals, obtinguts a partir de dos generadores GF-230 de forma que s'obté una pulsació que ens permet determinar de forma indirecta la diferència de freqüències.

Sintonitza els dos generadors aproximadament a una mateixa freqüència entre 100Hz i 1000Hz connecta'n un al canal 1 (CH1) i l'altre al canal 2 (CH2) de l'oscil·loscopi.

Aconsegueix que l'amplitud dels dos canals sigui igual. Per fer-ho, prem el botó CH I/II alternativament per visualitzar els dos canals i ajusta l'amplitud amb el botó de cada generador.

ALERTA: Per poder comparar les amplituds cal que l'escala vertical (VOLT/DIV) dels dos canals sigui la mateixa.

Un cop les dues amplituds siguin iguals fes que l'oscil·loscopi sumi les dues ones (prem el botó ADD). Ajusta l'escala de temps (TIME/DIV) fins poder apreciar les pulsacions i canvia lleugerament una de les freqüències, en el generador de freqüències, per tal que paregui una ona estable a la pantalla de l'oscil·loscopi.

Determina, a partir del senyal de la pulsació que apareix a la pantalla de l'oscil·loscopi, quina és la freqüència $\triangle f$ de la pulsació, tal com s'indica en la Figura 1.

Una cop determinada la freqüència de la pulsació i sense variar la freqüència dels generadors GF-230 determina les freqüències, f_1 i f_2 dels senyals de cadascun dels generadors per separat tot desactivant la posició suma (botó ADD sense polsar) i utilitzant el botó CH I/II per visualitzar el canal 1 o el canal 2, alternativament. Intenta obtenir la màxima precisió en aquesta darrera mesura ja sigui ajustant l'escala de temps fins obtenir només una oscil·lació completa a la pantalla o determinant el tems de tres o quatre oscil·lacions completes i després dividint aquest temps entre el número d'oscil·lacions per obtenir el període.

IMPORTANT: Anota sempre en quina escala de temps s'efectuen les mesures.

4.3 Superposició de les vibracions produïdes per dos diapasons

Desconnecta els terminals dels dos generadors i torna a connectar el micròfon en el canal 1, com en la primera experiència. Encén el micròfon.

Colpeja els dos diapasons idèntics (sense l'anella), escolta el seu so i visualitza'l a l'oscil·loscopi. Compara aquest resultat amb l'obtingut abans en colpejar només un diapasó.

Utilitza l'anella lliscant per disminuir la freqüència d'un dels diapasons: fixa l'anella, utilitzant el cargol, a prop de la base d'un dels diapasons. Colpeja els dos diapasons simultàniament i **escolta** el seu so. Repeteix l'experiència amb l'anella una mica més amunt (com més amunt és l'anella més augmenta la diferència entre les dues freqüències). Finalment, col·loca l'anella lluny de la base del diapasó, i colpela'ls tot apropant-hi el micròfon. Regula l'escala de temps de l'oscil·loscopi fins que aparegui forma d'ona com la que has obtingut en l'anterior apartat.

Desconnecta el micròfon i deixa'l apagat.

4.4 Superposició de dos MHS en direccions perpendiculars: Figures de Lissajous

Torna a connectar un generador en el canal 1 i l'altre en el canal 2.

Intenta que les amplituds de les oscil·lacions siguin semblants, que les escales verticals dels dos canals siguin la mateixa, i que permetin veure l'oscil·lació completa dels dos senyals.

Polsa el botó **X-Y**.

ALERTA: abans de prémer el botó X-Y assegura't que tots dos generadors estan engegats.

El botó X-Y permet sumar els dos senyals perpendicularment, de manera que en la direcció horitzontal hi ha el canal 2, i en la vertical el canal 1. Selecciona una freqüència de 40Hz pel canal 1 (f_x=40Hz) i una de 20Hz pel canal 2 (f_y=20Hz).

Observa com es forma una figura com la Figura 2 a la pantalla de l'oscil·loscopi. Per poder estabilitzar totalment el senyal s'ha d'ajustar molt finament la freqüència dels generadors, ajusta-ho canviant la freqüència de només un dels generadors.

Conta el número de punts de tangència amb els costats del rectangle imaginari que circumscriu la figura i comprova que es verifica la relació 8. Recorda que n_x és el número de punts de tangència de la figura amb els costats dret o esquerre i n_y el número de punts de tangència de la figura amb els costats superior o inferior del rectangle imaginari que circumscriu la corba.

Repeteix tres vegades el procediment, tot canviant les freqüències dels generadors per altres que també tinguin una relació de números enters senzills.

5 Resultats

5.1 Oscil·lació harmònica d'un diapasó

- Quins paràmetres es mantenen constants en colpejar el diapasó amb diferents intensitats?
- Dibuixa la forma de l'ona que s'obté a la pantalla de l'oscil·loscopi en un determinat instant i indica quant val l'amplitud A i la freqüència f
- Escriu l'equació del MHS generat pel diapasó segons l'equació 2 i justifica perquè es pot considerar un MHS.

5.2 Superposició de dos MHS en la mateixa direcció

- A partir de la mesura realitzada de la freqüència de la pulsació determina la diferència de freqüències ($\triangle f$).
- Escriu la freqüència de cada font per separat (f_1 i f_2) i determina la seva diferència ($\triangle f$).
- Compara els dos resultats obtinguts i indica la precisió amb què s'obté la mesura de la diferència en tots dos casos. Quantes vegades és més precís l'un que l'altre?

5.3 Superposició de les vibracions produïdes per dos diapasons

- Realitza un esquema de la forma de l'ona quan les freqüències dels dos diapasons són iguals.
- Realitza un esquema de la forma de l'ona quan les freqüències dels dos diapasons són lleugerament diferents.
- Descriu el so que produeix la interferència dels dos diapasons amb freqüències diferents i com varia en fer més semblants o més diferents les freqüències.

5.4 Superposició de dos MHS en direccions perpendiculars: Figures de Lissajous

- Realitza tres dibuixos de tres de les figures de Lissajous obtingudes i, en cada cas, verifica que es compleix la relació 8.

6 Qüestions

1. Indica amb quina funció d'ona es podria descriure de forma més precisa la vibració d'un diapasó.
2. Com es podrien utilitzar les figures de Lissajous en la calibració d'un generador de funcions sinusoïdals com el que s'utilitza en aquesta pràctica?
3. Demostra l'equació 5.