

SISTEMES DINÀMICS NO LINEALS: CONTROL I APLICACIONS

AVALUACIÓ FINAL

Contesta les següents preguntes **raonadament**. La puntuació sobre 10 de cada pregunta és la següent: preguntes 1 a 4 – un punt cadascuna; preguntes 5 a 7 – dos punts cadascuna.

1. Defineix el concepte de bifurcació transcítica, dibuixant esquemàticament el diagrama de bifurcació corresponent. Dóna l'exemple d'un sistema real que mostri una bifurcació transcítica.
2. Quants punts fixes pot tenir un sistema bidimensional lineal? I un de no lineal? Raona les respostes i/o dóna un exemple.
3. Quina diferència existeix entre un cicle límit i les òrbites tancades que efectúa un oscil·lador harmònic?
4. Descriu el procés d'estirament i doblegat, i relaciona'l amb la dinàmica dels sistemes caòtics.
5. L'evolució d'un ecosistema de dues espècies que coexisteixen simbiòticament pot venir descrita pel següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u \left(1 - u + \frac{1}{2}v \right) \\ \dot{v} &= v \left(2 - v + \frac{1}{2}u \right) \end{aligned}$$

on $u, v \geq 0$ són les poblacions de les dues espècies.

- (a) Determina els punts fixes del sistema, troba un significat físic per cadascun d'ells i analitza la seva estabilitat.
 - (b) Representa de forma qualitativa el retrat de fases del sistema. Quantes conques d'atracció existeixen?
6. L'aplicació de tenda es defineix de la següent forma:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} rx_n & \text{si } 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ r - rx_n & \text{si } 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Troba tots els punts fixes de l'aplicació per qualsevol valor de r , i determina la seva estabilitat.
 - (b) Calcula l'exponent de Lyapunov del sistema per qualsevol valor de r . Per quins valors de r apareix un comportament caòtic? Representa, mitjançant un diagrama de teranyina, una evolució regular i una altra caòtica.
7. Calcula les dimensions de similaritat i de caixa del fractal que es construeix amb el procés iteratiu els tres primers passos del qual es mostren a la figura.

