ETSEIT **29 de Juny de 1999**

SISTEMES DINÀMICS NO LINEALS: CONTROL I APLICACIONS

AVALUACIÓ FINAL

Contesta les següents preguntes **raonadament**. La puntuació sobre 10 de cada pregunta és la següent: preguntes 1 a 4 – un punt cadascuna; pregunta 5 – dos punts; pregunta 6 – quatre punts.

---

1. Defineix el que s'entèn com a potencial d'un sistema unidimensional, i explica la seva utilitat. Utilitza aquest concepte per analitzar el comportament del sistema $\dot{x} = \cos x$.

2. Explica, dibuixant el diagrama de bifurcació corresponent, en què consisteix una bifurcació de forca supercrítica en un sistema unidimensional. Descriu també la corresponent bifurcació imperfecta.

3. Sabem que un cert sistema bidimensional no lineal no té cap punt fix ni cicle límit estable. Com es comporta aquest sistema a temps grans?

4. Quina relació existeix entre els sistemes dinàmics caòtics i els objectes geomètrics anomenats fractals?

5. Considera la següent aplicació discreta:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2$$

   Calcula analíticament els seus punts fixes i la estabilitat de cadascun d'ells. Comprova gràficament els resultats que has obtingut (mitjançant un diagrama de teranyina).

6. El comportament dinàmic d'una neurona s'acostuma a representar mitjançant el següent sistema bidimensional, que rep el nom de *model de FitzHugh–Nagumo*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\epsilon}\left[x(x-1)(2-x) - y\right] \\ \dot{y} &= ax - y \end{aligned}$$

   (a) Representa gràficament les nulclines en el pla de fases. Demostra a partir del que s'observa a la gràfica (sense fer cap càlcul de moment) que existeix una bifurcació controlada pel paràmetre a.

   (b) Determina tots els punts fixes del sistema per valors qualsevols de a i ϵ. Per quin valor de a té lloc la bifurcació?

   (c) En el cas particular $\epsilon = 1$, $a = 0$, determina la estabilitat de tots els punts fixes del sistema.

   (d) Quan ϵ es molt més petit que 1, el model de FitzHugh-Nagumo descriu el que s'anomena un *sistema excitable*. Aquest nom es deu a que el sistema és molt sensible a perturbacions externes. En el cas $a = 1$ (i ϵ molt més petit que 1), raona qualitativament el caràcter excitable del sistema. (*Nota: considera la diferent velocitat de creixement de x i y, i el comportament del sistema en totes les zones del pla de fases*).