Taller de modelització medi–ambiental

Models de creixement

Juan Carlos Cañadas* i Jordi Sellarès†

27 de febrer de 2009

Juan Carlos Cañadas
Barcelona (1963)
Doctor en Física
Dept. de Física i Eng. Nuclear (ETSEIAT)
Universitat Politècnica de Catalunya

Jordi Sellarès
Barcelona (1969)
Doctor en Física
Dept. de Física i Eng. Nuclear (EUETIT)
Universitat Politècnica de Catalunya

*juan.carlos.canadas a upc.es
†jordi.sellares a upc.es

Índex

Presentació

El bacteri *escherichia coli* es divideix cada vint minuts. Podem començar amb 100 bacteris i tenir a les trenta-dues hores tot el mon cobert d'una capa de 500 metres de gruix. Aquesta mena de creixement s'anomena *creixement geomètric* si té lloc en intervals de temps discrets i *creixement exponencial* si el temps es registra de manera contínua.

No cal dir que aquesta mena de creixement sol passar — per sort — gaire sovint, però podem trobar casos on sigui aplicable. El seu estudi, però, es justifica millor si tenim en compte que es tracta del cas límit en el qual la natalitat o la mortalitat de l'espècie no depèn del nombre de membres.

Aquest fet té dues lectures. Per una banda, aquest model és ideal per estudiar la influència dels factors externs. Per l'altra, es pot estendre per obtenir altres models més realistes, com el *model logístic*.

Al llarg d'aquesta unitat distingirem entre models discrets i continus. Veurem fins a quin punt arriba la seva equivalència i en quins aspectes les seves prediccions són diferents. Si entenem el motiu d'aquestes diferències podrem establir quan és més adequat emprar un o altre tipus de model.

Però potser el fet més sorprenent serà comprovar com equacions aparentment simples poden arribar a tenir un comportament imprevisible. Aquest fenomen es coneix com a *caos determinista* i en farem especial esment, ja que es tracta d'una característica comuna a moltes altres disciplines.

Objectius

- Definir el concepte d'equació de recurrència i aplicar-lo a la modelització amb temps discrets.
- Enunciar models independents de la densitat i explicar com es pot emprar l'estocasticitat per reproduir comportaments realistes.
- Presentar el model logístic com el model més senzill que depèn de la densitat.
- Establir analogies entre les equacions de recurrència i les equacions diferencials.
- Descriure la relació entre els models discrets i els seus equivalents continus.
- Definir els conceptes d'autòmat cel·lular i de model extensiu.

Esquema

1. Modelització mitjançant equacions de recurrència

   (a) Models independents de la densitat

      i. Model geomètric
      ii. Estocasticitat ambiental
      iii. Estocasticitat demogràfica

   (b) Models dependents de la densitat

      i. El model logístic
      ii. Caos determinista al model logístic

2. Modelització mitjançant equacions diferencials

   (a) Model exponencial
   (b) Model logístic (versió contínua)

3. Modelització mitjançant autòmats cel·lulars

1 Modelització mitjançant equacions de recurrència

1.1 Concepte

El nostre objectiu és representar el nombre de membres que té una espècie en funció del temps. Potser no ens cal especificar a cada instant de temps quant val aquest nombre i en tenim prou indicant el seu valor cada cert temps.

En aquest cas, l'evolució de l'espècie vindrà representada per una sèrie de nombres N_i. Notarem com Δt el temps que passa entre que la espècie té N_i membres i que en té N_{i+1}.

Podem mirar de trobar una expressió que reprodueixi la sèrie. Això es pot fer mitjançant un terme general. Per exemple,

$$N_i = 3000 \cdot i.$$

Més sovint, però, ens caldrà utilitzar una expressió que ens permeti calcular cada terme de la sèrie a partir del terme precedent. Per exemple:

$$N_{i+1} = N_i + 3000.$$

Això és el que es coneix com a *equació de recurrència*. A vegades, no sempre, és possible trobar un terme general que sigui equivalent a una equació de recurrència.

Abans de continuar, et proposem que realitzis l'activitat 1.

1.2 Propietats

Considerem una equació de recurrència de la forma

$$x_{i+1} = f(x_i).$$

Ens interessarà especialment l'existència dels anomenats *punts fixos*. Un punt fix, com el seu nom indica, és un valor tal que si un terme de la sèrie el té, tots els termes posteriors també el tindran. Matemàticament, expressem això com

$$x^* = f(x^*).$$

Un punt fix pot ser estable o inestable. Està clar, per la seva definició, quin és el comportament de la sèrie quan un terme té exactament aquest valor. Ara bé, què passa si un terme de la sèrie té un valor molt proper al del punt fix? Els propers termes tendiran a acostar-se al punt fix o s'hi allunyaran?

En el primer cas parlarem d'un punt fix *estable* i probablement la sèrie anirà a parar a aquest valor tard o d'hora. En el segon cas tindrem un punt fix *inestable* i molt difícilment la sèrie podrà tenir aquest valor, a no ser que el seu valor inicial sigui exactament aquest.

Podem discutir el caràcter d'un punt fix x^* estudiant la següent quantitat

$$\lambda = \frac{df(x)}{dx}|_{x*}.$$

Quan $\lambda > 1$ el punt fix és inestable. En canvi, per $\lambda < 1$ el punt fix tindrà caràcter estable.

Un altre concepte interessant és el d'*òrbita* o *cicle*. Pot passar que un cert nombre de valors es vagi repetint contínuament en una sèrie. Podem expressar-ho matemàticament dient que existeix un terme de la sèrie a partir del qual sempre es complirà que

$$x_{i+n} = x_i$$

on n és el nombre de termes de l'òrbita. Per exemple, a la següent sèrie trobem una òrbita de tres termes.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, \ldots$$

De fet, es pot pensar que un punt fix és una òrbita d'un sol terme. Fixem-nos que si obtenim la sèrie a partir d'una equació de recurrència, n'hi ha prou amb que es repeteixi un terme de la sèrie per a que els seus valors formin, a partir d'aquell terme, una òrbita.

Les òrbites poden ser, com els punts fixos, estables o inestables. El criteri torna a ser veure cap a on tendeix la sèrie quan un terme té un valor molt proper a un dels valors que formen l'òrbita.

Finalment, ens podem trobar amb un atractor. En aquest cas, els valors de la sèrie no formen una òrbita, ja que mai es repeteix cap valor, però tenen tendència a cobrir un interval finit. Anomenem *atractor* a aquest interval de valors. Un atractor es pot considerar com una òrbita d'infinits termes.

Els atractors són un indici del que s'anomena *caos determinista*: un petit canvi en el terme inicial de la sèrie dóna lloc a evolucions completament diferents, que tan sols tenen en comú la tendència a cobrir el mateix atractor.

Una equació de recurrència pot tenir més d'un punt fix. El valor i l'estabilitat dels punts fixos són un tret característic de cada equació de recurrència. Imaginem ara que tenim una equació que depèn d'un paràmetre a.

$$x_{i+1} = f_a(x_i).$$

En certa manera, aquesta expressió representa una "família" d'equacions de recurrència, cadascuna caracteritzada per un valor del paràmetre a. Per a valors diferents de a podem tenir un nombre diferent de punts fixos. Diem que es produeix una *bifurcació* en un valor donat de a quan una variació molt petita d'aquest valor fa que canvii el nombre de punts fixos.

També es diu que s'ha produït una bifurcació quan varia el nombre d'òrbites o, fins i tot, quan el nombre de termes d'una òrbita canvia.

Pot passar que, per a un determinat valor del paràmetre a, una òrbita es converteixi en un atractor. En aquest cas es diu que el sistema s'ha tornat *caòtic*.

En els propers apartats tindrem l'oportunitat d'anar descobrint aquests comportaments a les equacions de recurrència que utilitzarem.

2 Models independents de la densitat

2.1 Model geomètric

Com s'ha dit abans, modelitzarem el nombre de membres d'una espècie mitjançant una sèrie. El valor de cada terme de la sèrie representa el nombre de membres de l'espècie en un cert instant de temps. Fixarem una quantitat Δt que representi l'interval de temps entre dos termes de la sèrie.

Aquesta mena de modelització s'anomena *intensiva* ja que no tenim en compte la distribució espaial dels membres de l'espècie sinó tan sols el seu nombre. Els models que sí tenen en compte com està distribuïda l'espècie a l'espai s'anomenen *extensius*.

Per simplificar l'exposició, considerarem tan sols la reproducció asexual, com la dels bacteris. Tot el que s'exposarà a continuació es pot adaptar a la reproducció sexual redefinint el significat d'algunes quantitats.

Considerem ara l'interval de temps Δt. Sigui B la probabilitat de que un membre de l'espècie es reprodueixi i D la probabilitat de que mori, durant el transcurs d'un interval de temps Δt. El nombre de membres un cop transcorregut aquest interval de temps és

$$N_{i+1} = N_i + BN_i - DN_i = (1 + B - D)N_i \equiv RN_i \tag{1}$$

on hem definit R com $1 + B - D$. R s'anomena *factor de creixement geomètric*.

En el cas de l'Equació 1 és possible calcular el terme general,

$$N_i = R^i\, N_0 \tag{2}$$

on R_0 és el nombre inicial de membres de l'espècie.

El comportament d'aquest model es previsible. Quan $R > 1$ tindrem un creixement geomètric. En canvi si $R < 1$ el nombre de membres decreixerà, també geomètricament (veure Figura 1).

Aquest model és *independent de la densitat* perquè els paràmetres de natalitat B i de mortalitat D no depenen del nombre de membres de l'espècie. Això es veritat quan una espècie disposa de prou espai i recursos però no es compleix, en general, quan el nombre de membres és prou gran com per a que hi hagi escassetat d'algun recurs (aigua, aliments, espai, ...).

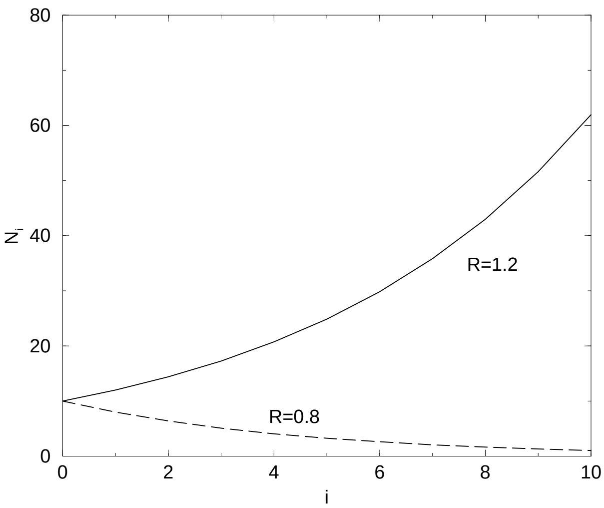

Figura 1: Comportament del model geomètric

2.2 Estocasticitat ambiental

El fet que B i D siguin independents del nombre de membres de l'espècie no vol dir que siguin necessàriament constants. Pot haver-hi un augment de la mortalitat i una disminució de la natalitat degut a circumstàncies externes, com sequeres o epidèmies. El resultat pot ser una disminució de R per sota de 1.

Al contrari, circumstàncies favorables poden fer variar R de manera que assoleixi valors per sobre de 1.

Aquestes variacions del factor de creixement R, per sobre i per sota de 1, poden fer que el model geomètric ja no doni lloc a un creixement o a un decreixement monòton sinó a unes fluctuacions aleatòries que mantenen la població en valors que no mostren ni un creixement ni un decreixement clar. Aquest fenomen s'anomena *estocasticitat ambiental*.

Per estudiar-lo, considerem el model que ve donat per l'equació de recurrència

$$N_{i+1} = R(\zeta)N_i \tag{3}$$

on ζ és una variable aleatòria que compleix

1. El 50% de les vegades adopta el valor R_1
2. L'altre 50% de les vegades té valor R_2

No costa molt veure que la condició per a que no hi hagi una tendència ni cap al creixement ni cap al decreixement és

$$\sqrt{R_1 R_2} = 1$$

o en altres paraules

$$R_1 = \frac{1}{R_2} \tag{4}$$

Etiquetarem la corba amb la mitja geomètrica dels dos factors de creixement

$$< R >\equiv \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{R_1^2 + 1}{2R_1}.$$

En aquesta darrera equació, la igualtat tan sols és vàlida si es compleix la Condició 4.

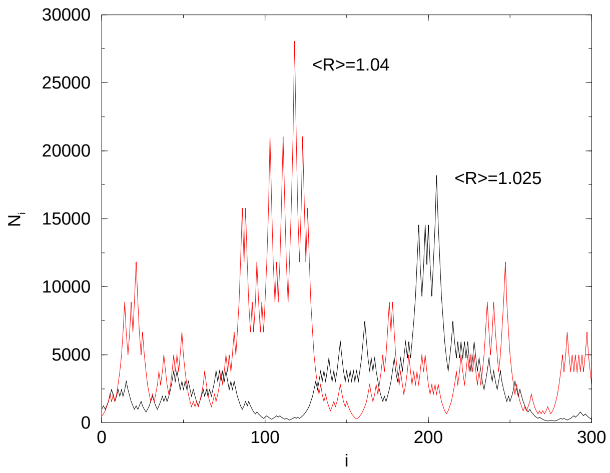

Figura 2: Dos exemples d'estocasticitat ambiental

A la Figura 2 es pot veure un exemple dels resultats del model.

2.3 Estocasticitat demogràfica

Mirem ara una altra font d'estocasticitat que pot produir canvis en el comportament monòton del model geomètric. Quan R té un valor exactament igual a 1, el nombre de membres de l'espècie es manté constant segons el model geomètric.

El model geomètric parteix de la idea de que tots els individus es reprodueixen al mateix ritme. Això pot ser cert en organismes molt senzills, però no es compleix en absolut pels organismes superiors.

Quan diem que la natalitat és d'un fill per parella, s'entén que algunes parelles tindran dos, tres o encara més fills mentre que altres no en tindran cap. Cal entendre aquesta afirmació com un promig, no com una indicació de que totes les parelles tenen un fill.

Ambdues coses tan sols són equivalents en el límit en el qual una espècie té infinits membres.

A la pràctica, el nombre de neixements i el de defuncions presenta fluctuacions (veure glossari). Tant el neixement d'un ésser viu com la seva defunció són esdeveniments que no estan exempts d'una certa aleatoritat. La xifra que ens proporciona el factor de creixement R és tan sols una mitja, la variància (veure glossari) de la qual no és zero. Aquest fet és especialment notable quan les poblacions són reduïdes.

Intentem plantejar un model que vagi més enllà que el model geomètric en aquest sentit. No podrem plantejar-lo en termes d'una equació de recurrència sinó que caldrà resoldre el model mitjançant una petita simulació.

El model es pot plantejar en termes tan generals com es vulgui, però, per claredat, potser és millor imposar alguna restricció, que en qualsevol cas es pot variar.

Així doncs, per a cada un dels N_i membres de l'espècie, calculem els descendents que tenen d'acord amb les següents probabilitats

1. Probabilitat de no tenir descendents: $(1-a)/2$
2. Probabilitat de tenir 1 descendent: a
3. Probabilitat de tenir 2 descendents: $(1-a)/2$

Podem escollir altres valors per a les probabilitats i ampliar el nombre d'esdeveniments possibles (tenir 3 descendents, ...). No obstant, la suma de totes les probabilitats ha de ser sempre igual a 1 o altrament no estaríem considerant-les totes.

Per una altra banda, si volem que el nombre de membres de l'espècie es mantingui constant (per comparar amb el model geomètric $R = 1$), la probabilitat de morir durant un interval de temps ha de ser igual a la natalitat mitja. En el nostre cas

$$D = 0 \times \frac{1-a}{2} + 1 \times a + 2 \times \frac{1-a}{2} = 1$$

tot i que podria ser un altre factor si haguéssim partit de probabilitats amb una forma diferent o haguéssim considerat altres esdeveniments.

Un cop simulat el pas d'un interval de temps, en simulem més per poder obtenir l'evolució del nombre de membres d'una espècie. A la Figura 3 es pot observar una

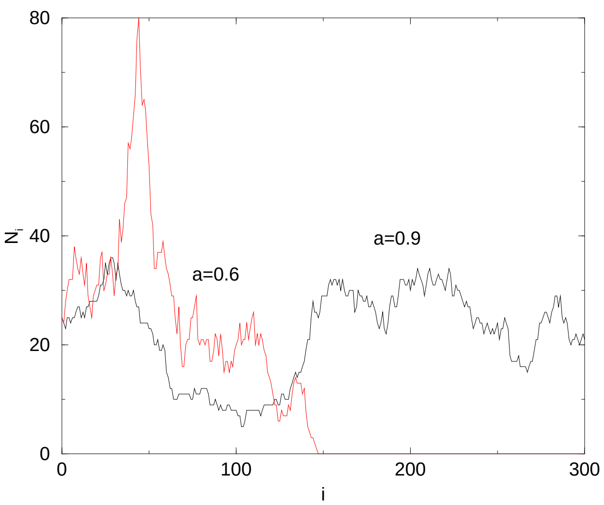

Figura 3: Dos exemples d'estocasticitat demogràfica

simulació del model, partint de $N_0 = 25$, per a dos valors de a diferents.

Ara ja pots fer l'activitat 2.

3 Models dependents de la densitat

Fins ara hem utilitzat models on les probabilitats de neixement i de defunció eren independents del nombre d'individus de l'espècie. Aquesta suposició pot tenir sentit en dos casos. És gairebé certa en aquells casos en que l'abundància d'espai i d'aliments fa que no hi hagi factors que limitin l'expansió de l'espècie. També es pot considerar útil quan la dependència en el nombre de membres no és tan important com altres factors, com ara les condicions externes o, fins i tot, les fluctuacions aleatòries del nombre de neixements i de defuncions.

En la major part del casos, però, és més lògic suposar que la natalitat disminueix a mida que augmenta el nombre de membres d'una espècie i que, en conseqüència, l'espai i els aliments disponibles són més limitats. Pels mateixos motius, podem esperar que la mortalitat esdevingui més elevada a mida que el nombre de membres de l'espècie augmenti.

És d'esperar que si apliquem aquestes idees aconseguirem models més realistes. En concret, no caldrà recórrer a factors externs per obtenir comportaments qualitativament correctes.

3.1 Model logístic

El tipus de dependència més simple que compleix les premises esmentades abans és la dependència lineal. Suposem, doncs, que els factors B i D no són constants sinó que venen donats per

$$B = B_0 - B_1 N \tag{5}$$

$$D = D_0 + D_1 N \tag{6}$$

on recuperem el model geomètric quan $B_1 = D_1 = 0$.

Si substituïm les Equacions 5 i 6 a l'expressió 1 i escrivim el resultat en funció dels paràmetres

$$R = 1 + B_0 - D_0$$

$$K = \frac{B_0 - D_0}{B_1 + D_1},$$

obtenim l'anomenat *model logístic*

$$N_{i+1} = N_i + (R-1)\left(1 - \frac{N_i}{K}\right) N_i. \tag{7}$$

És fàcil veure el significat intuïtiu dels paràmetres R i K. Quan el nombre de membres de l'espècie es petit comparat amb K, el seu comportament coincideix aproximadament amb el d'un model geomètric amb factor de creixement R. Per tant, continuarem anomenant *factor de creixement* a aquest paràmetre, malgrat que el comportament ja no sigui exactament geomètric.

En canvi, quan el nombre de membres és gairebé K el creixement és molt petit. De fet, $N = K$ és un punt fix del sistema: quan s'assoleix aquest valor ja no hi ha variacions posteriors. Per aquest motiu anomenem *capacitat* al paràmetre K.

El model logístic sovint es presenta normalitzat (veure glossari)

$$x_{i+1} = R(1 - x_i)x_i. \tag{8}$$

La magnitud x es defineix com

$$x_i \equiv \frac{N_i}{Q}$$

on, a la seva vegada, el paràmetre Q està definit com

$$Q \equiv \frac{1 + B_0 - D_0}{B_1 + D_1}.$$

El significat de Q és diferent al de K. Es tracta d'un límit per sobre del qual el model logístic deixa de tenir sentit.

A la Figura 4 es pot veure una evolució típica d'un sistema modelitzat mitjançant el model logístic discret.

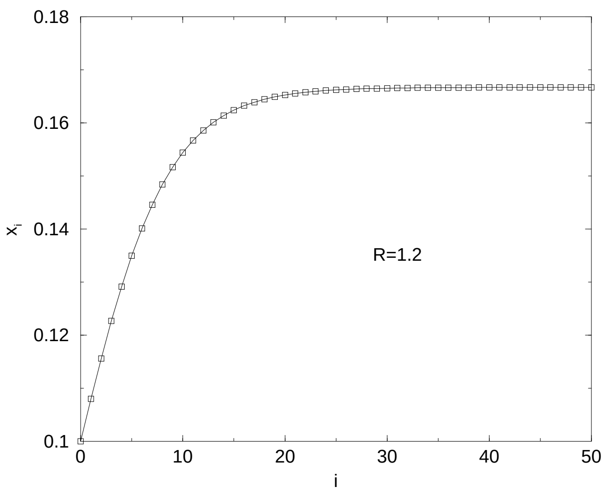

Figura 4: Exemple de resultats del model logístic

3.2 Caos determinista al model logístic

Una de les característiques més notables del model logístic és el seu comportament, sorprenentment complex tenint en compte la simplicitat de l'equació de recurrència.

A la Figura 5 es pot veure el *diagrama de bifurcacions*. Aquest diagrama serveix per visualitzar les bifurcacions que presenta el model logístic. L'eix de les x representa els valors possibles del paràmetre R (entre 0 i 4). A l'eix de les y hi representem diversos valors que assoleix la variable x_i a instants de temps diferents. La única condició que compleixen aquests valors és que corresponen a instants de temps grans. D'aquesta manera, si existeix un punt fix, un òrbita o un atractor, aquests valors segur que en formaran part.

Observem que entre $R = 0$ i $R = 1$ tan sols hi ha un punt fix estable que és el 0. A $R = 1$ es produeix una bifurcació, ja que entre $R = 1$ i $R = 2$ el punt fix estable és

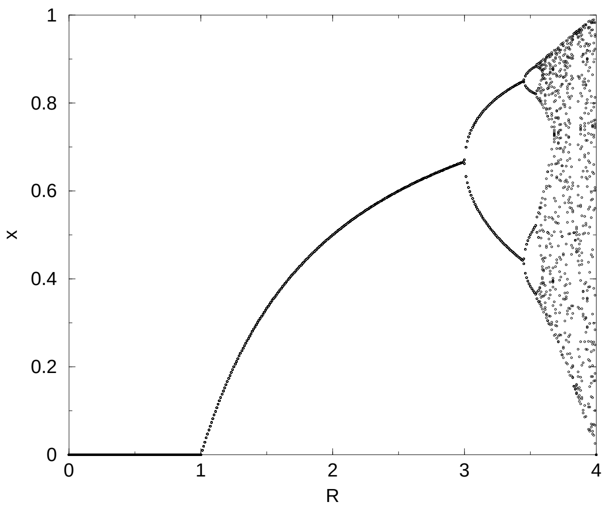

Figura 5: Diagrama de bifurcacions

un altre ($x^* = 1 - R^{-1}$) mentre que $x = 0$ passa a ser un punt fix inestable. A $R = 3$ es produeix una altra bifurcació. Aquest cop el punt fix es converteix en una òrbita de dos punts. Més endavant el nombre de punts de l'òrbita es va doblant, a intervals cada cop més curts. Es pot demostrar que a partir de $R = 3.58$ el nombre de punts de l'òrbita és infinit i que, per tant, tenim un atractor.

Entre $R = 3.58$ i $R = 4$ la major part dels valors de R corresponen a atractors. No obstant, tenim finestres (veure Fig. 6) que no presenten aquest comportament i que, de fet, reprodueixen l'estructura de bifurcacions que hem trobat abans de $R = 3.58$. Aquest fet s'anomena *autosimilitud* i és un dels trets característics dels comportaments caòtics

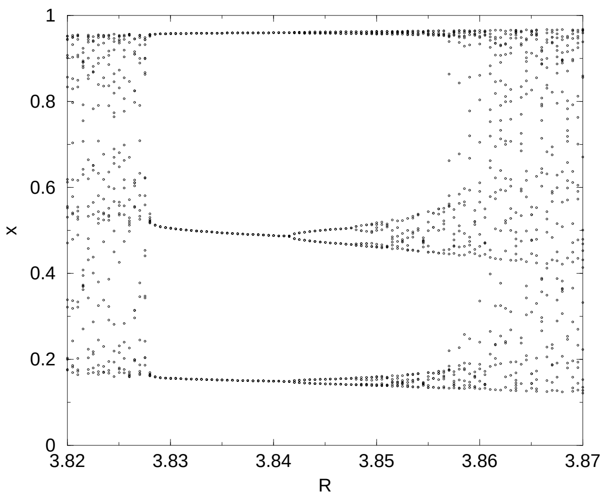

Figura 6: Una finestra d'ordre en mig del caos

El model logístic, per als valors de R que donen lloc a atractors, presenta *caos* *determinista* degut a que dos sistemes que parteixen d'estats molt similars evolucionen de manera completament diferent. Això es pot comprovar a la Figura 7, que representa l'evolució de dos sistemes caracteritzats per $R = 3.9$ i amb valors inicials molt semblants. Per a $i = 0$ un sistema es troba a $x_0 = 0.5$ mentre que l'altre sistema es troba a $x = 4.99$. L'evolució al llarg de les primeres 20 iteracions és molt semblant. A poc a poc, els sistemes es van diferenciant. En arribar a l'iteració $i = 90$ l'evolució dels dos sistemes ja és completament diferent.

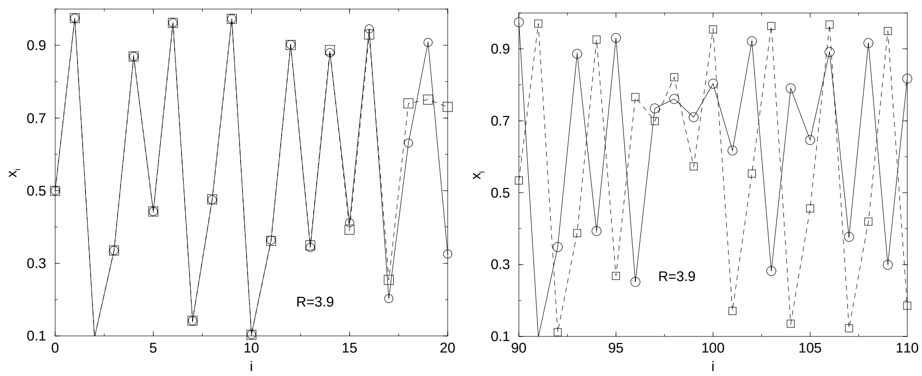

Figura 7: Evolució de dos sistemes

Els atractors són fractals. Un *fractal* és una figura geomètrica tal que la seva dimensió topològica no coincideix amb la dimensió del seu "contingut". Per dimensió topològica entenem la dimensió que habitualment associem amb una figura: si es tracta d'un conjunt de punts (com és el cas de l'atractor que estem estudiant) la dimensió topològica és 0, si la figura està formada per línies la dimensió topològica és 1, i així successivament.

Des d'un punt de vista matemàtic hi ha vàries definicions per avaluar la dimensió del "contingut" d'una figura (per exemple, la dimensió de Hausdorff–Besicovitch) però més val abordar aquest problema des d'un punt de vista intuïtiu. L'atractor està format pels valors que va assolint el model logístic i per tant la seva dimensió topològica és 0. No obstant, la sèrie anirà *recobrint densament* tots els valors d'un interval (passarà tan a prop com vulguem de qualsevol punt de l'interval). De fet, per $R = 4$ el model logístic recobreix tot l'interval $(0, 1)$. En aquest sentit, la dimensió de l'atractor és la d'una línia, és a dir, 1.

Un "truquet" per visualitzar millor els atractors és afegir *observables ficticis*. D'aquesta forma es pot veure millor quina és la dimensió i l'estructura de l'atractor. Pel que fa al model logístic, representarem en una gràfica en tres dimensions un cert nombre de punts. El punt i té com a coordenades (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), tres valors valors consecutius de la sèrie. Els observables s'anomenen ficticis perquè estem fent una gràfica de tres quantitats quan en realitat només en tenim una (el valor de la sèrie en cada terme). El resultat es pot veure a la Figura 8.

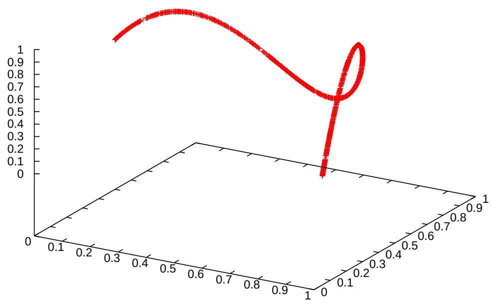

Figura 8: Atractor per R=3.9

4 Modelització mitjançant equacions diferencials

4.1 Concepte

Fins ara hem estat considerant el que anomenem *models discrets* degut a la manera com tractem el temps.

Per comptes de considerar el temps com una variable discreta, que tan sols pot assolir valors múltiples sencers de Δt, podem tractar-lo com el que és en realitat, una variable contínua que pot arribar a tenir qualsevol valor. En aquest cas estaríem parlant d'un *model continu*.

Així doncs, representarem el nombre de membres de l'espècie com una funció del temps $n(t)$. Aquesta funció és l'equivalent del terme general de la sèrie, en el cas dels models discrets. Sovint, però, no podrem trobar una funció $n(t)$ a primer cop de vista. Més aviat, l'anàlisi del problema ens durà a una equació que ens relacioni el *ritme de canvi* de $n(t)$ amb els paràmetres del sistema i amb $n(t)$. Parlant en termes matemàtics, obtenim una equació on intervenen $n(t)$ i la seva derivada, es a dir, una *equació diferencial*

$$\frac{dn(t)}{dt} = f_a[n(t)].$$

En els nostres models $f_a[n(t)]$ no dependrà directament del temps. Això farà que les equacions diferencials que tractarem sempre siguin separables (veure glossari).

Notem que les equacions diferencials juguen el mateix paper en els models continus que les equacions de recurrència en els models discrets.

4.2 Propietats

Ja s'ha comentat que en els models continus les equacions diferencials són l'equivalent de les equacions de recurrència en els models discrets. En certa manera també podem trobar una correspondència amb les propietats que s'han esmentat a l'apartat 1.2.

Considerem una equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Pot existir un valor x^* que compleixi

$$f(x^*) = 0.$$

Aquest valor serà un *punt fix*. Si $x(t)$ arriba a tenir aquest valor llavors el tindrà sempre en el futur. Els punts fixos poden ser estables o inestables. Com a les equacions de recurrència, l'estabilitat es pot estudiar mitjançant el paràmetre λ, definit per

$$\lambda = \frac{df(x)}{dx}|_{x^*}.$$

De nou, $\lambda > 1$ indica que el punt fix és *inestable* mentre que $\lambda < 1$ vol dir que els punt fix és *estable*.

Encara que els models que estudiarem en aquest tema no presentaran aquest comportament, també poden existir *òrbites* (*cicles*) en forma de solució periòdica. Per obtenir atractors ens caldrà estudiar sistemes de tres (o més) equacions diferencials.

De moment, pots fer l'activitat 3.

5 Versió contínua dels models de creixement

5.1 Model exponencial

Recordem que en el cas dels models discrets vam definir dos valors: B era la probabilitat de que un membre de l'espècie tingui un descendent durant l'interval Δt i D era la probabilitat de la seva mort durant el mateix interval de temps.

Ara, definim b com la probabilitat de que un membre de l'espècie tingui un descendent, per unitat de temps. Si B és adimensional, b té dimensions d'invers del temps. Anàlogament, definim una probabilitat de defunció per unitat de temps d.

Si expressem això en forma d'equació diferencial obtenim

$$\frac{dn(t)}{dt} = bn(t) - dn(t) = rn(t), \tag{9}$$

on hem definit la *taxa de creixement* com $r = b - d$. La solució d'aquesta equació és

$$n(t) = e^{rt}n(0).$$

Fixem-nos que el model geomètric (discret) i el model exponencial (continu) són completament equivalents quan es compleix la condició

$$R = e^{r\Delta t}$$

Per practicar aquest concepte pots fer l'activitat 4.

5.2 Model logístic

De nou hem considerat, a l'apartat anterior, que tant b com d són independents del nombre de membres que té l'espècie i una altra vegada la solució més senzilla per incorporar aquesta dependència és suposar que és lineal

$$b(t) = b_0 - b_1 n(t),$$

$$d(t) = d_0 + d_1 n(t).$$

Si, a més, apliquem les definicions

$$r = b_0 - d_0,$$

$$K = \frac{b_0 - d_0}{b_1 + d_1},$$

llavors l'Eq. 9 es converteix en

$$\frac{dn(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{n(t)}{K}\right)n(t). \tag{10}$$

La solució d'aquesta equació diferencial és

$$n(t) = \frac{K}{1 + [K/n(0) - 1]e^{-rt}}$$

Sovint s'utilitza una normalització que és subtilment diferent a la del model discret. Per comptes de normalitzar respecte un valor màxim, normalitzarem respecte la capacitat del sistema

$$x(t) \equiv \frac{n(t)}{K}.$$

Llavors l'Equació 10 s'escriu com

$$\frac{dx(t)}{dt} = r[1 - x(t)]x(t)$$

i la seva solució com

$$x(t) = \frac{1}{1 + [1/x(0) - 1]e^{-rt}}.$$

A la Figura 9 es pot veure la representació de dues funcions $x(t)$ modelitzades mitjançant el model logístic.

Una activitat relacionada amb el model logístic és la 5.

6 Modelització mitjançant autòmats cel·lulars

6.1 Concepte

Els models discrets i continus que hem vist fins ara tenen en comú que són *intensius*. Amb això es vol dir que tan sols tenim en compte el nombre de membres total de l'espècie i no la manera com està distribuïda geogràficament.

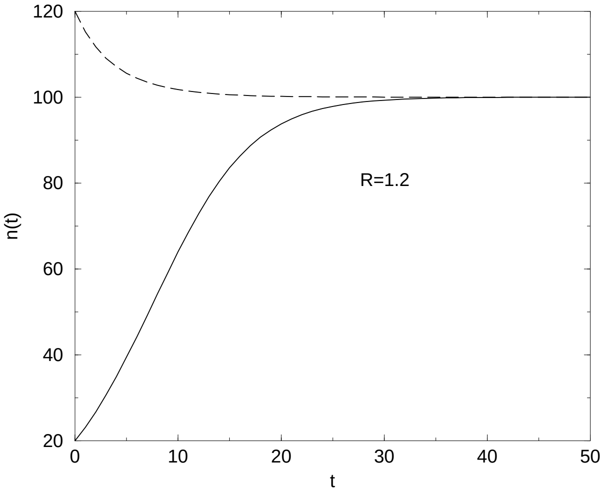

Figura 9: Dues corbes logístiques contínues

Està clar que quan parlem de N_i o de $n(t)$ estem comptabilitzant uns membres que estan localitzats en una determinada regió. No obstant, podem ser més explícits en aquest punt i utilitzar models que incorporin la localització dels membres de l'espècie com una informació més del model. Aquests models s'anomenen *extensius*

Uns models extensius particularment interessants són els autòmats cel·lulars. Un *autòmat cel·lular* consisteix en un conjunt de caselles (cèl·lules) cadascuna de les quals pot tenir un nombre finit d'estats diferents.

Els autòmats cel·lulars evolucionen per torns i totes les caselles es governen pel mateix conjunt de regles. Una condició que han de complir les regles és que l'estat d'una casella tan sols pot dependre de l'estat de les caselles del seu entorn en el torn anterior i de la història de la pròpia casella.

Els diferents autòmats cel·lulars es caracteritzen per

- Forma i dimensions de les caselles
- Què s'entén per entorn de la casella
- Nombre d'estats en què es pot trobar la casella
- Regles d'evolució

És habitual, per evitar que la matriu es quedi petita, considerar que la topologia de la matriu es toroïdal. Això vol dir que una casella de l'extrem dret de la matriu és veïna de la de l'extrem esquerra. El mateix passa amb les caselles de l'extrem superior i inferior.

En general podem dir que els autòmats cel·lulars no són models que puguin donar respostes definitives ja que tan sols intenten simular la natura a grans trets. No obstant serveixen per fer-nos una idea de quines són les lleis més essencials que intervenen en un fenomen.

6.2 El joc de la vida

El joc de la vida és va pensar per demostrar que és possible construir una computadora universal (veure glossari) mitjançant un autòmat cel·lular.

Després de dos anys de recerca, John Conway va trobar un sistema que consistia en una matriu rectangular de caselles, cadascuna de les quals podia tenir dos estats. Hom pot pensar en aquests dos estats com "viu" i "mort". Les regles eren molt senzilles: una casella viva sobreviu només si té dues o tres veïnes vives i una casella morta es converteix en viva si té exactament tres veïnes vives.

Val a dir que les caselles veïnes, al joc de la vida, son les 8 caselles més properes (*entorn de Moore*). En altres autòmats cel·lulars tan sols són veïnes les 4 caselles que es troben a dalt, a baix, a la dreta i a l'esquerra (*entorn de von Neuman*).

La vessant lúdica consisteix en trobar configuracions de caselles que evolucionin de manera complexa, evitant tant l'extinció total de les caselles vives com l'arribar a una configuració estacionària.

Per exemple, a la Figura 10 es pot veure una configuració interessant anomenada *lliscador*. Es desplaça en diagonal per la matriu de caselles. Es pot utilitzar per representar bits d'informació a la computadora universal. S'han descobert altres configuracions que poden actuar com a portes lògiques. Es possible, doncs, fer una configuració que actuï com una computadora universal.

Per assegurar-te que has entès les regles del joc de la vida, fes l'activitat 6.

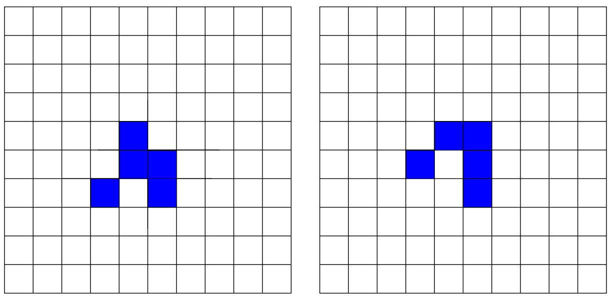

Figura 10: Un lliscador en dos instants diferents

6.3 Creixement logístic

No és difícil modificar el joc de la vida per aconseguir que el nombre de caselles ocupades creixi de manera semblant a la logística. Per exemple, considerem el següent conjunt de regles

- Una casella morta viurà si té dues veïnes o més
- Una casella viva sobreviurà si té dues, tres, quatre o cinc veïnes

És fàcil comprovar que aquest sistema presenta un creixement que és qualitativament similar al logístic. Hi ha molts més conjunts de regles amb el mateix comportament. De fet, el tret més interessant del joc de la vida és la capacitat per crear estructures amb un comportament complex, la qual cosa es perd en els nous conjunts de regles.

Resum

S'han vist tres formes de modelitzar el creixement d'una espècie. Per una banda s'han presentat models intensius, discrets o continus. Per l'altra, s'ha fet una breu introducció als autòmats cel·lulars, que són models discrets i extensius.

Els models intensius discrets es basen en equacions de recurrència i els models intensius continus en equacions diferencials. No obstant, els resultats presenten uns comportaments equivalents — com no podia ser d'una altra manera ja que modelitzen el mateix fenomen —.

Es pot dir que el més interessant del resultat d'una equació, de recurrència o diferencial, és el seu comportament a llarg termini. Per aquest motiu hem classificat aquests comportaments en punts fixos, òrbites i atractors. Si el model depèn d'un paràmetre que pot variar de manera contínua, és important conèixer els valors per als quals es produeixi una bifurcació, o sigui, un canvi qualitatiu en el comportament a llarg termini.

En el cas dels models discrets, s'ha vist el model geomètric. Malgrat el seu comportament monòton es pot modificar per estudiar l'efecte dels factors externs o de les fluctuacions en el nombre descendents. Un refinament més important és la introducció de la dependència en la densitat, que ens porta al model logístic. El model logístic inclou el model geomètric per valors petits del nombre de membres d'una espècie i té, a diferència d'aquest, un comportament raonable a llarg termini.

Una de les característiques més notables del model logístic discret és l'aparició del caos determinista. Per aquest motiu s'ha dedicat un espai per comentar quina és la definició d'aquest fenomen i per comprovar que els seus trets més característics (autosimilitud, impredictibilitat, fractals) són presents a les solucions del model.

Els models discrets tenen el seu equivalent continu. En el cas del model logístic el comportament es molt més simple que el del seu equivalent discret per la qual cosa no són equivalents. Això no vol dir que un sigui més realista que l'altre. En realitat, el model discret implica que la reproducció té lloc en un interval de temps molt curt, la qual cosa pot ser certa per a determinades espècies.

Finalment, s'ha fet una breu explicació del concepte d'autòmat cel·lular. Van sorgir per resoldre problemes fonamentals de la matemàtica discreta però el seu ús s'ha estès a altres camps perquè permet veure en quins casos els trets fonamentals d'un fenomen es deuen a lleis molt simples.

Glossari

computadora universal Es tracta d'una computadora en el sentit de la *màquina de Turing*: un aparell que es capaç de processar informació binària mitjançant un programa arbitrari que també estigui expressat en binari.

fluctuacions Variacions al voltant d'un valor mig, degudes normalment a causes aleatòries.

normalitzat Es diu de la quantitat que es presenta sense dimensions i de forma que quan té valor 1 representa s'ha assolit una certa fita. Per normalitzar una quantitat tan sols cal dividir pel valor que té aquesta fita.

separables Es diu de les equacions diferencial on es possible concentrar tots els termes on apareix la variable independent a una banda i els termes on apareix la variable dependent a l'altre (incloent els diferencials). Les equacions diferencials separables es poden resoldre tan sols fent una integral.

variància Magnitud que dóna una idea de si un conjunt de valors són, en general, a prop o lluny de la seva mitja. Matemàticament,

$$\sigma = \sqrt{< x - < x >>}$$

Referències addicionals

- **Ian Stewart:** *¿Juega Dios a los dados?*. Grijalbo-Mondadori, Barcelona (1991).

  Excel·lent llibre de divulgació científica a on s'expliquen els fonaments matemàtics del caos i els principals camps d'aplicació.

- **Ricard V. Solé i Susanna C. Manrubia:** *Orden y caos en sistemas complejos.* Edicions UPC, Barcelona (1996).

  Llibre sobre caos amb molts apartats referents a les equacions de la Biologia Matemàtica.

- **Jonathan Roughgarden:** *Primer in ecological theory.* Prentice-Hall, Upper Saddle River (1998).

  Llibre de text a on s'exposen els models matemàtics del creixement d'una espècie, entre d'altres.

Activitats

1. Troba el terme general de l'equació de recurrència

$$x_{i+1} = x_i^2.$$

2. A l'extrem orient, on el sistema de cognoms té milers d'anys, es freqüent que totes les persones d'una mateixa ciutat tinguin el mateix cognom. Dóna una explicació per a aquest fenomen.

3. Troba els punts fixos de l'equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a - bx$$

   i discuteix si són estables o inestables.

4. L'any 1950 hi havia a la terra uns 2500 milions de persones mentre que l'any 2000 n'hi havia 6000 milions. Per a l'espècie humana, calcula el factor de creixement *anual* i la taxa de creixement, tenint en compte aquestes dues dades i suposant que el creixement és geomètric.

5. Imagina que el model logístic fos aplicable a l'espècie humana. Tenint en compte que a l'actualitat el creixement de l'espècie humana és lineal, estima la capacitat de la terra pel que fa als éssers humans.

6. Tenint en compte les regles del joc de la vida, dibuixa les diferents configuracions que adopta el "lliscador" a mida que es desplaça per la matriu de caselles. Quantes n'hi ha?

7. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.

Exercicis d'autocomprovació

1. Quina de les següents afirmacions referents als punts fixos és certa

   (a) $x = 0$ sempre és un punt fix

   (b) Es extremadament improbable que un sistema es trobi en un punt fix inestable

   (c) Una equació de recurrència no pot presentar simultàniament punts fixos estables i inestables

   (d) Tota equació de recurrència presenta punts fixos

2. L'estocasticitat ambiental es deguda a

   (a) Factors externs a l'espècie

   (b) Factors que no es poden determinar

   (c) Factors aleatoris que tenen a veure amb la pròpia espècie

   (d) Tots els factors esmentats anteriorment

3. A un mateix edifici hi viuen 5 parelles. Tres tenen 1 fill, una en té 2 i una altra no en tenen cap. Podem dir que la variància i del nombre de fills per parella és

   (a) 3/5

   (b) 1/5

   (c) 2/5

   (d) Cap de les anteriors

4. Una de les característiques d'un fractal és que

   (a) La seva dimensió de contingut no coincideix amb la seva dimensió topològica

   (b) Té una dimensió de contingut fraccionària

   (c) Te dimensions de contingut que sempre són més grans que 1

   (d) Totes les característiques anteriors

5. La relació entre el factor de creixement i la taxa de creixement

(a) És igual a 1 ja que ambdues coses són el mateix
(b) El factor de creixement és l'exponencial de la taxa de creixement
(c) Depèn del model que s'estigui emprant
(d) Depèn del interval de temps pel qual estigui definit el factor de creixement

6. Quina de les següents característiques no pot tenir un autòmat cel·lular

(a) Caselles hexagonals
(b) Que l'estat d'una casella depengui del seu estat fa 5 torns
(c) Que l'estat d'una casella depengui del d'una casella situada a 5 caselles de distància
(d) Qualsevol de les anteriors

Solucions dels exercicis d'autocomprovació

1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (a) 5. (d) 6. (c)