

**SISTEMES DINÀMICS NO LINEALS: CONTROL I APLICACIONS**

**AVALUACIÓ FINAL**

Contesta les següents preguntes **raonadament**. Respón en **fulls separats** en **tres** grups: el conjunt de preguntes 1–6, el problema 7 i el problema 8. La puntuació sobre 10 de cada pregunta és la següent: preguntes 1 a 6 – un punt cadascuna; problemes 7 i 8 – dos punts cadascun.

1. Un sistema dinàmic unidimensional ve descrit per una equació del tipus  $\dot{x} = f(x)$ . Descriu **dues** maneres diferents de trobar els punts fixos del sistema i d'analitzar la seva estabilitat.
2. Enumera i descriu els tipus de punts fixos **estables** que poden existir en un sistema bidimensional **lineal**.
3. Defineix el concepte de **finestra periòdica** en un sistema caòtic. Explica per què en les rodalies d'una finestra periòdica de període 3 pot aparèixer el fenomen de la **intermitència**.
4. Per què en un sistema **continu** unidimensional no pot haver-hi caos, i en un sistema **discret** unidimensional sí?
5. Descriu les tres característiques principals que tenen els fractals.
6. Descriu el procediment iteratiu que s'ha de seguir per construir el fractal conegut com **catifa de Sierpinsky**, i calcula la seva dimensió de similaritat.
7. Considera el sistema dinàmic no lineal descrit per l'equació  $\dot{x} = x - rx(1 - x)$ , on  $r$  és un paràmetre de control constant **positiu**.
  - (a) Determina tots els punts fixos del sistema en funció de  $r$  i analitza la seva estabilitat.
  - (b) Demuestra, utilitzant els resultats anteriors, que aquest sistema exhibeix una bifurcació per un cert valor de  $r = r_c$ . Determina  $r_c$  i el tipus de bifurcació que té lloc. Dibuixa el diagrama de bifurcacions.
  - (c) Representa el comportament del sistema sobre la línia de fases per  $r < r_c$  i  $r > r_c$ .
  - (d) Representa el potencial del sistema abans i després de la bifurcació.
8. El següent sistema dinàmic representa la competició entre dues poblacions d'herbívors  $x, y > 0$  (conills i ovelles) que comparteixen els recursos alimentaris i no tenen depredadors:

$$\dot{x} = x(3 - 2x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

- (a) Determina els punts fixos del sistema i analitza la seva estabilitat.
- (b) Representa les nulclines en el pla de fases i dibuixa aproximadament el retrat de fase del sistema.
- (c) Indica en el pla de fases les conques d'atracció del punt (o punts) fix estable del sistema, i assenjala la significació física de cada punt fix estable.