Departament de Física i Enginyeria Nuclear
Laboratori de Física II (ETSEIT)

Moviment Oscil·latori i Ressonància

1 Objectiu

Estudi del moviment harmònic simple, moviment amortit i oscil·lacions forçades. Determinar la freqüència pròpia d'un oscil·lador, paràmetre d'amortiment, freqüència de ressonància i factor de qualitat.

2 Material

Vehicle (GoCar) de quatre rodes amb coixinets que minimitzen les forces de fricció seca. Carril per al desplaçament lineal del vehicle. Placa amortidora. Dues molles de constant k. Motor de freqüència variable i braç transmissor que permet obtenir un moviment oscil·latori en la direcció de desplaçament de vehicle. Font de tensió per alimentar el motor. Cronòmetre.

3 Fonament Teòric

Moltes de les màquines o aparells que utilitzem habitualment o que s'utilitzen en entorns industrials estan sotmeses a moviments oscil·latoris o vibracions de caràcter periòdic. També els edificis molt alts o altres infrastructures com els ponts penjants estan sotmesos també a aquestes oscil·lacions periòdiques. En alguns casos, pel correcte funcionament o estabilitat de l'estructura, el que interessa es amortir aquesta vibració, i en d'altres, poder-la mantenir amb una força impulsora periòdica el temps que s'estimi necessari.

Moviment harmònic simple

Un dels moviments oscil·latoris que es poden descriure de forma més senzilla és el Moviment Harmònic Simple (MHS). En aquest cas no hi ha cap força d'amortiment ni impulsora, però les característiques molt particulars de la força recuperadora (k es la constant de recuperació) que intervé,

$$F = -kx \tag{1}$$

fan que un cop s'hagi iniciat l'oscil·lació, el moviment periòdic es manté indefinidament. Si el MHS és en la direcció de l'eix de les "x"es decriu amb l'equació

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2}$$

a on m es la massa de l'oscil·lador. Aquesta equació té com a solució la funció

$$x(t) = A_o \cos(\omega_o t + \phi) \tag{3}$$

a on $\omega_o = \sqrt{k/m}$ és la freqüència pròpia de l'oscil·lador. A_o és l'amplitud de l'oscil·lació i ϕ la fase què cal determinar a partir de les condicions inicials.

Moviment feblement amortit

Els sistemes físics reals estan sempre sotmesos a forces dissipatives que fan que el moviment inicial s'amorteixi. Això, evidentment, també passa per l'oscil·lador. Si suposem que tenim un força de fricció viscosa proporcional i de sentit oposat a la velocitat, l'equació (2) s'ha de modificar i l'equació que ara descriu correctament el moviment és

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0 \qquad (4)$$

a on β és el paràmetre d'amortiment. Aquesta equació té com a solució, quan $\omega_o > \beta$, la funció

$$x(t) = A_o e^{-\beta t}\cos(\omega_a t + \phi) \qquad (5)$$

a on $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$, i com abans A_o i ϕ s'han de determinar a partir de les condicions inicials.

L'exponencial de l'eq. (5) ens indica clarament que, a mesura que passa el temps, l'amplitud de l'oscil·lació va disminuïnt.

Moviment oscil.latori forçat

Si volem mantenir l'amplitud de l'oscil.lació el que cal es afegir una força impulsora a freqüència ω que mantingui el moviment. Amb això convertim un oscil·lador amortit en un oscil·lador forçat i l'equació del moviment queda com a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = F_o\cos(\omega t) \qquad (6)$$

a on F_o es la magnitud de la força impulsora. En aquest cas la solució té una part transitòria, però al cap d'un cert temps, l'oscil·lador arriba a un estat estacionari descrit per la funció

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) \qquad (7)$$

a on A es l'amplitud de l'oscil·lació i δ el desfasament entre la força i l'oscil·lació. En aquest cas, tant l'amplitud com la fase queden determinats pels paràmetres físics del sistema i no depenen de les condicions inicials. De fet, l'amplitud depèn, entre altres, tant de la freqüència de la força com de la freqüència pròpia. En el cas en que ambdues coincideixen aquesta amplitud es pot fer molt gran, i en concret, l'energia que la força transment a l'oscil·lador es fa màxima. L'aparició d'un pic en la velocitat o potència absorbida, quan es produeix aquesta coincidència entre freqüències, es coneix com a **ressonància**. La fortalesa d'aquest ressonància ve determinada pel factor de qualitat de l'oscil·lador

$$Q = \frac{\omega_o}{2\beta} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} \qquad (8)$$

Fixa't que quan més petit es l'amortiment més gran és el factor de qualitat.

4 Mètode Experimental

4.1 Moviment Harmònic simple

Si fas oscil·lar el vehicle sense la placa amortidora i sense força impulsora obtens un moviment que s'aproxima bastant a un MHS. Una bona manera d'iniciar l'oscil·lació és allunyar el vehicle de la seva posició d'equilibri i dexiar-lo anar perquè comenci a oscil·lar. Quin seria el valor de la fase en l'Eq. (3) corresponent a aquestes condicions inicials? Observa el moviment i anota en quines posicions relatives a la posició d'equilibri s'obtenen els valors extrems per les variables dinàmiques del moviment tal com la posició (relativa a la posició d'equilibri), la velocitat i l'accleració. Mesura la freqüència de les oscil·lacions. Pots fer-ho mesurant el temps de 20 oscil·lacions. Fes aquesta mesura per 3 amplituds inicials diferents. Un cop hagis acabat la mesura dels temps determina la massa del vehicle.

4.2 Moviment feblement amortit

Col·loca la placa amortidora damunt del vehicle de tal manera que quedi perpendicular a la direcció del moviment. Mesura la freqüència de les oscil·lacions en aquestes condicions. Aquesta vegada fes-ho contant només 10 oscil.lacions ja què ara el moviment s'amorteix rapidament. Observes alguna diferència entre aquesta freqüència i la que havies obtingut en l'apartat anterior pel MHS? Fes una mesura de la disminució de l'amplitud de l'oscil·lació en funció del temps. Per tal de fer aquesta mesura, allunya el vehicle de la seva posició d'equilibri amb un amplitud inicial A_o (anota el valor d'aquesta amplitud i anota també la posició d'equilibri, A_{eq}). Deixa anar el vehicle i fixa't quina és l'amplitud A_1 que s'obté al cap d'una osicl·lació. Repeteix el procediment, però ara, anota el valor de l'amplitud al cap de dues oscil·lacions. Així obtindràs A_2. Repeteix el procediment fins a obtenir deu valors d'amplituds.

4.3 Moviment oscil.latori forçat

Assegura't que la font està en la posició de Volts i que l'interruptor d'intensitat està en la posició de 200 mA. Ara pots connectar la font que alimenta el motor per tal de tenir un osicl·lador forçat. Fes girar el dial de la font fins que marqui 3.2 Volts. (**Important**: Sempre que tinguis l'osicl·lador forçat amb el motor connectat, la placa amortidora ha d'estar correctament col·locada damunt del vehicle en la direcció perpendicular al moviment). Abans de prendre mesures observa quin es el moviment del vehicle a mesura que passa el temps. Es manté constant l'amplitud de l'oscil·lació o no? Pots distingir clarament entre un moviment transitori i un estacionari? Fes un dibuix esquemàtic de l'amplitud d'oscil·lació en funció del temps. A quina freqüència creus que oscil·la el vehicle, amb la seva pròpia que havies obtingut en el primer apartat o a la de la força impulsora? Observes algun desfasament entre la força impulsora i el moviment del vehicle? Un cop hagis fet aquestes observacions ja pots començar a fer mesures.

En les condicions en les quals tens ara l'oscil.lador, determina la freqüència de la força impulsora (Mesura el temps que triga l'eix del motor en fer 20 voltes). Anota la diferència de potencial i aquest temps. La diferència de potencial només l'utilitzaràs com a referència ja què no la necessites a l'hora de fer l'anàlisi de resultats. Molt probablement ara l'osicl·lador haurà ja arribat al seu estat estacionari, es a dir que oscil·la amb amplitud constant. Determina el valor d'aquesta amplitud fent una mesura de la distància entre els dos extrems de l'oscil·lació i dividint aquest distància per la meïtat. Repeteix les mesures per V=2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4.0, 4.2.

5 Resultats

5.1 Moviment Harmònic simple

Fes un esquema de l'oscil·lador i indica en quines posicions les variables dinàmiques, posició velocitat i acceleració agafen el seus valors extrems. Determina el valor de la freqüència per cada un de les tres mesures que has fet. Compara aquests valors i indica si hi ha diferències i a què es deuen aquestes diferències. Determina la constant promig de les molles

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \omega_o^2 m \tag{9}$$

5.2 Moviment feblement amortit

Fes una taula posant en la primera columna el temps en funció del període $t=nT_a$ ($T_a=2\pi/\omega_a$), en la segona A_n (n=1,2,…,10), en la tercera $(A_n-A_{eq})/A_o$, i en la quarta $Ln((A_n-A_{eq})/A_o)$.Representa $(A_n-A_{eq})/A_o$ en funció del temps. Quin tipus de corba obtens? Representa gràficament el $Ln((A_n-A_{eq})/A_o)$ en funció del temps i determina el valor de la β. Compara aquest valor amb la freqüència pròpia que has determinat en l'apartat anterior i digues si es tracta d'un oscil·lador feblement, críticament, o sobre-amortit? Justifica la resposta. Un cop tinguis la β determina el factor de qualitat de l'oscil·lador.

5.3 Moviment oscil.latori forçat

Fes una taula posant en la primera columna el voltatge, en la segona el temps de 20 oscil·lacions, en la tercera l'amplitud de l'estat esatcionari A, en la quarta la freqüència de la força impulsora, i en la cinquena la velocitat màxima ωA. Fes una representació gràfica de l'amplitud A en funció de la freqüència de la força impulsora. Fes una segona representació gràfica de la velocitat màxima de l'oscil·lador en funció de la mateixa freqüència. A quin valor de la freqüència correspon el màxim per cada corba? Determina l'amplada ($\Delta\omega$, amplada total a la meitat del màxim) de la segona corba i a partir d'aquí el factor de qualitat. Compara aquest resultat amb el que has obtingut en l'apartat anterior.

6 Qüestions

1. En l'apartat 5.3 veuràs que la freqüència de ressonància no correspon a la freqüència pròpia de l'oscil·lador. Perquè creus que hi ha aquesta discrepància amb les prediccions de la teoria dels oscil·ladors forçats?
(Ajuda: Indica les diferències que observis entre l'oscil·lador forçat que has utilitzat en la pràctica i el que has estudiat a classe de teoria.)
2. En el cas de les oscil·lacions forçades que passaria si no poséssim la placa amortidora.