Taller de modelització medi–ambiental

Relació entre espècies

Juan Carlos Cañadas* i Jordi Sellarès†

27 de febrer de 2009

Juan Carlos Cañadas
Barcelona (1963)
Doctor en Física
Dept. de Física i Eng. Nuclear (ETSEIAT)
Universitat Politècnica de Catalunya

Jordi Sellarès
Barcelona (1969)
Doctor en Física
Dept. de Física i Eng. Nuclear (EUETIT)
Universitat Politècnica de Catalunya

*juan.carlos.canadas a upc.es
†jordi.sellares a upc.es

Índex

Presentació

Ja hem estudiat els models de creixement d'una espècie. Hem intentat incloure en aquests models la variabilitat de les condicions externes i l'efecte que té l'augment de membres de la pròpia espècie sobre el seu creixement.

Fixem-nos que ambdós casos representen situacions oposades. En el primer cas, les condicions externes, l'efecte del nombre de membres de l'espècie és nul. Difícilment el fet que hi hagi més o menys membres farà que un any de sequera es converteixi en un any plujós.

En el segon cas, la dependència amb la densitat, l'efecte no depèn de qualsevol altra cosa que no sigui del nombre de membres de l'espècie i, per tant, podem implementar-lo completament afegint nous termes a l'equació que ens determina el creixement de l'espècie.

Molts factors, però, no encaixen ben bé en cap d'aquests dos casos. Depenen de moltes altres coses a banda del nombre de membres de l'espècie, però tampoc en són completament independents.

El factor més important d'aquest conjunt és la influència de la resta d'espècies. Cadascuna de les altres espècies que conviuen amb la que estem estudiant tindrà els seus propis factors (externs, densitat, ...) que determinarà en gran mesura el seu creixement. També hi haurà, però, una influència mútua entre les espècies que competeixen per una mateixa font de recursos o entre una espècie i la que s'alimenta d'ella.

La forma d'implementar aquesta dependència serà considerar una equació per a cada espècie i afegir-hi termes acoblats, que donin compte de la influència entre aquestes dues espècies. La forma d'aquests termes dependrà del tipus de relació entre les dues espècies i el valor dels paràmetres intentarà quantificar la intensitat d'aquesta relació.

Unes paraules sobre les matemàtiques que s'empraran. Essencialment, són les mateixes que es van introduir per estudiar el creixement d'una espècie. La principal diferència serà ara treballarem amb més d'una espècie (dues, per no complicar l'exposició). En aquest sentit caldrà generalitzar molts dels conceptes coneguts en una dimensió per treballar en un espai de variables amb vàries dimensions.

No obstant, podem anticipar que, com passava en el creixement d'una sola espècie, la principal finalitat no serà seguir amb detall l'evolució del nombre de membres de les espècies sinó veure quin és el destí final del sistema. Es a dir, conèixer quins són els atractors del sistema i de quin tipus són.

Objectius

- Estendre els conceptes de modelització mitjançant equacions de recurrència i mitjançant equacions diferencials a espais de vàries variables.
- Distingir entre modelització intensiva i extensiva, quan estudiem més d'una espècie.
- Ampliar els models de creixement d'una espècie per tenir en compte relacions de diferent tipus amb altres espècies.
- Reconèixer el significat dels diferent paràmetres que caracteritzen la interacció entre dues espècies.
- Normalitzar sistemes d'equacions per facilitar el seu estudi.

Esquema

1. Modelització mitjançant sistemes d'equacions de recurrència
   (a) Punts fixos, òrbites i atractors per a més d'una variable
   (b) Tipus de representacions dels resultats.
2. Models discrets de relació entre espècies
   (a) Model discret de Lotka–Volterra
   (b) Model discret presa–depredador
3. Modelització mitjançant autòmats cel·lulars
4. Modelització mitjançant equacions diferencials
5. Models continus de relació entre espècies
   (a) Model continu de Lotka–Volterra
   (b) Model continu presa–depredador

1 Modelització mitjançant sistemes d'equacions de recurrència

Ja coneixem el concepte *d'equació de recurrència* i de *terme general*. En aquesta unitat volem seguir l'evolució de vàries espècies. Ens farà falta una variable i una equació de recurrència per a cadascuna. En general, hi haurà un influència entre espècies i, per aquest motiu, les equacions de recurrència estaran acoblades (veure glossari)

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = g(x_i, y_i)$$

Per simplificar l'exposició ens hem limitat al cas de dues espècies. La generalització per a més espècies és immediata.

Ens caldrà conèixer el nombre inicial de membres de cada espècie, x_0 i y_0. Introduint aquests nombres a les expressions anteriors i repetint el procés obtindrem dues sèries

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$
$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$$

Cada subíndex es refereix a un instant de temps. Aquestes sèries tan sols tenen significat si coneixem l'interval de temps Δt que hi ha entre dos termes consecutius.

El fet de tenir més d'una variable amplia els tipus de representació gràfica que es poden fer per visualitzar els resultats. Podem continuar representant el valor de les variables en funció del temps (o de l'índex). Aquest tipus de representació ens dóna una bona idea de com evolucionen les espècies amb el temps (veure Fig. 1)

Alternativament, podem construir una sèrie de punts

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

i representar-los. Amb això obtindrem una trajectòria (veure glossari) a *l'espai de variables* (veure Fig. 2). Aquest tipus de representació és especialment adequada per manifestar la relació entre les dues magnituds, encara que l'evolució amb el temps és perd una mica de vista.

Un dels avantatges de representar les trajectòries és que resulta aclaridor representar-ne moltes a la mateixa gràfica, amb diferents valors inicials. Si en dibuixem prous, ens podem fer una idea de quina forma tindria una trajectòria que s'iniciés en qualsevol punt de la gràfica (recordem que cada punt representa un estat del sistema). A

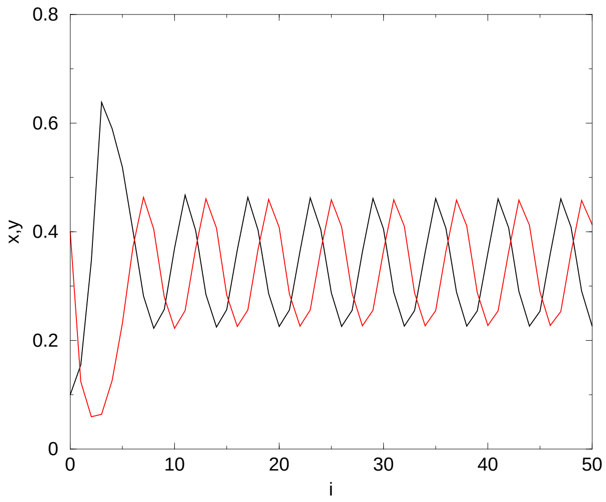

Figura 1: Exemple d'evolució temporal

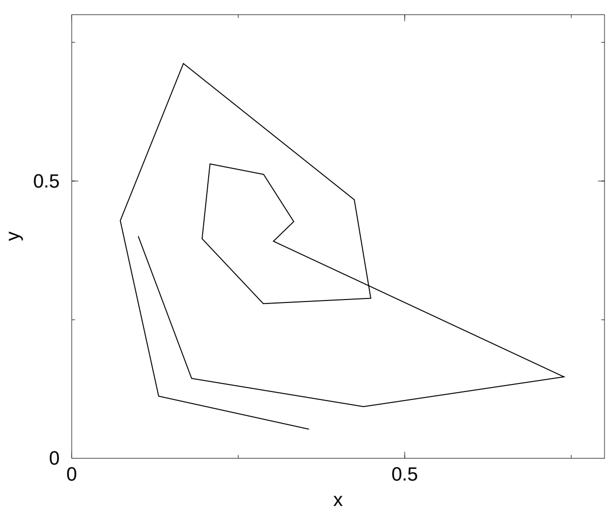

Figura 2: Exemple de trajectòria

més, ens pot servir per identificar característiques qualitatives de les solucions, com l'existència de punts fixos, òrbites o atractors.

Un punt fix és un estat del sistema que es pot mantenir indefinidament. La condició matemàtica en el cas de dues variables és

$$f(x^*, y^*) = x^* \tag{1}$$

$$g(x^*, y^*) = y^* \tag{2}$$

Detectarem la presència d'un punt fix a una gràfica de trajectòries perquè vàries trajectòries aniran cap a aquest punt (o en sortiran).

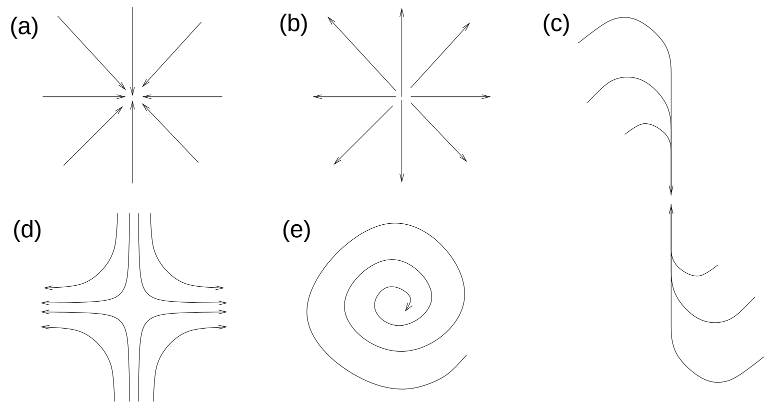

Figura 3: Diferents tipus de punt fix i punt de sella

Es pot discutir analíticament l'estabilitat del punt fix estudiant els valors λ_i. Aquests valors són les dues solucions del problema de *valors propis*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Per a que el punt fix sigui estable, la part real de totes les λ_i ha de ser negativa. Si n'hi ha alguna de positiva llavors el punt és inestable.

De nou, la generalització a més de dues variables és immediata. No ho és, en canvi, la classificació dels punts fixos en funció de la forma de les trajectòries. Per una banda, tan sols hi ha un tipus de punt fix quan tenim una variable. Per l'altra, apareixen nous tipus a mida que augmentem el nombre de variables.

El motiu és fàcil d'entendre. Quan hi ha una sola variable les trajectòries tan sols es poden acostar al punt fix en una direcció. Si hi ha dues variables, les trajectòries tenen més opcions. Poden acostar-se o allunyar-se en qualsevol direcció. Això és el que es coneix com a *node estable* (Fig 3a) o *node inestable* (Fig. 3b). També pot passar que les trajectòries tan sols puguin acostar-se (o allunyar-se) al punt fix en una direcció determinada (Fig. 3c). Llavors es diu que el node és *degenerat*. Un tipus molt especial de punt fix és el *punt de sella* (Fig. 3d). Es tracta d'un punt fix estable en unes direccions i inestable en unes altres. Una altra forma d'acostar-se (o allunyar-se) al punt fix és en *espiral* (Fig. 3e).

En més dimensions apareixen nous tipus de punt fix. Per exemple, en tres dimensions tenim dos tipus diferents de punt de sella.

Aquesta classificació es basa en el comportament d'un conjunt de mesura no nul·la (veure glossari) de trajectòries.

Després d'haver repassat el que és un punt fix i quines novetats apareixen en espais de més d'una dimensió, es pot fer l'activitat 1.

El concepte *d'òrbita* no canvia gaire respecte a una dimensió. Els mateixos estats del sistema es van repetint al llarg del temps, a partir d'un cert terme (Fig. 4).

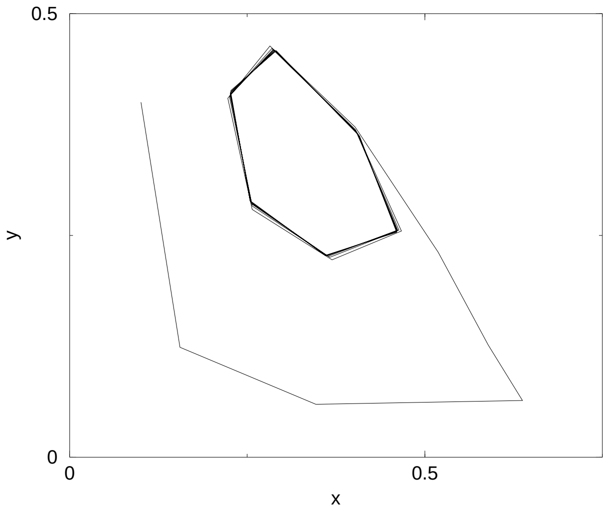

Figura 4: Exemple d'òrbita

Tampoc és molt diferent el concepte *d'atractor*. Quan hi ha un atractor, la trajectòria està continguda en una regió de dimensió superior a 1. A la figura 5 podem veure un exemple de trajectòria que forma un atractor.

2 Models discrets

2.1 Competència pels mateixos recursos

Partim del model logístic

$$N_{i+1} = N_i + (R-1)(1-\frac{N_i}{K})N_i. \tag{4}$$

Recordem que segons aquest model l'espècie està caracteritzada per dos paràmetres: el factor de creixement R i la capacitat K.

Considerem ara dues espècies descrites pel model logístic i que no competeixen per una mateixa font de recursos. Senzillament, escriurem una equació logística per a cada espècie

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (R_x - 1)(1-\frac{N_{x,i}}{K_x})N_{x,i},$$

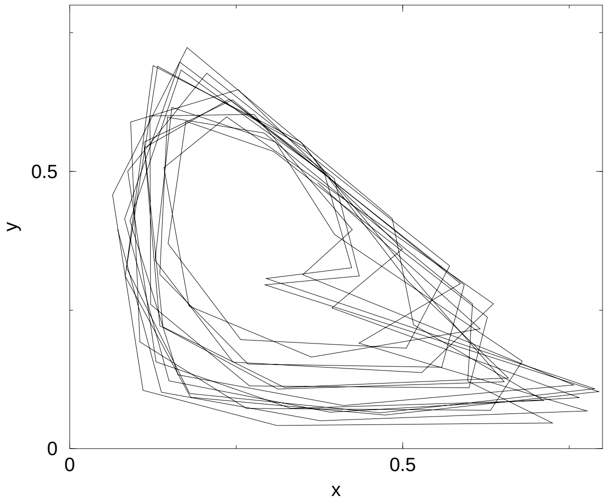

Figura 5: Exemple d'atractor

$$N_{y,i+1} = N_{y,i} + (R_y - 1)(1 - \frac{N_{y,i}}{K_y})N_{y,i}.$$

El fet que dues espècies competeixin pels mateixos recursos, implica que hi haurà una dificultat afegida per reproduir-se. La millor manera de modelitzar això és acoblant les dues equacions, afegint un terme que depengui del nombre de membres de l'altra espècie

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (R_x - 1)(1 - \frac{N_{x,i} - AN_{y,i}}{K_x})N_{x,i}, \tag{5}$$

$$N_{y,i+1} = N_{y,i} + (R_y - 1)(1 - \frac{N_{y,i} - BN_{x,i}}{K_y})N_{y,i}. \tag{6}$$

Els factors A i B representen la influència mútua entre les dues espècies.

Amb aquestes equacions ja podríem anar treballant, però per comoditat treballarem sempre amb equacions normalitzades. En acabar els càlculs recuperarem les quantitats reals multiplicant per la quantitat emprada per normalitzar. Utilitzarem dues quantitats Q_x i Q_y definides per

$$Q_x \equiv \frac{K_x R_x}{R_x - 1},$$

$$Q_y \equiv \frac{K_y R_y}{R_y - 1},$$

per normalitzar les variables N_x i N_y. Aquestes quantitats Q representen el límit de validesa del model. Quan $N > Q$ el model dóna resultats absurds. Les variables normalitzades vindran donades per

$$x_i \equiv \frac{N_{x,i}}{Q_x},$$

$$y_i \equiv \frac{N_{y,i}}{Q_y}.$$

Les Eqs. 5 i 6 queden, en funció d'aquestes variables com

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - \alpha y_i)x_i,$$

$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i - \beta x_i)y_i.$$

La relació que hi ha entre les variables α i β d'aquesta equació i les variables A i B és

$$A = \frac{Q_x}{Q_y}\alpha \tag{7}$$

$$B = \frac{Q_y}{Q_x}\beta \tag{8}$$

Hem d'anar, doncs, amb compte quan juguem amb les equacions normalitzades. Si variem els factors de creixement R també estem modificant el significat (encara que no canviem el seu valor) dels paràmetres que determinen la influència entre les dues espècies.

Com sempre, es comença amb uns valors inicials i a partir d'aquí es van obtenint els valors x_i i y_i. Després podem trobar els valors reals multiplicant cada variable per la seva Q. Pots practicar una mica fent l'activitat 2.

2.2 Relació presa–depredador

Un altre cop, utilitzem el model logístic donat per l'Eq. 4 per descriure una espècie que viu d'un recurs renovable però limitat. Aquesta vegada suposarem que hi ha un depredador que té a aquesta espècie com a presa.

Anomenem A a la probabilitat de que en un interval Δt de temps *un* depredador capturi *una* presa. En aquest cas caldrà modificar l'equació 4 afegint un terme que comptabilitzi el nombre d'exemplars capturats

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (R_x - 1)(1 - \frac{N_{x,i}}{K_x})N_{x,i} - AN_{x,i}N_{y,i} \tag{9}$$

Pel que fa al depredador suposarem que cada membre té una certa probabilitat δ de morir a cada torn i que fa falta un cert nombre de captures $1/B$ per a que pugui generar un nou depredador. Això ens suggereix l'expressió

$$N_{y,i+1} = ABN_{x,i}N_{y,i} + (1 - \delta)N_{y,i} \tag{10}$$

Si volem, podem normalitzar aquestes equacions. Podem normalitzar la presa mitjançant les definicions

$$Q_x \equiv \frac{K_x R_x}{R_x - 1},$$

$$x_i \equiv \frac{N_{x,i}}{Q_x},$$

Discutim la normalització de la segona espècie, que, a diferència de la primera, no té ni K ni R. De fet, l'Eq. 10 és lineal en N_y. Això vol dir que podem escollir qualsevol quantitat C per normalitzar el nombre de depredadors

$$y_i \equiv \frac{N_{y,i}}{C}.$$

Aplicant aquestes definicions les Eqs. 9 i 10 es converteixen en

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i)x_i - \alpha x_i y_i, \tag{11}$$

$$y_{i+1} = \alpha\beta x_i y_i + (1 - \delta)y_i. \tag{12}$$

La relació entre els paràmetre α i β de les equacions normalitzades i els paràmetres A i B de les equacions sense normalitzar ve donada per

$$A = \frac{1}{C}\alpha$$

$$B = \frac{C}{Q_x}\beta$$

Per simplificar l'estudi d'aquestes equacions podem treballar amb un model menys general però més senzill. Suposant $\delta = 1$ i $\alpha = R_x$ s'obté

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_x\beta x_i y_i$$

Per fixar idees pots realitzar les activitats 3 i 4.

2.3 Modelització mitjançant autòmats cel·lulars

Podem estudiar la relació entre preses i depredadors amb un autòmat cel·lular. L'autòmat estarà format per un conjunt de caselles que podran estar en 3 estats diferents: buid, presa i depredador. Les caselles evolucionaran per torn d'acord amb les següents regles

1. A cada torn, cada una de les preses es mou a l'atzar a una de les caselles properes buides.
   (a) Si la seva edat arriba a l'edat de reproducció, llavors és converteix en dues preses d'edat 0. Una a la casella inicial i l'altra a la casella final.
   (b) Si no hi ha caselles properes buides, no es pot moure ni reproduir.
2. A cada torn, cada un dels depredadors es mou a l'atzar a una casella propera ocupada per una presa (eliminant-la!), o si no n'hi ha cap a una casella propera buida (també a l'atzar).
   (a) La reproducció dels depredadors és com la de les preses.
   (b) Si totes les caselles properes estan ocupades per depredadors, no es poden moure ni reproduir.
   (c) el depredador es eliminat si passa un cert nombre de torns sense fer una captura.

Els paràmetres del model són: nombre inicial de preses i depredadors, edat de reproducció de preses i depredadors i període de inanició.

Tot i que aquest autòmat no és del tot equivalent al model de la Secció 2.2, presenta un comportament qualitativament similar.

3 Modelització mitjançant sistemes d'equacions diferencials

La principal diferència entre els models on el temps està dividit en intervals discrets i els models on el temps és una variable contínua és que els primers s'expressen habitualment en forma d'equació de recurrència mentre que els segons s'escriuen en forma d'equacions diferencials.

Per poder tractar vàries variables ens cal un sistema d'equacions diferencials. Per a dues variables

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Una altra vegada, ens farà falta conèixer el nombre inicial de membres cada espècie, x_0 i y_0. Això són el que s'anomenen *condicions inicials* i són un requisit indispensable per obtenir una solució, ja sigui analíticament o numèricament, de la forma

$$x(t)$$
$$y(t)$$

Podem representar aquestes funcions de la manera habitual, la variable independent a l'eix d'abscisses i la variable independent a l'eix d'ordenades. Alternativament podem representar la trajectòria. Per fer-ho, s'ha d'eliminar la variable t de les solucions per obtenir una funció de la forma

$$y(x)$$

Cada tipus de representació té els seus avantatges i els seus inconvenients. En el primer cas es fàcil observar l'evolució temporal. En el segon és posa més en relleu la relació entre les dues variables.

Tant la definició de punt fix com la condició matemàtica és igual que en el cas de les equacions de recurrència. Les Eqs. 1 i 2 són, doncs, vàlides en el cas de sistemes d'equacions diferencials. També es pot discutir l'estabilitat dels punts fixos a partir de les solucions de l'Eq. 3.

Una representació interessant és dibuixar vàries trajectòries, amb condicions inicials diferents, a la mateixa gràfica. Aquest tipus de representació ens permet visualitzar la posició dels punts fixos, òrbites i atractors. La seva definició és la mateixa que en el cas de les equacions de recurrència. També és vàlida la classificació de punts fixos de la Fig. 3.

4 Models continus

Els models que s'han vist a la Secció 2 també tenen la seva versió en forma d'equacions diferencials. Com passava en els models de creixement d'una sola espècie, hi ha diferències importants en el comportament de les solucions, especialment en el cas presa–depredador.

4.1 Competència pels mateixos recursos

Les equacions són, sense normalitzar,

$$\frac{dN_x}{dt} = r_x \frac{K_x - N_x - AN_y}{K_x} N_x$$

$$\frac{dN_y}{dt} = r_y \frac{K_y - N_y - BN_x}{K_y} N_y$$

on A i B tenen el mateix significat i les mateixes unitats que a les Eqs. 7 i 8. La relació entre els factors de creixement (R_x i R_y) i les taxes de creixement (r_x i r_y) és l'habitual

$$r = \frac{\ln R}{\Delta t} \tag{13}$$

En el cas continu, les equacions queden més senzilles si normalitzem emprant la capacitat K per comptes de la quantitat Q que s'utilitza en el cas discret. Per tant, normalitzem les variables N_x i N_y fent

$$x = \frac{N_x}{K_x}$$

$$y = \frac{N_y}{K_y}$$

obtenim les equacions

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x - ay)x$$

$$\frac{dy}{dt} = r_y(1 - y - bx)y$$

on les equacions anàlogues a les Eqs. 7 i 8 són

$$A = \frac{K_x}{K_y} a$$

$$B = \frac{K_y}{K_x} b$$

Ara, aniria bé que fessis l'activitat 5.

4.2 Relació presa–depredador

La versió contínua sense normalitzar és

$$\frac{dN_x}{dt} = r \frac{K - N_x}{K} N_x - A' N_x N_y \tag{14}$$

$$\frac{dN_y}{dt} = A' B N_x N_y - d N_y \tag{15}$$

A' és la probabilitat per unitat de temps de que un depredador capturi una presa. Podem relacionar A' amb la variable A de l'Eq. 9

$$A' = \frac{A}{\Delta t}$$

En canvi, B té el mateix significat que a l'Eq. 10. És l'invers del nombre de captures que ha de fer el depredador per reproduir-se. La relació entre d i la variable δ del model discret és

$$d = \frac{\delta}{\Delta t}$$

ja que en aquest cas es tracta de la probabilitat de mort per unitat de temps.

La relació entre la taxa de creixement r i el factor de creixement R de l'Eq. 11 és la mateixa que la de l'Eq. 13.

Si normalitzem les variables N_x i N_y fent

$$x = \frac{N_x}{K}$$

$$y = \frac{N_y}{C}$$

obtenim les equacions

$$\frac{dx}{dt} = r(1-x)x - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = abxy - dy$$

La relació entre els paràmetres d'una i altra equació ve donada per

$$A' = \frac{a}{C}$$

$$B = \frac{C}{K}b$$

Per reforçar tota aquesta explicació, pot aplicar-la a l'activitat 6.

Un fet curiós és que aquest model continu dóna uns resultats que no són similars als del seu equivalent discret. En canvi, si treiem la part logística de l'Eq. 14, per exemple fent el límit quan k tendeix a infinit, sí que obtenim resultats semblants als del model discret.

Resum

Per entendre el creixement d'una espècie cal, en primer lloc, tenir una idea clara de quin és el seu creixement quan el nombre de membres encara no és un problema per aconseguir recursos. Després s'ha de concretar a partir de quin moment la densitat de membres comença a jugar un paper. Aquests són els factors que té en compte el model logístic. Depenen de les característiques de la pròpia espècie i també de les condicions externes.

Ara bé, aquest model és insuficient quan parlem de factors que afecten l'espècie però que, alhora, també en depenen. El més important d'aquests factors és la relació amb altres espècies.

Per poder modelitzar la relació entre espècies cal considerar les equacions de cadascuna de les espècies implicades i acoblar-les amb una interacció. La forma concreta d'aquesta interacció depèn del tipus de relació que s'estableixi. Pot ser una relació de competència per uns recursos renovables però que no estan disponibles en quantitats il·limitades. També pot ser que una de les espècies sigui l'aliment de l'altra. Encara existeixen altres tipus de relació, com la simbiosi o la relació paràsit–hoste, que no s'han tractat.

A l'igual que quan parlàvem del creixement d'una sola espècie, podem modelitzar el temps de manera discreta o contínua. En qualsevol cas, al considerar vàries espècies passem a treballar amb sistemes d'equacions. La major part dels conceptes emprats en una variable són vàlids quan en tenim vàries. Uns pocs són lleugerament diferents, la qual cosa s'haurà de tenir en compte per planificar els càlculs. El més notable és que amb vàries variables s'amplia el nombre de representacions gràfiques possibles.

Un cas apart és el dels models extensius. Si utilitzem un autòmat cel·lular tan sols caldrà afegir nous tipus de caselles, que representaran diferents espècies. També s'hauran d'ampliar les regles per modelitzar la interacció entre aquestes espècies.

S'ha posat una especial atenció en la qüestió de la normalització de les equacions. Encara que a primer cop de vista pot semblar una complicació, el fet de tenir menys paràmetres ens permet extreure conclusions generals més fàcilment.

Glossari

acoblades Es diu de les equacions que tenen variables en comú.

conjunt de mesura nul·la Per exemple, un segment contingut en un rectangle és un conjunt de mesura nul·la, malgrat tenir infinits punts, ja que la seva superfície és infinitesimal en comparació amb la del rectangle.

trajectòria Lloc geomètric format pels punts el valor dels quals assoleix el sistema.

Referències addicionals

- **Ricard V. Solé i Susanna C. Manrubia:** *Orden y caos en sistemas complejos.* Edicions UPC, Barcelona (1996).

  Llibre sobre caos amb molts apartats referents a les equacions de la Biologia Matemàtica.

- **Jonathan Roughgarden:** *Primer in ecological theory.* Prentice-Hall, Upper Saddle River (1998).

  Llibre de text sobre Biologia Matemàtica.

- **Alfred J. Lotka:** *Elements of mathematical biology.* Dover, New York (1956).

  Un dels llibres clàssics sobre el tema encara que potser és massa ambiciós en algunes parts. Té capítols interessants.

Activitats

1. Troba els punts fixos del sistema d'equacions de recurrència
$$x_{i+1} = -7x_i + 3(5 - x_i)x_i + 4x_iy_i$$
$$y_{i+1} = x_i(2 - y_i)y_i + y_i$$
i discuteix la seva estabilitat.

2. Dues espècies que competeixen per una mateixa font de recursos estan descrites pel sistema d'equacions d'equacions de recurrència
$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (0.7 - 1)\left(1 - \frac{N_{x,i} - 0.03N_{y,i}}{1000}\right)N_{x,i}$$
$$N_{y,i+1} = N_{y,i} + (0.5 - 1)\left(1 - \frac{N_{y,i} - 0.001N_{x,i}}{100}\right)N_{y,i}$$
Normalitza aquest sistema d'equacions.

3. Consulta un llibre de Zoologia o una enciclopèdia. Amb aquesta informació, enuncia 5 parelles d'espècies que tinguin una relació presa-depredador.

4. El següent sistema d'equacions normalitzades descriu la relació entre una presa i el seu depredador
$$x_{i+1} = 1.04(1 - x_i)x_i - 1.5x_iy_i$$
$$y_{i+1} = 1.5 \cdot 0.01x_iy_i + 0.01y_i$$
En un cert instant de temps, s'assoleixen els valors $x = 0.2$ i $y = 0.05$. Si per normalitzar el depredador s'ha escollit $C = 750$ i es coneix que la capacitat de la presa es $K_x = 750$, quin és el nombre d'exemplars de cada espècie? Quant val la probabilitat A de que un depredador capturi una presa en el transcurs d'un torn?

5. Escriu el sistema d'equacions diferencials sense normalitzar que correspon a aquest sistema d'equacions normalitzades
$$\frac{dx}{dt} = 0.8(1 - x - 0.01y)x$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.7(1 - y - 0.02x)y$$
si les capacitats de les espècies són $K_x = 2000$ i $K_y = 1000$.

6. Si normalitzem aquest sistema d'equacions diferencials, que descriuen la interacció entre una presa i un depredador,

$$\frac{dN_x}{dt} = 0.5 \cdot \frac{750 - N_1}{750} N_x - 0.01 N_x N_y$$

$$\frac{dN_y}{dt} = 0.01 \cdot 0.02 N_x N_y - 0.1 N_y$$

quins són els paràmetres α i β que en resultarien? Escriu un sistema d'equacions de recurrència que en sigui equivalent, suposant que les unitats de temps de les equacions anteriors són anys. Especifica quin valor de Δt has escollit.

7. Realitza les activitat descrites al guió de pràctiques d'aquesta unitat.

Exercicis d'autocomprovació

1. Els paràmetres A i B que corresponen al sistema normalitzat

$$x_{i+1} = 1.7(1 - x_i - 0.02y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = 1.5(1 - y_i - 0.01x_i)y_i$$

són, si $K_x = 1000$ i $K_y = 100$,

   (a) $A = 0.13$ $B = 1.1 \times 10^{-3}$
   (b) $A = 0.17$ $B = 1.2 \times 10^{-3}$
   (c) $A = 0.16$ $B = 1.2 \times 10^{-3}$
   (d) Cap de les anteriors

2. Els paràmetres α i β del sistema

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (1.05 - 1)(1 - \frac{N_{x,i}}{500})N_{x,i} - 0.001N_{x,i}N_{y,i}$$

$$N_{y,i+1} = 0.001 \cdot 0.03N_{x,i}N_{y,i} + (1 - 0.01)N_{y,i}$$

un cop normalitzat són (si emprem la mateixa normalització per a les dues variables)

   (a) $\alpha = 0.001$ $\beta = 0.03$
   (b) $\alpha = 10.5$ $\beta = 30$
   (c) $\alpha = 0.001$ $\beta = 30$
   (d) $\alpha = 10.5$ $\beta = 0.03$

3. El sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = xy - 20$$

té com a punts fixos

(a) $x = 8$ $y = 10$
(b) $x = 4$ $y = 5$
(c) $x = 4$ $y = 7$
(d) $x = 2$ $y = 2.5$

4. Si volem normalitzar la variable N_y del següent sistema

$$\frac{dN_x}{dt} = 0.8(1 - \frac{N_x + 2.0N_y}{1000})N_x$$

$$\frac{dN_y}{dt} = 0.6(1 - \frac{N_y + 0.25N_x}{1100})N_y$$

caldrà utilitzar la quantitat

(a) 1000
(b) 1100
(c) 2250
(d) 2933

5. En un model presa–depredador hem aplicat la mateixa normalització per a la presa que per al depredador. Si la capacitat de la presa és $K_x = 1000$, $y = 0.3$ vol dir

(a) 3000
(b) 300
(c) 30
(d) 3

6. Si en un model presa–depredador continu $A' = 0.01$, llavors en un model discret a on $\Delta t = 0.1$, A valdrà

(a) 0.1
(b) 0.01
(c) 0.001
(d) 0.0001

Solucions dels exercicis d'autocomprovació

1. (c) 2. (d) 3. (b) 4. (a) 5. (b) 6. (c)