**ETSEIT-UPC** **Dept. de Física i Eng. Nuclear**

## SISTEMES DINÀMICS NO LINEALS: CONTROL I APLICACIONS

# PROBLEMES

---

PUNTS FIXES *(Mínim 2 problemes)*

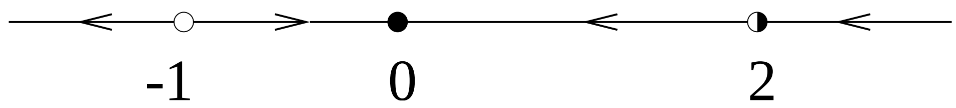
**1** Analitza les següents equacions gràficament: dibuixa la línia de fases, troba els punts fixes, classifica la seva estabilitat i representa gràficament $x(t)$ (de forma aproximada) per diferents condicions inicials.

(a) $\dot{x} = x - x^3$

(b) $\dot{x} = 1 - 4x(1 - x)$

(c) $\dot{x} = e^x - \cos x$

**2** Donada una equació $\dot{x} = f(x)$, sabem com dibuixar la línia de fases. Ara es vol resoldre el problema invers: donada la línia de fases de la figura, troba una equació que sigui compatible amb ella. (Hi ha infinites respostes correctes!)




**3** L'evolució dinàmica d'una reacció química del tipus Y+Z$\rightarrow$X es pot descriure mitjançant una equació de la forma $\dot{x} = a(b - x)(c - x)$, on $x(t)$ és la concentració del producte X en cada instant $t$, $b$ i $c$ són les concentracions (suposades constants) dels reactants Y i Z, respectivament, i $a$ és la constant de velocitat de la reacció (aquests tres paràmetres són per tant sempre positius).

(a) Determina tots els punts fixes del sistema, i estableix la seva estabilitat segons els valors relatius dels paràmetres $a$, $b$ i $c$.

(b) Interpreta físicament els resultats anteriors.

**4** Per cadascuna de les següents equacions diferencials, calcula i representa la funció potencial $V(x)$. A partir d'aquest resultat, determina el punts fixes del sistema i la seva estabilitat:

(a) $\dot{x} = x(1 - x)$

(b) $\dot{x} = 2 + \sin x$

**5** El creixement de tumors cancerosos es pot descriure mitjançant l'anomenada *llei de Gompertz* $\dot{N} = -aN \ln(bN)$, on $N(t)$ és proporcional al nombre de cèl.lules al tumor i $a$, $b$ són paràmetres positius.

(a) Dibuixa la línia de fases d'aquest sistema. A partir d'aquest resultat, determina els punts fixes i la seva estabilitat.

(b) Comprova quantitativament els resultats anteriors mitjançant un anàlisi d'estabilitat lineal. Calcula els temps característics associats als punts fixes.

BIFURCACIONS EN SISTEMES UNIDIMENSIONALS *(Mínim 2 problemes)*

$\boxed{6}$ Determina per cadascuna de les següents equacions diferencials de primer ordre, mitjançant el mètode de la línia de fases, els diferents comportaments qualitatius que apareixen a mesura que $r$ varia. Estableix el tipus de bifurcació, el valor de $r$ pel qual aquesta té lloc, i dibuixa el diagrama de bifurcació corresponent:

(a) $\dot{x} = x(r - e^x)$

(b) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$

$\boxed{7}$ Per cadascuna de les equacions següents, dibuixa el potencial del sistema per diferents valors de r, de forma que apareguin tots els comportaments qualitativament diferents:

(a) $\dot{x} = r - x^2$ (bifurcació de punt de sella)

(b) $\dot{x} = rx - x^2$ (bifurcació transcrítica)

(c) $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ (bifurcació de forca subcrítica)

$\boxed{8}$ Considera el sistema dinàmic no lineal descrit per l'equació $\dot{x} = x - rx(1 - x)$, on $r$ és un paràmetre de control constant positiu.

(a) Determina tots els punts fixes del sistema en funció de $r$ i analitza la seva estabilitat.

(b) Demostra, utilitzant els resultats anteriors, que aquest sistema exhibeix una bifurcació per un cert valor de $r = r_c$. Determina $r_c$ i el tipus de bifurcació que té lloc. Dibuixa el diagrama de bifurcacions.

(c) Representa el comportament del sistema sobre la línia de fases per $r < r_c$ i $r > r_c$.

(d) Representa el potencial del sistema abans i desprès de la bifurcació.

$\boxed{9}$ Un model molt utilitzat per descriure el comportament d'un làser es basa en les següents equacions dinàmiques pel nombre $n$ de fotons a la cavitat i el nombre $N$ d'àtoms excitats:

$$\dot{n} = GnN - kn$$
$$\dot{N} = -GnN - fN + p$$

$G$ és el coeficient de guany degut a l'emissió estimulada, $k$ és el ritme de decaiment de fotons degut a la transmitivitat dels miralls, dispersió, etc, $f$ és el ritme de decaiment dels àtoms excitats degut a l'emissió espontània, i $p$ és la intensitat del bombeig. Tots els paràmetres són positius excepte $p$, que pot ser positiu o negatiu.

(a) Suposem que $N$ relaxa molt més ràpidament que $n$. Llavors podem suposar que $N$ es troba sempre en condicions de punt fix ($\dot{N} = 0$). Segons això, expressa $N(t)$ en termes de $n(t)$ i troba una equació de primer ordre per $n$ (aquest procès rep el nom d'*eliminació adiabàtica*, i es diu que la evolució de $N(t)$ es troba *esclavitzada* a la de $n(t)$).

(b) Mostra que el punt fix $n^* = 0$ esdevé inestable per un valor crític del bombeig $p_c$ (llindar d'emissió làser). Determina aquest valor.

(c) Quin tipus de bifurcació té lloc al llindar d'emissió $p_c$?

**10** Considerem l'equació $\dot{x} = rx - \sin x$.

(a) Pel cas $r = 0$, troba i classifica tots els punts fixes, i dibuixa la línia de fases.

(b) Demostra que quan $r > 1$ existeix un únic punt fix. Quin tipus de punt fix és?

(c) Classifica *totes* les bifurcacions que es produeixen a mesura que $r$ disminueix de 1 a 0. Dibuixa el diagrama de bifurcació.

**11** Considera el sistema $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$, que exhibeix una bifurcació de forca subcrítica.

(a) Troba expressions algebraiques per tots els punts fixes a mesura que $r$ varia.

(b) Dibuixa la línia de fases del sistema a mesura que $r$ varia.

(c) Calcula $r_s$, el valor de $r$ pel qual apareixen els punts fixes no nuls mitjançant bifurcacions de punt de sella.

**12** Considerem l'equació $\dot{x} = h + rx - x^2$. Quan $h = 0$, aquest sistema exhibeix una bifurcació transcrítica en $r = 0$.

(a) Dibuixa el diagrama de bifurcació del sistema per $h < 0$, $h = 0$, i $h > 0$.

(b) Fes un esquema de les regions en el pla $r - h$ que tenen comportament qualitativament diferent, i identifica les bifurcacions que tenen lloc en les fronteres d'aquestes regions.

(c) Representa el potencial que correspon a cadascuna de les regions de l'apartat anterior.

**13** Determina el tipus de bifurcació exhibida pel sistema $\dot{x} = rx - x/(1 + x^2)$ i el lloc on es produeix. Representa el corresponent diagrama de bifurcació.

---

## SISTEMES BIDIMENSIONALS LINEALS *(Mínim 1 problema)*

**14** Per cadascun dels següents sistemes bidimensionals lineals, determina l'estabilitat del punt fix a l'origen i representa el retrat de fases de forma qualitativa:

(a) $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 2x + y$.

(b) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2x - 3y$.

(c) $\dot{x} = 5x + 2y$, $\dot{y} = -17x - 5y$.

**15** La dinàmica de les relacions amoroses es pot descriure mitjançant el següent model bidimensional lineal general:

$$\dot{R} = aR + bJ$$
$$\dot{J} = cR + dJ$$

on $R(t)$ representa l'amor de Romeo per Julieta en l'instant $t$, i $J(t)$ l'amor de Julieta per Romeo en el mateix instant. Valors negatius de $R$ o $J$ representen odi. El paràmetres $a$, $b$, $c$ i $d$ poden prendre valors positius o negatius, en representació de diferents tipus d'amants. Així, per exemple, el cas $a < 0$, $b > 0$ per Romeo correspon a un amant cautelós: no es vol llençar als braços de Julieta, però és veu encoratjat per l'amor que Julieta sent per ell. L'evolució del sistema a temps llargs determina el destí de la parella.

(a) Demostra, representant el retrat de fase, que quan Romeo i Julieta són idènticament cautelosos ($a = d < 0$ i $b = c > 0$) la relació acaba en indiferència mútua ($R = J = 0$) si $a^2 > b^2$ (un excès de cautela condueix a l'apatia), o en amor absolut (o odi absolut, segons l'estat inicial de la parella) si $a^2 < b^2$.

(b) De nou mitjançant el retrat de fase del sistema, analitza què passa si Romeo i Julieta reaccionen als sentiments de l'altre, però no als d'ells mateixos ($a = d = 0$)? Estudia la situació pels diferents signes de $b$ i $c$.

---

## SISTEMES BIDIMENSIONALS NO LINEALS *(Mínim 2 problemes)*

**16** Sigui el següent sistema bidimensional no lineal:

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = x^2 - 4$$

Troba els punts fixes del sistema, determina la seva estabilitat, dibuixa esquemàticament les trajectòries a les rodalies de cadascun dels punts fixes, i intenta completar el retrat de fases del sistema.

**17** El següent sistema dinàmic representa la competició entre dues poblacions d'herbívors $x, y > 0$ (conills i ovelles) que comparteixen els recursos alimentaris i no tenen depredadors:

$$\dot{x} = x(3 - 2x - 2y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

(a) Determina els punts fixes del sistema i analitza la seva estabilitat.

(b) Representa les nulclines en el pla de fases i dibuixa aproximadament el retrat de fase del sistema.

(c) Indica en el pla de fases les conques d'atracció del punt (o punts) fix estable del sistema, i assenyala la significació física de cada punt fix estable.

**18** L'evolució d'un ecosistema de dues espècies que coexisteixen simbiòticament pot venir descrita pel següent sistema d'equacions:

$$\dot{u} = u\left(1 - u + \frac{1}{2}v\right)$$
$$\dot{v} = v\left(2 - v + \frac{1}{2}u\right)$$

on $u, v \geq 0$ són les poblacions de les dues espècies.

(a) Determina els punts fixes del sistema, troba un significat físic per cadascun d'ells i analitza la seva estabilitat.

(b) Representa de forma qualitativa el retrat de fases del sistema. Quantes conques d'atracció existeixen?

**19** Existeixen làsers que emeten fotons de dos tipus (és a dir, llum de dues freqüències diferents), anomenats *làsers de dos modes.* El comportament dinàmic d'un làser d'aquest tipus es pot descriure de la manera més simple mitjançant el sistema bidimensional no lineal

$$\dot{n}_1 = G_1 N n_1 - k_1 n_1$$
$$\dot{n}_2 = G_2 N n_2 - k_2 n_2$$

on $n_1(t)$ i $n_2(t)$ representen el nombre de fotons dels dos tipus i $N(t) = N_0 - \alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2$ és el nombre d'àtoms excitats. Els paràmetres $G_1$, $G_2$, $k_1$, $k_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ i $N_0$ són tots positius.

(a) Analitza l'estabilitat del punt fix $n_1^* = n_2^* = 0$ (làser apagat).

(b) Determina tots els altres punts fixes del sistema.

**20** L'equació de moviment d'un pèndol per oscil.lacions d'amplitud qualsevol és

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0$$

on $\theta$ és l'angle que forma el pèndol amb la vertical.

(a) Utilitza la relació $\dot{\theta} = \omega$ per convertir l'anterior equació diferencial de segon ordre en un sistema de dues equacions diferencials acoblades.

(b) Determina els punts fixes del sistema en l'interval $[-\pi,\pi]$ i analitza la seva estabilitat. Dibuixa esquemàticament les trajectòries del sistema a prop dels punts fixes.

(c) Utilitzant el fet de que el sistema és conservatiu, calcula la seva energia i utilitza-la per representar el retrat de fases per diferents condicions inicials (és a dir, dibuixa trajectòries per diferentes energies). Interpreta físicament els resultats.

(d) Existeix alguna òrbita homoclínica o heteroclínica en aquest sistema?. En cas afirmatiu, identifica-la i interpreta-la físicament.

**21** Les cel.les dels teixits vius obtenen energia mitjançant la descomposició de sucre, segons un procès bioquímic anomenat *glicòlisi*. En algunes situacions, aquest procès té lloc de forma oscil.latòria. La dinàmica d'aquestes oscil.lacions es pot descriure de manera simple amb el següent sistema bidimensional no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} &= b - ay - x^2 y \end{aligned}$$

on $x(t)$ representa la concentració d'adenosin–difosfat i $y(t)$ la de fructosa-6-fosfat.

(a) Dibuixa les nulclines del sistema i identifica les zones del pla de fases en les que $\dot{x}$ i $\dot{y}$ tenen un signe determinat. A partir d'aquesta informació, dibuixa esquemàticament les trajectòries seguides pel sistema. Comprova que existeix un cicle límit.

(b) Determina el punt fix del sistema i analitza la seva estabilitat segons els valors de $a$ i $b$ (dibuixa un diagrama de fases en el pla $(a, b)$ que distingeixi zones de diferent estabilitat del punt fix).

(c) Utilitza el teorema de Poincaré–Bendixson per demostrar rigurosament que aquest sistema exhibeix un cicle límit, per aquells valors de $a$ i $b$ pels quals el punt fix determinat abans és un node inestable. Per fer això, troba una regió acotada del pla de fases que compleixi les condicions del teorema de Poincaré–Bendixson. (*Ajut: aquesta regió és compresa entre dues corbes tancades, en les quals els vectors pendent estan dirigits cap a l'interior de la regió.*)

BIFURCACIONS EN SISTEMES BIDIMENSIONALS *(Mínim 2 problemes)*

$\boxed{\textbf{22}}$ L'evolució temporal d'un bosc en presència d'una població d'insectes que s'alimenten dels arbres del bosc, es pot modelitzar mitjançant el següent sistema bidimensional no lineal:

$$\dot{T} = T\left(1 - \frac{T}{E}\right)$$
$$\dot{E} = rE(1-E) - \frac{B}{T}$$

on $T$ és el tamany promig dels arbres, $E$ és la reserva d'energia del bosc (una mesura de la salut del bosc), $r$ és un paràmetre positiu i $B > 0$ es proporcional a la població total d'insectes, que és considerada una constant del sistema.

(a) Interpreta biològicament els diferents termes de les equacions.

(b) Dibuixa les nulclines del sistema, i mostra que existeixen dos punts fixes si $B$ és petit, i cap si $B$ és gran. Quin tipus de bifurcació té lloc entre aquests dos estats?

(c) Dibuixa el retrat de fase per dos valors de $B$, un per sobre i un altre per sota de la bifurcació.

$\boxed{\textbf{23}}$ El següent model bidimensional no lineal va ser postulat al 1985 per P. Gray i S.K. Scott per descriure la cinètica d'una reacció autocatalítica a temperatura constant:

$$\dot{u} = a(1-u) - uv^2$$
$$\dot{v} = uv^2 - (a+k)v$$

on $u$ i $v$ són proporcionals a les concentracions dels reactants i $a$ i $k$ són paràmetres positius. Demostra que aquest sistema exhibeix una bifurcació de punt de sella per $k = -a \pm \sqrt{a}/2$.

$\boxed{\textbf{24}}$ El comportament dinàmic d'una neurona s'acostuma a representar mitjançant el següent sistema bidimensional, que rep el nom de *model de FitzHugh–Nagumo*:

$$\dot{x} = \frac{1}{\epsilon}\left[x(x-1)(2-x) - y\right]$$
$$\dot{y} = ax - y$$

(a) Representa gràficament les nulclines en el pla de fases. Demostra a partir del que s'observa a la gràfica (sense fer cap càlcul de moment) que existeix una bifurcació controlada pel paràmetre $a$.

(b) Determina tots els punts fixes del sistema per valors qualsevols de $a$ i $\epsilon$. Per quin valor de $a$ té lloc la bifurcació?

(c) En el cas particular $\epsilon = 1$, $a = 0$, determina la estabilitat de tots els punts fixes del sistema.

(d) Quan $\epsilon$ es molt més petit que 1, el model de FitzHugh-Nagumo descriu el que s'anomena un *sistema excitable*. Aquest nom es deu a que el sistema és molt sensible a perturbacions externes. En el cas $a = 1$ (i $\epsilon$ molt més petit que 1), raona qualitativament el caràcter excitable del sistema. (*Nota: considera la diferent velocitat de creixement de $x$ i $y$, i el comportament del sistema en totes les zones del pla de fases*).

$\boxed{\textbf{25}}$ Un model molt utilitzat per descriure el comportament d'un làser es basa en les següents equacions dinàmiques pel nombre $n$ de fotons a la cavitat i el nombre $N$ d'àtoms excitats:

$$\dot{n} = GnN - kn$$
$$\dot{N} = -GnN - fN + p$$

$G$ és el coeficient de guany degut a l'emissió estimulada, $k$ és el ritme de decaiment de fotons degut a la transmitivitat dels miralls, dispersió, etc, $f$ és el ritme de decaiment dels àtoms excitats degut a l'emissió espontània, i $p$ és la intensitat del bombeig. Tots els paràmetres són positius excepte $p$, que pot ser positiu o negatiu.

(a) Troba i classifica tots els punts fixes del sistema.

(b) Fes un esquema de tots els retrats de fase qualitativament diferents que existeixen a mesura que els paràmetres del sistema varien.

(c) Representa el diagrama de bifurcacions del sistema. Quin tipus de bifurcacions es produeixen?

$\boxed{\textbf{26}}$ L'evolució d'un ecosistema de dues espècies, una de les quals depreda a l'altra, pot descriure's mitjançant el sistema

$$\dot{x} = x\,[x(1-x) - y]$$
$$\dot{y} = y(x - a)$$

on $x$ i $y$ són proporcionals a les poblacions de les preses i dels depredadors, respectivament, i $a$ és un paràmetre de control positiu.

(a) Dibuixa les nulclines del sistema (només en el primer quadrant, recorda que $x, y \geq 0$).

(b) Demostra que els punts fixes són (0,0), (1,0) i $(a,\, a - a^2)$, i classifica'ls.

(c) Dibuixa el retrat de fase per $a > 1$, i mostra que els depredadors s'extingeixen.

(d) Demostra que per $a_c = 1/2$ es produeix una bifurcació de Hopf. És supercrítica o subcrítica?

$\boxed{\textbf{27}}$ Un model molt conegut d'oscil.lador químic és l'anomenat *Brusselator* (degut a que els seus descrobidors són de Brusel.les, una broma molt freqüent entre científics d'aquest camp; també existeix, per exemple, el Oregonator). El Brusselator ve definit per

$$\dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y$$
$$\dot{y} = bx - ax^2y$$

on $x, y$ són les concentracions dels reactants i $a, b$ són paràmetres positius del model.

(a) Determina i classifica tots els punts fixes del model.

(b) Dibuixa les nulclines, i construeix una zona on el flux quedi atrapat.

(c) Mostra que per un cert valor de $b = b_c$ té lloc una bifurcació de Hopf. Determina $b_c$.

(d) Utilitza el teorema de Poincaré-Bendixson per determinar si el cicle límit existeix per $b < b_c$ o bé per $b > b_c$.

SISTEMES DISCRETS *(Mínim 1 problema)*

**28** Considera la següent aplicació discreta:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2$$

Calcula analíticament els seus punts fixes i la estabilitat de cadascun d'ells. Comprova gràficament els resultats que has obtingut (mitjançant un diagrama de teranyina).

**29** L'aplicació de tenda es defineix de la següent forma:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} rx_n & \text{si } 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ r - rx_n & \text{si } 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

(a) Troba tots els punts fixes de l'aplicació per qualsevol valor de $r > 0$, i determina la seva estabilitat.

(b) Calcula l'exponent de Lyapunov del sistema per qualsevol valor de $r$. Per quins valors de $r$ apareix un comportament caòtic? Representa, mitjançant un diagrama de teranyina, una evolució regular i una altra caòtica.

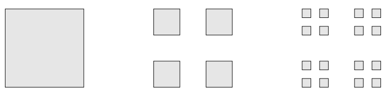
**30** Considera el sistema dinàmic discret $x_{n+1} = a - x_n^2$, sent $a$ un paràmetre de control.

(a) Troba el valor de $a$ pel qual es produeix una bifurcació en el sistema, i determina el seu tipus.

(b) Identifica tots els punts fixes del sistema per $a = 1/2$, i analitza la seva estabilitat.

FRACTALS *(Mínim 1 problema)*

**31** Calcula les dimensions de similaritat i de caixa del fractal que es construeix amb el procès iteratiu els tres primers pasos del qual es mostren a la figura.



**32** Calcula la dimensió de similaritat de la catifa de Sierpinsky.

**33** Definim un *conjunt de Cantor modificat* mitjançant el següent procediment iteratiu: es divideix una línea en cinc parts iguals i s'elimina la part del mig, repetint-se el procès. Calcula les dimensions de similaritat i de caixa del fractal resultant.