Oscil·lacions amortides i forçades. Ressonància.

1 Objectiu

L'estudi de les oscil·lacions amortides i forçades d'un pèndol físic.

2 Material

Un pèndol físic ressonant, un pèndol impulsor de freqüència variable, una placa amortidora, una molla helicoïdal, una placa goniomètrica, un suport i un cronòmetre.

3 Fonament teòric

3.1 Moviment oscil·latori amortit

El fregament del cos d'un pèndol físic oscil·lant amb l'aire que l'envolta crea una força de fricció que és proporcional a la velocitat angular del pèndol i que és la responsable de l'**amortiment** de les seves oscil·lacions. Com es demostra en els textos de Física, l'elongació del pèndol, és a dir, l'angle θ que forma aquest amb la vertical, depèn del temps t en la forma

$$\theta(t) = A_0\, e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \phi_0) \tag{1}$$

igualtat en la que l'expressió

$$A_{ef}(t) = A_0\, e^{-\beta t} \tag{2}$$

és l'amplitud efectiva de l'oscil·lació i ϕ_0 la fase inicial. Quant a ω_1 és la seva freqüència angular, relacionada amb el període T_1 del moviment per $\omega_1 = 2\pi/T_1$. L'ω_1 es relaciona amb la freqüència pròpia o natural ω_0 del mateix pèndol, és a dir, la que tindria si no hi hagués amortiment amb l'aire, en la forma $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Però, en la pràctica, com que la força de fricció amb l'aire és tant petita, podem prendre com molt bona aproximació $\omega_1 \approx \omega_0$.

L'amplitud inicial A_0 i la fase inicial ϕ_0 són dues constants que depenen de les condicions inicials. Pel contrari les altres dues constants, ω_1 i el paràmetre d'amortiment, β, depenen només de les característiques del pèndol i del grau d'intensitat de la fricció amb l'aire. Com veiem per (1), el moviment del pèndol amortit és una mena de moviment harmònic en el que l'amplitud —donada per (2)— va decreixent exponencialment amb el temps.

En la Figura 1-(a) hem representat amb línia contínua l'elongació $\theta(t)$ i, amb línia discontínua, la seva amplitud efectiva $A(t)$. Fixeu-vos que si traiem el logaritme neperià d'aquesta última ens quedarà, per (2), que

$$\ln A_{ef}(t) = \ln A_0 - \beta t \tag{3}$$

expressió que, representada gràficament, com hem fet en la Figura 1-(b), resulta una recta de pendent $-\beta$.

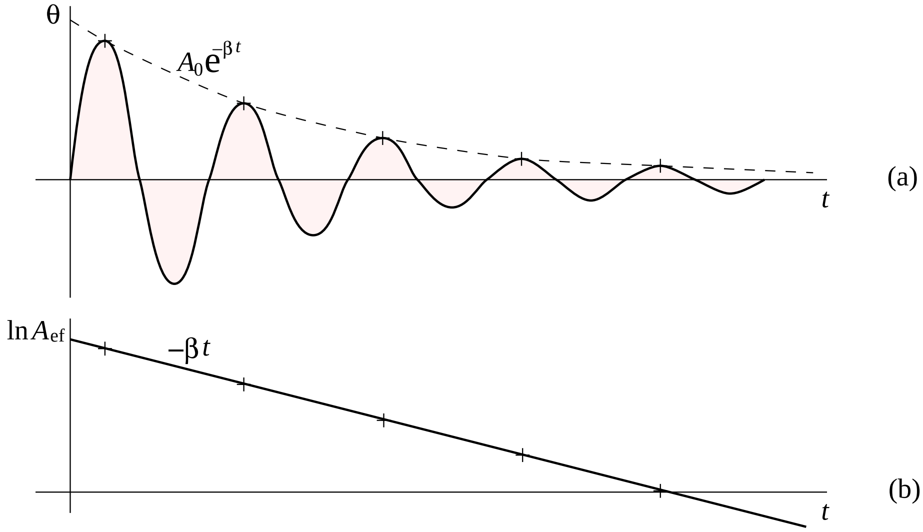

Figura 1: Oscil·lació amortida

3.2 Moviment oscil·latori forçat. Ressonància

Per a que el pèndol amortit anterior no deixi d'oscil·lar li hem de subministrar energia des de l'exterior. Això es pot aconseguir aplicant-li una força impulsora externa sinusoïdal de freqüència ω. En aquest cas el pèndol es començarà a moure amb un moviment irregular i complex conegut com **estat transitori**. Després, a mida que va passant el temps, el moviment es va transformant en un moviment harmònic simple (MHS) de la mateixa freqüència que la de la força impulsora externa. El pèndol ha arribat a l'**estat estacionari**. El temps necessari que cal esperar per a que passi l'estat transitori i arribi l'estacionari depèn del grau d'amortiment: com més amortiment hi hagi més ràpidament s'arriba a l'estat estacionari, i al contrari.

El MHS de l'estat estacionari té un desfasament i una amplitud A que depenen molt de la freqüència de la força impulsora. També es pot demostrar que la potència transferida per la força externa al pèndol és proporcional a A^2 i a ω^2. La representació gràfica del producte $(\omega A)^2$ en funció d'ω adopta unes formes molt similars a les mostrades en la Figura 2-(a). En ella veiem, per als tres casos Q_1, Q_2, Q_3 —de més a menys amortiment, respectivament— que les gràfiques tenen forma de pic, més accentuat com menys amortiment tingui el pèndol. També podem observar que el màxim de cada pic, és a dir, l'ω per a la que la potència transferida és màxima, el tenim per a la freqüència de la força impulsora ω igual a la freqüència pròpia ω_0 del pèndol. Si s'està en aquest cas se'n diu que el pèndol —o, en general, un oscil·lador forçat— està en **ressonància**. És molt habitual caracteritzar un sistema oscil·lant com, per exemple, el nostre pèndol forçat, per un paràmetre adimensional anomenat **factor de qualitat**, Q. Si l'amortiment és molt petit, com és en el nostre cas, pot definir-se Q com

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \tag{4}$$

Tenim, per tant, que com més petit sigui l'amortiment més gran serà el factor de qualitat i més punxegut serà el pic de la ressonància. Com mostrem en la Figura 2-(b), això últim ho podem quantificar mesurant **l'amplada del pic**, $\Delta\omega$, definida com l'interval de freqüències que separa els dos punts de la corba que tenen una altura que és la meitat de la màxima. Fent el desenvolupament matemàtic corresponent es demostra que, precisament

$$\Delta\omega = 2\beta \tag{5}$$

El fenomen de les oscil·lacions forçades i de la ressonància es presenta molt sovint en Mecànica, en Electrotècnia i en molts altres camps de la Física i de la vida corrent. Així, tant són oscil·lacions forçades

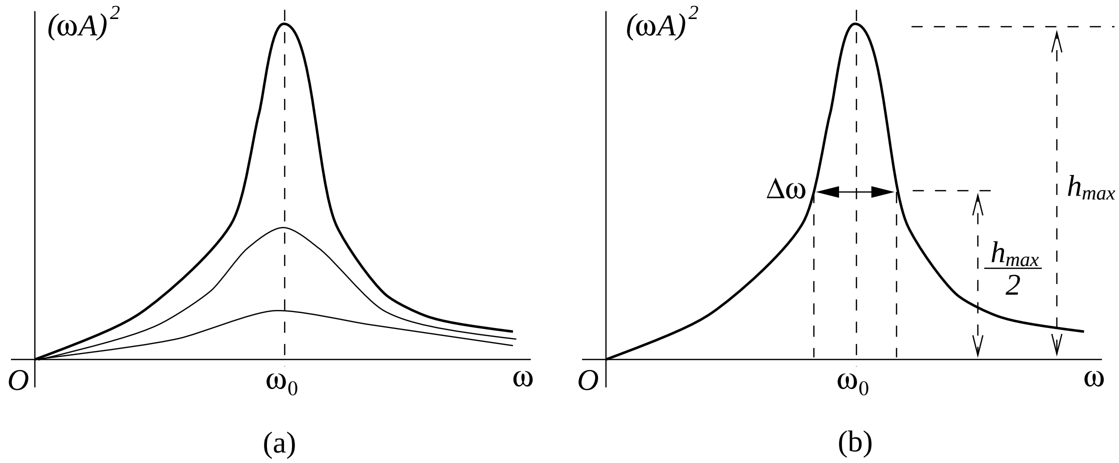

Figura 2: Oscil·lació forçada.

la sintonització d'un aparell de ràdio —en aquest cas, les oscil·lacions són elèctriques en els circuits de l'aparell— com un nen en un gronxador i el seu pare gronxant-lo.

4 Mètode experimental

La Figura 3 mostra el muntatge que tenim per aquesta pràctica; la 3-(a) mostra una visió de cara i la 3-(b) de perfil. Hi podem veure la barreta lleugera penjada d'O, que fa de pèndol ressonant, i la barra pesant, penjada d'O', que fa de pèndol impulsor proporcionant la força i el moment externs. També hi veiem en la figura, els suports i la placa goniomètrica de la que llegirem l'amplitud de les oscil·lacions del pèndol ressonant. El pèndol impulsor està constituït per una barra metàl·lic i un bloc B pesant que pot

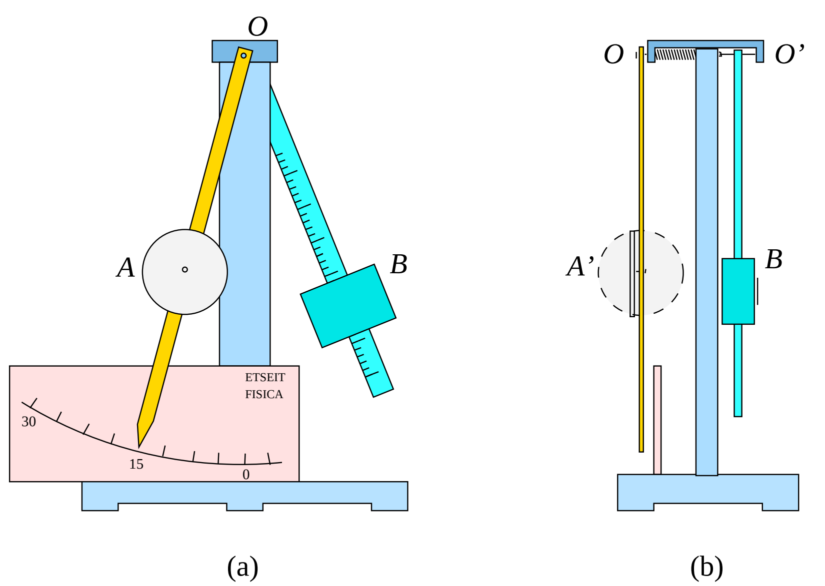

Figura 3: Pèndol ressonar (A) i pèndol impulsor (B).

ésser desplaçat amunt o avall a lo llarg seu. La posició del bloc determina el període d'aquest pèndol, que pot anar des de 1.0 s fins a 1.35 s.

El pèndol ressonant porta una plaqueta circular que pot ésser collada amb un vis a la barreta en dues posicions possibles. En la longitudinal, mostrada en la Figura 3-(a) com l'A, la fricció de la plaqueta amb l'aire és petita, mentre que en la disposició transversal, mostrada en 3-(b) com l'A', la fricció és bastant gran. El pèndol impulsor està acoblat al ressonant a través d'un eix E i d'una molla RA, Figura 4, de tal forma que les oscil·lacions del pèndol impulsor transmeten una petita força i moment al pèndol ressonant. La gran diferència de massa entre un pèndol i l'altre impedeix que les oscil·lacions del lleuger puguin

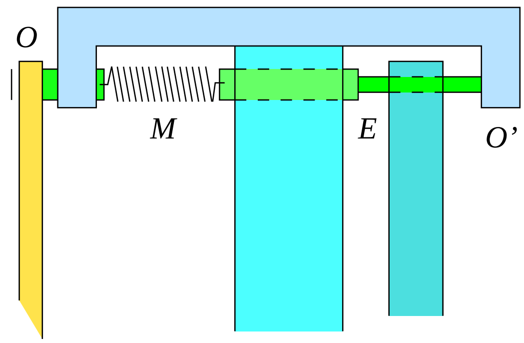

Figura 4: Acoblament entre els pèndols

afectar a les del pesant.

4.1 Estudi del pèndol amortit

Per a aquestes primeres mesures els dos pèndols han d'estar desacoblats, és a dir, la molla M desenganxada del pèndol ressonant.

Mesureu el període del pèndol ressonant amb la plaqueta amortidora col·locada en

- en la posició longitudinal —sense fricció—
- en la transversal —amb fricció i amortiment—.

Per fer això cronometreu unes 20 o 25 oscil·lacions d'una amplitud inicial d'uns 15 o 20^o.

Deixant anar la placa amortidora col·locada transversalment des de 30^o mesureu, *amb el company* (l'un fa la lectura i l'altre en pren nota) l'amplitud final de cada oscil·lació. Així s'obté l'amplitud de l'oscil·lació en funció dels número d'oscil·lacions o, el que és el mateix, en funció del temps transcorregut des del moment inicial; ja que el número d'oscil·lacions multiplicat pel període, dóna el temps.

4.2 Estudi del pèndol forçat

Comenceu per acoblar els dos pèndols amb la molla M (Figura 4). Cal que la plaqueta amortidora continuï estant transversalment al moviment —fricció màxima—. Situeu el bloc B del pèndol impulsor (Figura 3-(a) i 3-(b)) a 10 cm de la part superior de la barra. Amb el pèndol ressonant en repòs deixeu anar l'impulsor des d'un angle d'uns 30^o. Immediatament el pèndol lleuger es començarà a moure amb unes oscil·lacions d'amplitud, primer molt petita, però que anirà creixent fins arribar a un valor màxim que es mantindrà d'uns 10 a 20 segons: estarem en l'estat estacionari. Durant aquests primers segons de l'estat estacionari determineu l'amplitud màxima de les oscil·lacions del pèndol ressonant. Després aprofiteu per cronometrar 10 o 20 oscil·lacions del pèndol impulsor i, així, trobar el seu període que, com hem vist, serà el mateix que el del ressonant. Mentre estigueu cronometrant aquestes oscil·lacions s'observa com, fins i tot abans d'acabar, la seva amplitud va disminuint. Això és degut a que l'amplitud del pèndol impulsor també va disminuint lentament per efecte de la seva fricció. No patiu, malgrat l'amplitud disminueixi, el període segueix essent el mateix.

Com que es tracta d'obtenir experimentalment un pic semblant al de la Figura 2-(b) cal repetir l'experiència més vegades amb el bloc B del pèndol pesant desplaçat a punts diferents de la barra (per exemple, desplaçant el bloc cap avall de dos en dos cm) per tal de tenir freqüències impulsores diferents.

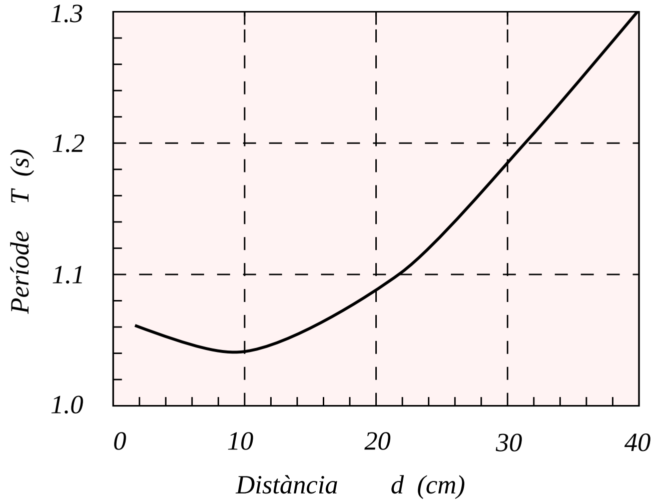

Figura 5: Pèndol impulsor

Per tal d'agilitzar les mesures anteriors la gràfica de la Figura 5 facilita el període aproximat del pèndol impulsor en funció de la posició del bloc en la barra. Així doncs, sabent quin és el període propi del pèndol ressonant pot decidir ràpidament, amb l'ajuda de la gràfica esmentada i dels resultats que vagin sortint, quina posició del bloc li convé per a la pròxima mesura.

5 Resultats

5.1 Estudi de l'amortiment

- Indiqueu, prèviament, en una petita taula, per al pèndol ressonant, el nombre d'oscil.lacions cronometrades, el temps mesurat i el període corresponent, per als dos casos:en el que gairebé no hi ha amortiment i en el que sí n'hi ha. Feu una estimació de l'error de les mesures i **compareu** els dos períodes. Comenteu-ne els resultats.

- Feu una taula amb l'amplitud efectiva del pèndol en funció del nombre d'oscil.lacions transcorregudes i, com que sabeu el període, també en funció del temps. Apliqueu logaritmes neperians a l'amplitud i representeu gràficament $\ln A_{ef}$ en funció del temps. S'obté una gràfica de l'estil de la mostrada en la Figura 1-(b). Ajusteu una recta als punts, el pendent és el paràmetre d'amortiment β.

5.2 Estudi de les oscil·lacions forçades

- Indiqueu quin és el període propi o natural del pèndol ressonant.

- Feu una altra taula en la que s'indiqui, per a cada posició utilitzada del bloc B del pèndol impulsor, el període $T = 2\pi/\omega$ d'aquest,l'amplitud A, aconseguida pel pèndol ressonant en l'estat estacionari i el producte $(\omega A)^2$.

- Representeu gràficament $(\omega A)^2$ en funció de la freqüència angular ω. En resulta un conjunt de punts en forma de pic com ara la gràfica de la Figura 2-(b). Determineu, sobre aquesta gràfica, l'amplitud del pic, $\Delta\omega$, i d'aquest, utilitzant (5), trobeu de nou el paràmetre d'amortiment β. Compareu aquest resultat amb la β obtinguda en l'estudi de l'amortiment. Finalment, trobeu el factor de qualitat Q del sistema.

6 Qüestions

1. Penseu en diversos exemples d'oscil·lacions forçades. Què vol dir en cada cas, buscar la ressonància?

2. Com depèn el factor de qualitat del paràmetre d'amortiment β? Com seria la Figura 2 si pràcticament no hi hagués amortiment?

3. Si en l'estudi de les oscil·lacions forçades no hi hagués plaqueta amortidora, amb quin inconvenient ens trobaríem a l'hora de mesurar l'amplitud o bé el període?