# Movimiento armónico. Péndulos físico y de torsión.

## 1 Objetivo

Determinar el radio de giro de un péndulo físico y la aceleración de la gravedad. Determinar el módulo de rigidez de un hilo metálico mediante un péndulo de torsión.

## 2 Material

Péndulo físico, cronómetro, regla graduada, hilo de acero, dos cilindros iguales huecos, soportes, palmer, pie de rey, balanza.

## 3 Fundamento teórico

En esta práctica se va a estudiar el movimiento armónico simple en dos fenómenos distintos. En el caso del péndulo físico, es la acción de la gravedad (el peso) la causa que da lugar al movimiento, mientras que en el caso del péndulo de torsión, la gravedad no juega ningún papel y la causa del movimiento es la deformación elástica del hilo.

### 3.1 Péndulo físico

Un péndulo físico o compuesto es cualquier cuerpo rígido que suspendido de un eje horizontal que no pase por su centro de gravedad oscile libremente bajo la acción del campo gravitatorio.

Definamos I como el momento de inercia del cuerpo respecto del eje de suspensión; m, la masa del mismo; g, la aceleración de la gravedad; h, la distancia del centro de gravedad al centro de suspensión y $\theta$ la elongación angular del péndulo o ángulo que forma la dirección determinada por el centro de suspensión S y el centro de gravedad G con la vertical (véase la figura 1). Entonces, para ángulos $\theta$ pequeños, por la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación, se tiene la siguiente ecuación diferencial para $\theta$:

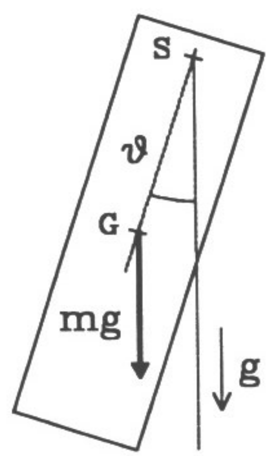

fig. 1

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta \tag{1}$$

La solución de esta ecuación proporciona $\theta$ en función del tiempo t:

$$\theta = \Theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) \tag{2}$$

en la que $\Theta_0$ es la amplitud de la oscilación; $\phi$, la fase inicial y T, el período del péndulo, que viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \tag{3}$$

Mediante el *Teorema de Steiner* se puede expresar el momento de inercia I del cuerpo respecto al eje de suspensión S en función de la distancia h y del momento de inercia $I_G$ del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior que pase por el centro de gravedad G:

$$I = I_G + mh^2 \tag{4}$$

y teniendo en cuenta que $I_G$ en función del radio de giro es:

$$I_G = mk^2 \tag{5}$$

Substituyendo en la expresión (3), resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h^2 + k^2}{gh}} \tag{6}$$

## 3.2 Péndulo de torsión

Un péndulo de torsión está constituido por un hilo vertical del cual cuelga un cuerpo. En nuestro caso éste es una barra preparada para colocarle los cilindros suministrados en diferentes posiciones (fig. 2). Si hacemos girar la barra un ángulo $\theta$ alrededor del hilo aparecerá un par de fuerzas recuperador M que tenderá a poner la barra en la su posición inicial y que tiene el siguiente valor:

$$M = -D\theta \tag{7}$$

expresión en la que D es la constante recuperadora del péndulo (constante de torsión) y que depende del módulo de rigidez G del material del hilo por la relación:

$$D = G\frac{\pi R^4}{2L} \tag{8}$$

en la que R y L son el radio y la longitud del hilo, respectivamente.

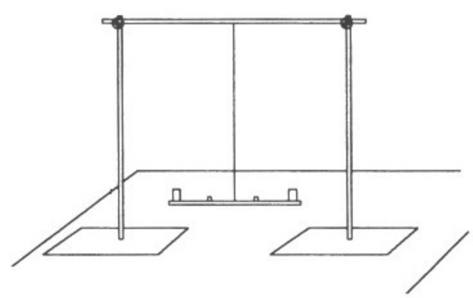

fig. 2

El par recuperador M dado por (7) se opone a la torsión del hilo y da lugar a que la barra efectúe unas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio. En efecto, si I es el momento de inercia de todo el conjunto respecto del eje y aplicamos de nuevo la ecuación fundamental de la dinámica de rotación se obtiene:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -D\theta \tag{9}$$

ecuación análoga a la (1) y que, por las mismas razones que para la (3), nos indica que las oscilaciones serán armónicas simples de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{10}$$

# 4 Método experimental

## 4.1 Péndulo físico

El péndulo compuesto consiste en una barra metálica uniforme, con orificios regularmente espaciados (fig. 3) que permiten que la barra oscile libremente según distintas posiciones.

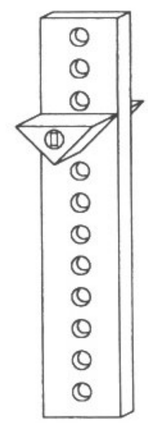

fig. 3

El período del péndulo físico dado por (6) se comprueba experimentalmente determinando los períodos T correspondientes a los diferentes valores de h. Así pues, mide y anota las distintas distancias h desde el centro de gravedad a cada uno de los orificios por donde pasará el eje de suspensión. A continuación sitúa el eje de suspensión en el primer orificio de la barra, colócala en el soporte y hazla oscilar con pequeña amplitud. Calcula el período midiendo el tiempo que tarda en realizar entre 10 y 20 oscilaciones.
Repite el proceso anterior para cada una de las posiciones en las que se pueda situar el eje de suspensión.

## 4.2 Péndulo de torsión

Mide cuidadosamente con una regla graduada la longitud L del hilo y estima el error de la medida. Con un pálmer mide su radio R en unos diez puntos distintos a su largo. A continuación, con una balanza, pesa los dos cilindros por separado. Con el pie de rey mide los radios $R_1$ y $R_2$ de los dos cilindros y haz los promedios.
Finalmente, si no puedes con el pie de rey, mide con la regla graduada las distancias $r_1$ y $r_2$ (ver fig. 4) desde el hilo a las posiciones de los cilindros, a la derecha y a la izquierda. En todas las medidas debes hallar los valores promedio, que son con lo que hay que trabajar y las correspondientes desviaciones estándar que te darán una idea del error de cada magnitud medida.

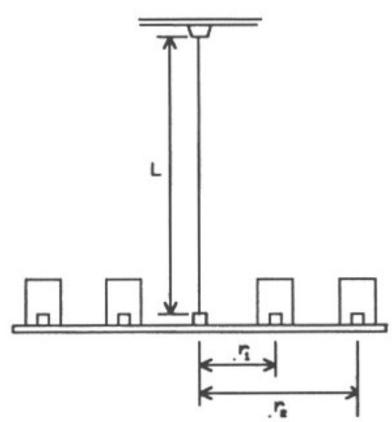


fig. 4

Para las dos posiciones $r_1$ y $r_2$ se miden los dos períodos $T_1$ y $T_2$ de oscilación del péndulo y el error de su medida. Para ello se debe medir varias veces (por ejemplo, cinco) el intervalo de tiempo transcurrido para un número suficientemente grande de oscilaciones (entre 10 y 20) del péndulo y efectuar su promedio.

# 5 Resultados

## 5.1 Péndulo físico

Construye una gráfica que represente la curva obtenida al tomar como abcisas a los períodos y en ordenadas las distancias desde el centro de suspensión al centro de gravedad (T, h). A partir de esta gráfica determina el valor de h que corresponde al período mínimo, obteniendo así un valor aproximado del radio de giro.

Deberías obtener una gráfica similar a la de la figura 5. En ésta se ha representado el péndulo (con sus distintos centros de suspensión) y la gráfica correspondiente a h en función del período T. En esta curva se observan dos ramas simétricas que corresponden a situar el eje de suspensión a uno u otro lado del centro de gravedad G del cuerpo.

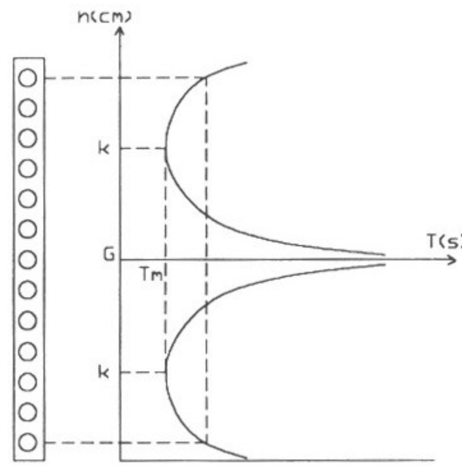

fig. 5

Reescribiendo (6) en la forma:

$$hT^2 = \frac{4\pi^2}{g}h^2 + \frac{4\pi^2 k^2}{g} \qquad (11)$$

coincide con la ecuación conocida de una recta:

$$y = mx + n \qquad (12)$$

De esta forma, construye una gráfica tomando como abcisas a $h^2$ y como ordenadas $hT^2$, haz la correspondiente regresión lineal y dibújala.
Utilizando la relación (11) y los coeficientes de la regresión determina la aceleración gravitatoria g y el radio de giro k.
Compara el radio de giro con el que has obtuviste anteriormente de forma aproximada.

## 5.2 Péndulo de torsión

En primer lugar haz una tabla a modo de cuadro sinóptico que comprenda todos los valores medidos, los valores promedio que se han deducido así como los errores correspondientes.

A continuación la operativa que hay que seguir en la práctica para determinar el módulo de rigidez del hilo se basa en lo que sigue.
Sea $I_0$ el momento de inercia de la barra corta horizontal que cuelga del hilo (véase la figura 4). En los extremos de la barra colocamos los dos cilindros de manera que queden situados a la misma distancia $r_1$ del hilo. Si hacemos oscilar el sistema (oscilaciones horizontales del conjunto hilo más barra con cilindros) y medimos su período $T_1$, por (10), se tendrá:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 + 2I_{r1}}{D} \qquad (13)$$

ecuación en la que $I_{r1}$, fácilmente calculable, es la contribución de cada uno de los dos cilindros al momento de inercia total del sistema; D es la incógnita que buscamos; $T_1$ es el período que podemos cronometrar e $I_0$ es otra incógnita. Dos incógnitas y una sola ecuación. Pero podemos eliminar $I_0$ si planteamos otra ecuación similar a (13); para ello colocamos los cilindros esta vez a la distancia $r_2$ del hilo, hacemos oscilar de nuevo el péndulo de torsión y medimos el nuevo período, $T_2$ y planteamos la ecuación:

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 + 2I_{r2}}{D} \tag{14}$$

En la que $I_{r2}$ es la nueva contribución de los cilindros al momento de inercia total. Entre (13) y (14) podemos ahora hallar D. Y una vez conocida D, la ecuación (8) nos permite determinar G.

Si conocemos la masa m de los cilindros y sus radios interior $R_1$ y exterior $R_2$ entonces los calores de $I_{r1}$ e $I_{r2}$ los podemos hallar con facilidad calculando el momento de inercia de los cilindros respecto de su eje de revolución y aplicando el teorema de Steiner. En nuestro caso quedarán:

$$I_{r1} = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right) + mr_1^2 \tag{15}$$

$$I_{r2} = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right) + mr_2^2 \tag{16}$$

Aplicando logaritmos y diferenciando la expresión (8) obtenemos que los errores relativos de cada magnitud se relacionan en la forma:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L} + 4\frac{\Delta R}{R} \tag{17}$$

Siendo, por (14), (15) y (16):

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta I_{r1} + \Delta I_{r2}}{I_{r1} - I_{r2}} + \frac{T_1 \Delta T_1 + T_2 \Delta T_2}{T_1^2 - T_2^2} \tag{18}$$

$$\Delta I_{ri} = \frac{1}{2}\left(R_1^2 + R_2^2 + r_i^2\right)\Delta m + 2m\left(\left[R_1 + R_2\right]\Delta R + r_i \Delta r\right) \tag{19}$$

Así, aplicando los datos a las fórmulas anteriores obtén la constate recuperadora D y el módulo de rigidez G del hilo y sus respectivos errores.

# 6 Cuestiones

1. ¿Cuál es el valor mínimo del período que se deduce de la expresión (3)?

2. El error en la longitud del hilo es del orden del milímetro mientras que el error en el radio del hilo es mucho más pequeño. ¿Significa esto que influye más en el error de G el primero que el segundo?