

# Taller de modelització medi ambiental

Juan Carlos Cañadas – Jordi Sellarès

27 de febrer de 2009



# Índex

<b>1 Models de creixement</b>	<b>6</b>
Presentació . . . . .	7
Objectius . . . . .	8
Esquema . . . . .	9
1.1 Modelització mitjançant equacions de recurrència . . . . .	10
1.1.1 Concepte . . . . .	10
1.1.2 Propietats . . . . .	10
1.2 Models independents de la densitat . . . . .	12
1.2.1 Model geomètric . . . . .	12
1.2.2 Estocasticitat ambiental . . . . .	13
1.2.3 Estocasticitat demogràfica . . . . .	14
1.3 Models dependents de la densitat . . . . .	15
1.3.1 Model logístic . . . . .	16
1.3.2 Caos determinista al model logístic . . . . .	18
1.4 Modelització mitjançant equacions diferencials . . . . .	20
1.4.1 Concepte . . . . .	20
1.4.2 Propietats . . . . .	21
1.5 Versió contínua dels models de creixement . . . . .	21
1.5.1 Model exponencial . . . . .	21
1.5.2 Model logístic . . . . .	22
1.6 Modelització mitjançant autòmats cel·lulars . . . . .	23
1.6.1 Concepte . . . . .	23
1.6.2 El joc de la vida . . . . .	24
1.6.3 Creixement logístic . . . . .	25
Resum . . . . .	26
Glossari . . . . .	28
Referències addicionals . . . . .	29

Activitats . . . . .	30
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	31
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	33
<b>2 Relació entre espècies</b>	<b>34</b>
Presentació . . . . .	35
Objectius . . . . .	37
Esquema . . . . .	38
2.1 Modelització mitjançant sistemes d'equacions de recurrència . . .	39
2.2 Models discrets . . . . .	42
2.2.1 Competència pels mateixos recursos . . . . .	42
2.2.2 Relació presa–depredador . . . . .	44
2.2.3 Modelització mitjançant autòmats cel·lulars . . . . .	45
2.3 Modelització mitjançant sistemes d'equacions diferencials . . . .	46
2.4 Models continus . . . . .	47
2.4.1 Competència pels mateixos recursos . . . . .	47
2.4.2 Relació presa–depredador . . . . .	48
Resum . . . . .	50
Glossari . . . . .	51
Referències addicionals . . . . .	52
Activitats . . . . .	53
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	55
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	57
<b>3 Destrucció de l'hàbitat</b>	<b>58</b>
Presentació . . . . .	59
Objectius . . . . .	60
Esquema . . . . .	61
3.1 Concepte de percolació . . . . .	62
3.2 La percolació com a fenomen crític . . . . .	64
3.2.1 Transicions de fase de primer i segon ordre . . . . .	64
3.2.2 Fenòmens crítics . . . . .	65
3.2.3 Aplicació a la percolació . . . . .	67
3.3 Model d'autòmat cel·lular per a la destrucció de l'hàbitat . . . . .	68
3.4 Efectes de la fragmentació de l'hàbitat . . . . .	69
Resum . . . . .	72

Glossari . . . . .	73
Referències addicionals . . . . .	74
Activitats . . . . .	75
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	76
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	78
<b>4 Difusió de contaminants a l'atmosfera</b>	<b>79</b>
Presentació . . . . .	80
Objectius . . . . .	81
Esquema . . . . .	82
4.1 L'atmosfera . . . . .	84
4.1.1 Zones de l'atmosfera . . . . .	84
4.1.2 Composició de l'aire . . . . .	86
4.1.3 La contaminació atmosfèrica . . . . .	86
4.1.4 Efectes de la contaminació atmosfèrica . . . . .	88
4.2 Meteorologia relacionada amb la contaminació atmosfèrica . . . . .	91
4.2.1 El vent . . . . .	92
4.2.2 La pressió atmosfèrica . . . . .	92
4.2.3 Els núvols . . . . .	93
4.2.4 La humitat . . . . .	93
4.2.5 La inversió tèrmica . . . . .	94
4.3 Transport de contaminació a l'atmosfera . . . . .	94
4.3.1 Escales de transport a l'atmosfera . . . . .	94
4.3.2 Fenòmens que intervenen en el transport de contaminants	95
4.4 Models matemàtics de la dispersió de contaminants . . . . .	100
4.4.1 Tipus de models . . . . .	101
4.4.2 Models de difusió atmosfèrica . . . . .	102
4.4.3 La solució gaussiana . . . . .	103
Resum . . . . .	106
Glossari . . . . .	108
Referències addicionals . . . . .	109
Activitats . . . . .	110
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	111
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	113

<b>5 Difusió de contaminants al sòl</b>	<b>114</b>
Presentació . . . . .	115
Objectius . . . . .	116
Esquema . . . . .	117
5.1 Radioactivitat . . . . .	118
5.1.1 Els processos de desintegració . . . . .	118
5.1.2 Fonts radioactives d'origen natural . . . . .	118
5.1.3 Fonts radioactives d'origen humà. Protecció dels seus efectes	119
5.1.4 Model de desintegració simple de materials radioactius . .	121
5.2 Difusió de contaminants radioactius al sòl . . . . .	121
5.2.1 Càlcul de la concentració . . . . .	122
5.2.2 Resolució del sistema pel mètode d'Euler . . . . .	125
5.2.3 Exemple representatiu i validesa del model . . . . .	126
Resum . . . . .	127
Glossari . . . . .	128
Referències addicionals . . . . .	129
Activitats . . . . .	130
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	131
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	132
<b>6 Difusió de contaminants al medi aquàtic</b>	<b>133</b>
Presentació . . . . .	134
Objectius . . . . .	135
Esquema . . . . .	136
6.1 El sistema d'aigües superficials . . . . .	137
6.1.1 El cicle hidrològic . . . . .	137
6.1.2 Usos de l'aigua . . . . .	137
6.1.3 La qualitat de l'aigua . . . . .	138
6.2 Concentració dels contaminants a l'aigua . . . . .	140
6.2.1 Càlcul de la concentració a rius . . . . .	141
6.2.2 Càlcul de la concentració a llacs, estuaris i mars . . . . .	141
6.2.3 Vies de dispersió dels contaminants . . . . .	142
6.2.4 Rang de validesa del model . . . . .	143
Resum . . . . .	144
Glossari . . . . .	145
Referències addicionals . . . . .	146

Activitats . . . . .	147
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	148
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	149
<b>7 Metabolisme i cadenes tròfiques</b>	<b>150</b>
Presentació . . . . .	151
Objectius . . . . .	152
Esquema . . . . .	153
7.1 Models lineals . . . . .	154
7.2 Modelització del metabolisme d'una vaca . . . . .	156
7.3 Modelització d'una cadena tròfica . . . . .	158
7.3.1 Model lineal . . . . .	158
7.3.2 Més enllà del model lineal . . . . .	160
Resum . . . . .	162
Glossari . . . . .	163
Referències addicionals . . . . .	164
Activitats . . . . .	165
Exercicis d'autocomprovació . . . . .	166
Solucions dels exercicis d'autocomprovació . . . . .	167

# **Unitat 1**

## **Models de creixement**



## Presentació

El bacteri *escherichia coli* es divideix cada vint minuts. Podem començar amb 100 bacteris i tenir a les trenta-dues hores tot el món cobert d'una capa de 500 metres de gruix. Aquesta mena de creixement s'anomena *creixement geomètric* si té lloc en intervals de temps discrets i *creixement exponencial* si el temps es registra de manera contínua.

No cal dir que aquesta mena de creixement sol passar — per sort — gaire sovint, però podem trobar casos on sigui aplicable. El seu estudi, però, es justifica millor si tenim en compte que es tracta del cas límit en el qual la natalitat o la mortalitat de l'espècie no depèn del nombre de membres.

Aquest fet té dues lectures. Per una banda, aquest model és ideal per estudiar la influència dels factors externs. Per l'altra, es pot estendre per obtenir altres models més realistes, com el *model logístic*.

Al llarg d'aquesta unitat distingirem entre models discrets i continus. Veurem fins a quin punt arriba la seva equivalència i en quins aspectes les seves prediccions són diferents. Si entenem el motiu d'aquestes diferències podrem establir quan és més adequat emprar un o altre tipus de model.

Però potser el fet més sorprenent serà comprovar com equacions aparentment simples poden arribar a tenir un comportament imprevisible. Aquest fenomen es coneix com a *caos determinista* i en farem especial esment, ja que es tracta d'una característica comuna a moltes altres disciplines.

## Objectius

- Definir el concepte d'equació de recurrència i aplicar-lo a la modelització amb temps discrets.
- Enunciar models independents de la densitat i explicar com es pot emprar l'estocasticitat per reproduir comportaments realistes.
- Presentar el model logístic com el model més senzill que depèn de la densitat.
- Establir analogies entre les equacions de recurrència i les equacions diferencials.
- Descriure la relació entre els models discrets i els seus equivalents continus.
- Definir els conceptes d'autòmat cel·lular i de model extensiu.

## **Esquema**

1. Modelització mitjançant equacions de recurrència
  - (a) Models independents de la densitat
    - i. Model geomètric
    - ii. Estocasticitat ambiental
    - iii. Estocasticitat demogràfica
  - (b) Models dependents de la densitat
    - i. El model logístic
    - ii. Caos determinista al model logístic
2. Modelització mitjançant equacions diferencials
  - (a) Model exponencial
  - (b) Model logístic (versió contínua)
3. Modelització mitjançant autòmats cel·lulars

## 1.1 Modelització mitjançant equacions de recurrència

### 1.1.1 Concepte

El nostre objectiu és representar el nombre de membres que té una espècie en funció del temps. Potser no ens cal especificar a cada instant de temps quant val aquest nombre i en tenim prou indicant el seu valor cada cert temps.

En aquest cas, l'evolució de l'espècie vindrà representada per una sèrie de nombres  $N_i$ . Notarem com  $\Delta t$  el temps que passa entre que la espècie té  $N_i$  membres i que en té  $N_{i+1}$ .

Podem mirar de trobar una expressió que reproduïx la sèrie. Això es pot fer mitjançant un terme general. Per exemple,

$$N_i = 3000 \cdot i.$$

Més sovint, però, ens caldrà utilitzar una expressió que ens permeti calcular cada terme de la sèrie a partir del terme precedent. Per exemple:

$$N_{i+1} = N_i + 3000.$$

Això és el que es coneix com a *equació de recurrència*. A vegades, no sempre, és possible trobar un terme general que sigui equivalent a una equació de recurrència.

Abans de continuar, et proposem que realitzis l'activitat 1.

### 1.1.2 Propietats

Considerem una equació de recurrència de la forma

$$x_{i+1} = f(x_i).$$

Ens interessarà especialment l'existència dels anomenats *punts fixos*. Un punt fix, com el seu nom indica, és un valor tal que si un terme de la sèrie el té, tots els termes posteriors també el tindran. Matemàticament, expressem això com

$$x^* = f(x^*).$$

Un punt fix pot ser estable o inestable. Està clar, per la seva definició, quin és el comportament de la sèrie quan un terme té exactament aquest valor. Ara bé, què passa si un terme de la sèrie té un valor molt proper al del punt fix? Els propers termes tendiran a acostar-se al punt fix o s'hi allunyan?

En el primer cas parlarem d'un punt fix *estable* i probablement la sèrie anirà a parar a aquest valor tard o d'hora. En el segon cas tindrem un punt fix *inestable* i molt difícilment la sèrie podrà tenir aquest valor, a no ser que el seu valor inicial sigui exactament aquest.

Podem discutir el caràcter d'un punt fix  $x^*$  estudiant la següent quantitat

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x^*}.$$

Quan  $\lambda > 1$  el punt fix és inestable. En canvi, per  $\lambda < 1$  el punt fix tindrà caràcter estable.

Un altre concepte interessant és el d'*òrbita* o *cicle*. Pot passar que un cert nombre de valors es vagi repetint contínuament en una sèrie. Podem expressar-ho matemàticament dient que existeix un terme de la sèrie a partir del qual sempre es complirà que

$$x_{i+n} = x_i$$

on  $n$  és el nombre de termes de l'òrbita. Per exemple, a la següent sèrie trobem una òrbita de tres termes.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, \dots$$

De fet, es pot pensar que un punt fix és una òrbita d'un sol terme. Fixem-nos que si obtenim la sèrie a partir d'una equació de recurrència, n'hi ha prou amb que es repeteixi un terme de la sèrie per a que els seus valors formin, a partir d'aquell terme, una òrbita.

Les òrbites poden ser, com els punts fixos, estables o inestables. El criteri torna a ser veure cap a on tendeix la sèrie quan un terme té un valor molt proper a un dels valors que formen l'òrbita.

Finalment, ens podem trobar amb un atractor. En aquest cas, els valors de la sèrie no formen una òrbita, ja que mai es repeteix cap valor, però tenen tendència a cobrir un interval finit. Anomenem *atractor* a aquest interval de valors. Un atractor es pot considerar com una òrbita d'infinits termes.

Els atractors són un indicatiu del que s'anomena *caos determinista*: un petit canvi en el terme inicial de la sèrie dóna lloc a evolucions completament diferents, que tan sols tenen en comú la tendència a cobrir el mateix atractor.

Una equació de recurrència pot tenir més d'un punt fix. El valor i l'estabilitat dels punts fixos són un tret característic de cada equació de recurrència. Imaginem ara que tenim una equació que depèn d'un paràmetre  $a$ .

$$x_{i+1} = f_a(x_i).$$

En certa manera, aquesta expressió representa una "família" d'equacions de recurrència, cadascuna caracteritzada per un valor del paràmetre  $a$ . Per a valors diferents de  $a$  podem tenir un nombre diferent de punts fixos. Diem que es

produeix una *bifurcació* en un valor donat de  $a$  quan una variació molt petita d'aquest valor fa que canviï el nombre de punts fixos.

També es diu que s'ha produït una bifurcació quan varia el nombre d'òrbites o, fins i tot, quan el nombre de termes d'una òrbita canvia.

Pot passar que, per a un determinat valor del paràmetre  $a$ , una òrbita es converteixi en un atractor. En aquest cas es diu que el sistema s'ha tornat *caòtic*.

En els propers apartats tindrem l'oportunitat d'anar descobrint aquests comportaments a les equacions de recurrència que utilitzarem.

## 1.2 Models independents de la densitat

### 1.2.1 Model geomètric

Com s'ha dit abans, modelitzarem el nombre de membres d'una espècie mitjançant una sèrie. El valor de cada terme de la sèrie representa el nombre de membres de l'espècie en un cert instant de temps. Fixarem una quantitat  $\Delta t$  que representi l'interval de temps entre dos termes de la sèrie.

Aquesta mena de modelització s'anomena *intensiva* ja que no tenim en compte la distribució espacial dels membres de l'espècie sinó tan sols el seu nombre. Els models que sí tenen en compte com està distribuïda l'espècie a l'espai s'anomenen *extensius*.

Per simplificar l'exposició, considerarem tan sols la reproducció asexual, com la dels bacteris. Tot el que s'exposarà a continuació es pot adaptar a la reproducció sexual redefinint el significat d'algunes quantitats.

Considerem ara l'interval de temps  $\Delta t$ . Sigui  $B$  la probabilitat de que un membre de l'espècie es reproduïxi i  $D$  la probabilitat de que mori, durant el transcurs d'un interval de temps  $\Delta t$ . El nombre de membres un cop transcorregut aquest interval de temps és

$$N_{i+1} = N_i + BN_i - DN_i = (1 + B - D)N_i \equiv RN_i \quad (1.1)$$

on hem definit  $R$  com  $1 + B - D$ .  $R$  s'anomena *factor de creixement geomètric*.

En el cas de l'Equació 1.1 és possible calcular el terme general,

$$N_i = R^i N_0 \quad (1.2)$$

on  $R_0$  és el nombre inicial de membres de l'espècie.

El comportament d'aquest model es previsible. Quan  $R > 1$  tindrem un creixement geomètric. En canvi si  $R < 1$  el nombre de membres decreixerà, també geomètricament (veure Figura 1.1).

Aquest model és *independent de la densitat* perquè els paràmetres de natalitat  $B$  i de mortalitat  $D$  no depenen del nombre de membres de l'espècie. Això es veritat quan una espècie disposa de prou espai i recursos però no es compleix, en general, quan el nombre de membres és prou gran com per a que hi hagi escassetat d'algun recurs (aigua, aliments, espai, ...).

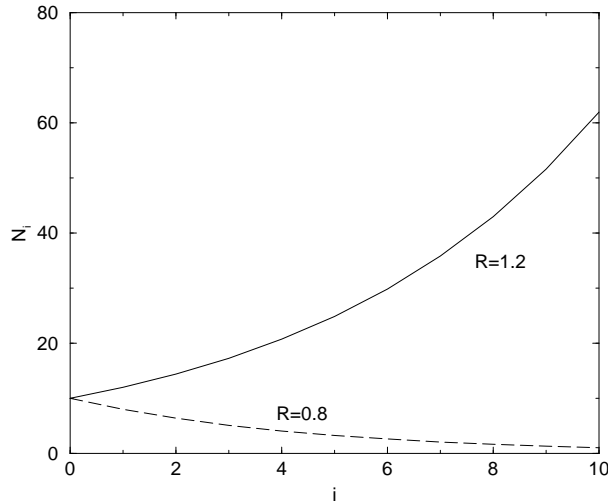


Figura 1.1: Comportament del model geomètric

## 1.2.2 Estocasticitat ambiental

El fet que  $B$  i  $D$  siguin independents del nombre de membres de l'espècie no vol dir que siguin necessàriament constants. Pot haver-hi un augment de la mortalitat i una disminució de la natalitat degut a circumstàncies externes, com sequeres o epidèmies. El resultat pot ser una disminució de  $R$  per sota de 1.

Al contrari, circumstàncies favorables poden fer variar  $R$  de manera que assoleixi valors per sobre de 1.

Aquestes variacions del factor de creixement  $R$ , per sobre i per sota de 1, poden fer que el model geomètric ja no doni lloc a un creixement o a un decreixement monòton sinó a unes fluctuacions aleatòries que mantenen la població en valors que no mostren ni un creixement ni un decreixement clar. Aquest fenomen s'anomena *estocasticitat ambiental*.

Per estudiar-lo, considerem el model que ve donat per l'equació de recurrència

$$N_{i+1} = R(\zeta)N_i \quad (1.3)$$

on  $\zeta$  és una variable aleatòria que compleix

1. El 50% de les vegades adopta el valor  $R_1$
2. L'altre 50% de les vegades té valor  $R_2$

No costa molt veure que la condició per a que no hi hagi una tendència ni cap al creixement ni cap al decreixement és

$$\sqrt{R_1 R_2} = 1$$

o en altres paraules

$$R_1 = \frac{1}{R_2} \quad (1.4)$$

Etiquetarem la corba amb la mitja geomètrica dels dos factors de creixement

$$\langle R \rangle \equiv \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{R_1^2 + 1}{2R_1}.$$

En aquesta darrera equació, la igualtat tan sols és vàlida si es compleix la Condició 1.4.

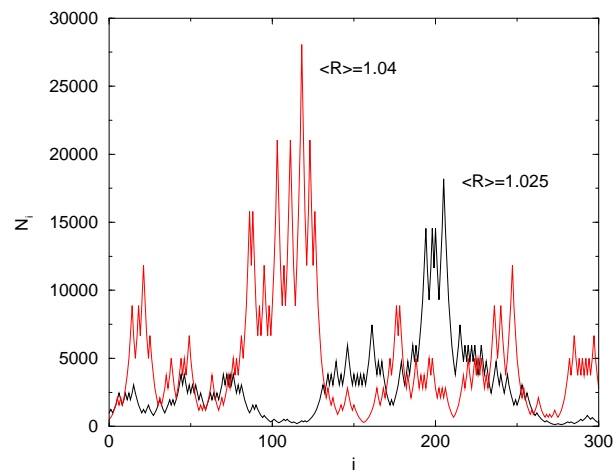


Figura 1.2: Dos exemples d'estocasticitat ambiental

A la Figura 1.2 es pot veure un exemple dels resultats del model.

### 1.2.3 Estocasticitat demogràfica

Mirem ara una altra font d'estocasticitat que pot produir canvis en el comportament monòton del model geomètric. Quan  $R$  té un valor exactament igual a 1, el nombre de membres de l'espècie es manté constant segons el model geomètric.

El model geomètric parteix de la idea de que tots els individus es reproduïxen al mateix ritme. Això pot ser cert en organismes molt senzills, però no es compleix en absolut pels organismes superiors.

Quan diem que la natalitat és d'un fill per parella, s'entén que algunes parelles tindran dos, tres o encara més fills mentre que altres no en tindran cap. Cal entendre aquesta afirmació com un promig, no com una indicació de que totes les parelles tenen un fill.

Ambdues coses tan sols són equivalents en el límit en el qual una espècie té infinits membres.

A la pràctica, el nombre de neixements i el de defuncions presenta fluctuacions (veure glossari). Tant el neixement d'un ésser viu com la seva defunció



són esdeveniments que no estan exempts d'una certa aleatoritat. La xifra que ens proporciona el factor de creixement  $R$  és tan sols una mitja, la variància (veure glossari) de la qual no és zero. Aquest fet és especialment notable quan les poblacions són reduïdes.

Intentem plantejar un model que vagi més enllà que el model geomètric en aquest sentit. No podem plantejar-lo en termes d'una equació de recurrència sinó que caldrà resoldre el model mitjançant una petita simulació.

El model es pot plantejar en termes tan generals com es vulgui, però, per claredat, potser és millor imposar alguna restricció, que en qualsevol cas es pot variar.

Així doncs, per a cada un dels  $N_i$  membres de l'espècie, calculem els descendents que tenen d'acord amb les següents probabilitats

1. Probabilitat de no tenir descendents:  $(1 - a)/2$
2. Probabilitat de tenir 1 descendent:  $a$
3. Probabilitat de tenir 2 descendents:  $(1 - a)/2$

Podem escollir altres valors per a les probabilitats i ampliar el nombre d'esdeveniments possibles (tenir 3 descendents, ...). No obstant, la suma de totes les probabilitats ha de ser sempre igual a 1 o altrament no estariem considerant-les totes.

Per una altra banda, si volem que el nombre de membres de l'espècie es mantingui constant (per comparar amb el model geomètric  $R = 1$ ), la probabilitat de morir durant un interval de temps ha de ser igual a la natalitat mitja. En el nostre cas

$$D = 0 \times \frac{1 - a}{2} + 1 \times a + 2 \times \frac{1 - a}{2} = 1$$

tot i que podria ser un altre factor si haguéssim partit de probabilitats amb una forma diferent o haguéssim considerat altres esdeveniments.

Un cop simulat el pas d'un interval de temps, en simulem més per poder obtenir l'evolució del nombre de membres d'una espècie. A la Figura 1.3 es pot observar una simulació del model, partint de  $N_0 = 25$ , per a dos valors de  $a$  diferents.

Ara ja pots fer l'activitat 2.

### 1.3 Models dependents de la densitat

Fins ara hem utilitzat models on les probabilitats de neixement i de defunció eren independents del nombre d'individus de l'espècie. Aquesta suposició pot tenir sentit en dos casos. És gairebé certa en aquells casos en que l'abundància d'espai i d'aliments fa que no hi hagi factors que limitin l'expansió de l'espècie. També es pot considerar útil quan la dependència en el nombre de membres no

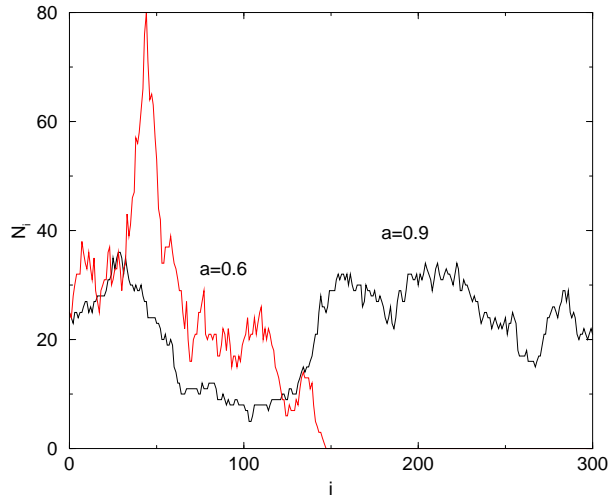


Figura 1.3: Dos exemples d'estocasticitat demogràfica

és tan important com altres factors, com ara les condicions externes o, fins i tot, les fluctuacions aleatòries del nombre de neixements i de defuncions.

En la major part del casos, però, és més lògic suposar que la natalitat disminueix a mida que augmenta el nombre de membres d'una espècie i que, en conseqüència, l'espai i els aliments disponibles són més limitats. Pels mateixos motius, podem esperar que la mortalitat esdevingui més elevada a mida que el nombre de membres de l'espècie augmenti.

És d'esperar que si apliquem aquestes idees aconseguirem models més realistes. En concret, no caldrà recórrer a factors externs per obtenir comportaments qualitativament correctes.

### 1.3.1 Model logístic

El tipus de dependència més simple que compleix les premises esmentades abans és la dependència lineal. Suposem, doncs, que els factors  $B$  i  $D$  no són constants sinó que venen donats per

$$B = B_0 - B_1 N \quad (1.5)$$

$$D = D_0 + D_1 N \quad (1.6)$$

on recuperem el model geomètric quan  $B_1 = D_1 = 0$ .

Si substituïm les Equacions 1.5 i 1.6 a l'expressió 1.1 i escrivim el resultat en funció dels paràmetres

$$R = 1 + B_0 - D_0$$

$$K = \frac{B_0 - D_0}{B_1 + D_1},$$

obtenim l'anomenat *model logístic*

$$N_{i+1} = N_i + (R - 1) \left(1 - \frac{N_i}{K}\right) N_i. \quad (1.7)$$

És fàcil veure el significat intuïtiu dels paràmetres  $R$  i  $K$ . Quan el nombre de membres de l'espècie es petit comparat amb  $K$ , el seu comportament coincideix aproximadament amb el d'un model geomètric amb factor de creixement  $R$ . Per tant, continuarem anomenant *factor de creixement* a aquest paràmetre, malgrat que el comportament ja no sigui exactament geomètric.

En canvi, quan el nombre de membres és gairebé  $K$  el creixement és molt petit. De fet,  $N = K$  és un punt fix del sistema: quan s'assoleix aquest valor ja no hi ha variacions posteriors. Per aquest motiu anomenem *capacitat* al paràmetre  $K$ .

El model logístic sovint es presenta normalitzat (veure glossari)

$$x_{i+1} = R(1 - x_i)x_i. \quad (1.8)$$

La magnitud  $x$  es defineix com

$$x_i \equiv \frac{N_i}{Q}$$

on, a la seva vegada, el paràmetre  $Q$  està definit com

$$Q \equiv \frac{1 + B_0 - D_0}{B_1 + D_1}.$$

El significat de  $Q$  és diferent al de  $K$ . Es tracta d'un límit per sobre del qual el model logístic deixa de tenir sentit.

A la Figura 1.4 es pot veure una evolució típica d'un sistema modelitzat mitjançant el model logístic discret.

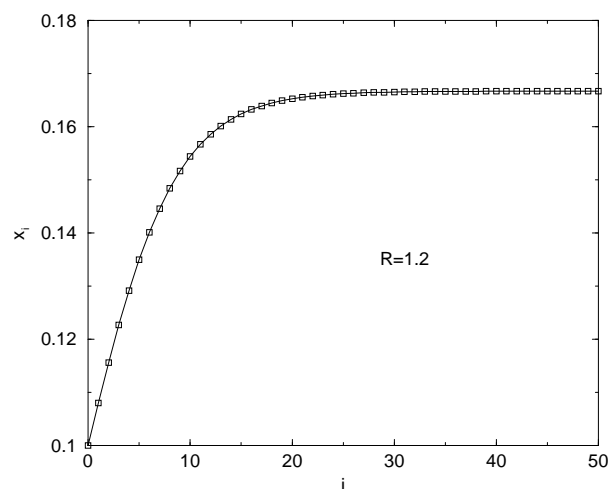


Figura 1.4: Exemple de resultats del model logístic

### 1.3.2 Caos determinista al model logístic

Una de les característiques més notables del model logístic és el seu comportament, sorprenentment complex tenint en compte la simplicitat de l'equació de recurrència.

A la Figura 1.5 es pot veure el *diagrama de bifurcacions*. Aquest diagrama serveix per visualitzar les bifurcacions que presenta el model logístic. L'eix de les  $x$  representa els valors possibles del paràmetre  $R$  (entre 0 i 4). A l'eix de les  $y$  hi representem diversos valors que assoleix la variable  $x_i$  a instants de temps diferents. La única condició que compleixen aquests valors és que corresponen a instants de temps grans. D'aquesta manera, si existeix un punt fix, un òrbita o un atractor, aquests valors segur que en formaran part.

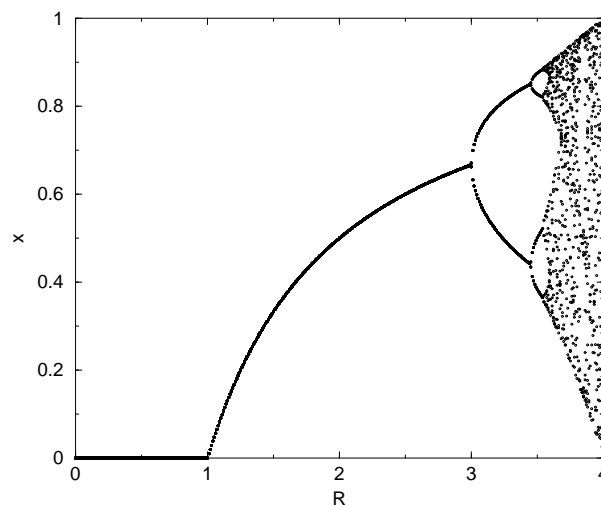


Figura 1.5: Diagrama de bifurcacions

Observem que entre  $R = 0$  i  $R = 1$  tan sols hi ha un punt fix estable que és el 0. A  $R = 1$  es produeix una bifurcació, ja que entre  $R = 1$  i  $R = 2$  el punt fix estable és un altre ( $x^* = 1 - R^{-1}$ ) mentre que  $x = 0$  passa a ser un punt fix inestable. A  $R = 3$  es produeix una altra bifurcació. Aquest cop el punt fix es converteix en una òrbita de dos punts. Més endavant el nombre de punts de l'òrbita es va doblant, a intervals cada cop més curts. Es pot demostrar que a partir de  $R = 3.58$  el nombre de punts de l'òrbita és infinit i que, per tant, tenim un atractor.

Entre  $R = 3.58$  i  $R = 4$  la major part dels valors de  $R$  corresponen a atractors. No obstant, tenim finestres (veure Fig. 1.6) que no presenten aquest comportament i que, de fet, reproduïxen l'estructura de bifurcacions que hem trobat abans de  $R = 3.58$ . Aquest fet s'anomena *autosimilitud* i és un dels trets característics dels comportaments caòtics

El model logístic, per als valors de  $R$  que donen lloc a atractors, presenta *caos determinista* degut a que dos sistemes que parteixen d'estats molt similars evolucionen de manera completament diferent. Això es pot comprovar a la

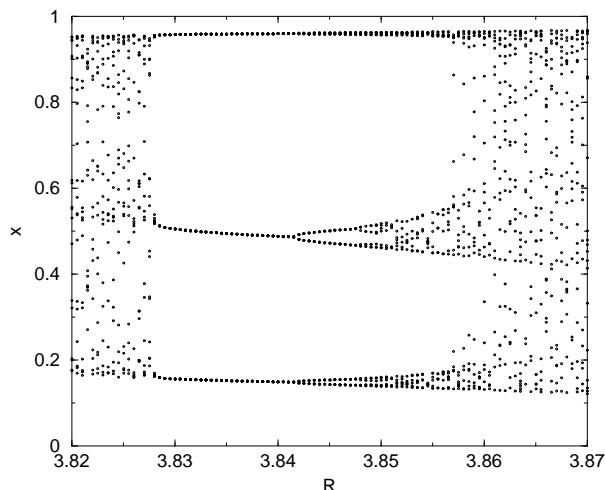


Figura 1.6: Una finestra d'ordre en mig del caos

Figura 1.7, que representa l'evolució de dos sistemes caracteritzats per  $R = 3.9$  i amb valors inicials molt semblants. Per a  $i = 0$  un sistema es troba a  $x_0 = 0.5$  mentre que l'altre sistema es troba a  $x = 4.99$ . L'evolució al llarg de les primeres 20 iteracions és molt semblant. A poc a poc, els sistemes es van diferenciant. En arribar a l'iteració  $i = 90$  l'evolució dels dos sistemes ja és completament diferent.

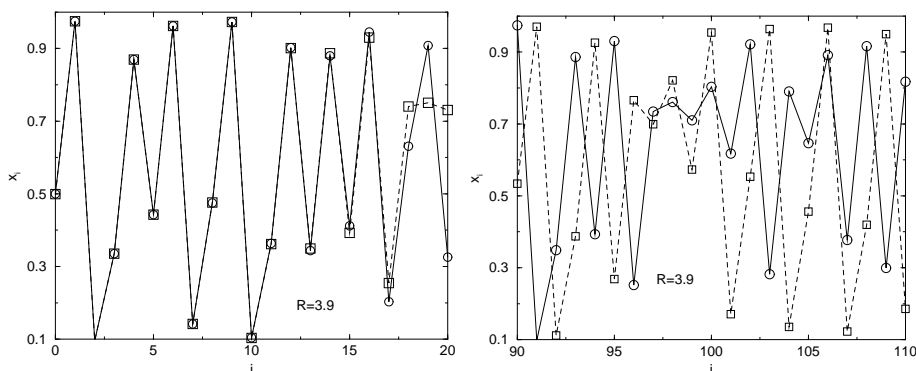


Figura 1.7: Evolució de dos sistemes

Els atractors són fractals. Un *fractal* és una figura geomètrica tal que la seva dimensió topològica no coincideix amb la dimensió del seu "contingut". Per dimensió topològica entenem la dimensió que habitualment associem amb una figura: si es tracta d'un conjunt de punts (com és el cas de l'atractor que estem estudiant) la dimensió topològica és 0, si la figura està formada per línies la dimensió topològica és 1, i així successivament.

Des d'un punt de vista matemàtic hi ha varies definicions per avaluar la dimensió del "contingut" d'una figura (per exemple, la dimensió de Hausdorff-Besicovitch) però més val abordar aquest problema des d'un punt de vista in-

tuïtiu. L'atractor està format pels valors que va assolint el model logístic i per tant la seva dimensió topològica és 0. No obstant, la sèrie anirà *recobrint densament* tots els valors d'un interval (passarà tan a prop com vulguem de qualsevol punt de l'interval). De fet, per  $R = 4$  el model logístic recobreix tot l'interval  $(0, 1)$ . En aquest sentit, la dimensió de l'atractor és la d'una línia, és a dir, 1.

Un "truquet" per visualitzar millor els atractors és afegir *observables ficticis*. D'aquesta forma es pot veure millor quina és la dimensió i l'estructura de l'atractor. Pel que fa al model logístic, representarem en una gràfica en tres dimensions un cert nombre de punts. El punt  $i$  té com a coordenades  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ , tres valors consecutius de la sèrie. Els observables s'anomenen ficticis perquè estem fent una gràfica de tres quantitats quan en realitat només en tenim una (el valor de la sèrie en cada terme). El resultat es pot veure a la Figura 1.8.

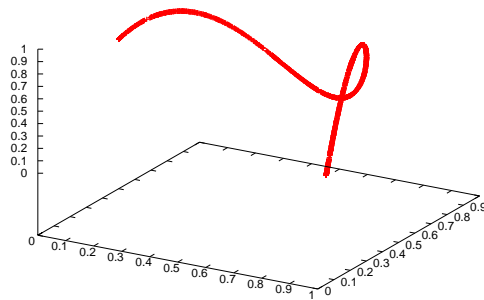


Figura 1.8: Atractor per  $R=3.9$

## 1.4 Modelització mitjançant equacions diferencials

### 1.4.1 Concepte

Fins ara hem estat considerant el que anomenem *models discrets* degut a la manera com tractem el temps.

Per comptes de considerar el temps com una variable discreta, que tan sols pot assolir valors múltiples sencers de  $\Delta t$ , podem tractar-lo com el que és en realitat, una variable contínua que pot arribar a tenir qualsevol valor. En aquest cas estaríem parlant d'un *model continu*.

Així doncs, representarem el nombre de membres de l'espècie com una funció del temps  $n(t)$ . Aquesta funció és l'equivalent del terme general de la sèrie, en el cas dels models discrets. Sovint, però, no podrem trobar una funció  $n(t)$  a primer cop de vista. Més aviat, l'anàlisi del problema ens durà a una equació

que ens relacioni el *ritme de canvi* de  $n(t)$  amb els paràmetres del sistema i amb  $n(t)$ . Parlant en termes matemàtics, obtenim una equació on intervien  $n(t)$  i la seva derivada, es a dir, una *equació diferencial*

$$\frac{dn(t)}{dt} = f_a[n(t)].$$

En els nostres models  $f_a[n(t)]$  no dependrà directament del temps. Això farà que les equacions diferencials que tractarem sempre siguin separables (veure glossari).

Notem que les equacions diferencials juguen el mateix paper en els models continus que les equacions de recurrència en els models discrets.

## 1.4.2 Propietats

Ja s'ha comentat que en els models continus les equacions diferencials són l'equivalent de les equacions de recurrència en els models discrets. En certa manera també podem trobar una correspondència amb les propietats que s'han esmentat a l'apartat 1.1.2.

Considerem una equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Pot existir un valor  $x^*$  que compleixi

$$f(x^*) = 0.$$

Aquest valor serà un *punt fix*. Si  $x(t)$  arriba a tenir aquest valor llavors el tindrà sempre en el futur. Els punts fixos poden ser estables o inestables. Com a les equacions de recurrència, l'estabilitat es pot estudiar mitjançant el paràmetre  $\lambda$ , definit per

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x^*}.$$

De nou,  $\lambda > 1$  indica que el punt fix és *inestable* mentre que  $\lambda < 1$  vol dir que el punt fix és *estable*.

Encara que els models que estudiarem en aquest tema no presentaran aquest comportament, també poden existir *òrbites (cicles)* en forma de solució periòdica. Per obtenir atractors ens caldrà estudiar sistemes de tres (o més) equacions diferencials.

De moment, pots fer l'activitat 3.

## 1.5 Versió contínua dels models de creixement

### 1.5.1 Model exponencial

Recordem que en el cas dels models discrets vam definir dos valors:  $B$  era la probabilitat de que un membre de l'espècie tingui un descendent durant l'in-

terval  $\Delta t$  i  $D$  era la probabilitat de la seva mort durant el mateix interval de temps.

Ara, definim  $b$  com la probabilitat de que un membre de l'espècie tingui un descendent, per unitat de temps. Si  $B$  és adimensional,  $b$  té dimensions d'invers del temps. Anàlogament, definim una probabilitat de defunció per unitat de temps  $d$ .

Si expressem això en forma d'equació diferencial obtenim

$$\frac{dn(t)}{dt} = bn(t) - dn(t) = rn(t), \quad (1.9)$$

on hem definit la *taxa de creixement* com  $r = b - d$ . La solució d'aquesta equació és

$$n(t) = e^{rt}n(0).$$

Fixem-nos que el model geomètric (discret) i el model exponencial (continu) són completament equivalents quan es compleix la condició

$$R = e^{r\Delta t}$$

Per practicar aquest concepte pots fer l'activitat 4.

## 1.5.2 Model logístic

De nou hem considerat, a l'apartat anterior, que tant  $b$  com  $d$  són independents del nombre de membres que té l'espècie i una altra vegada la solució més senzilla per incorporar aquesta dependència és suposar que és lineal

$$b(t) = b_0 - b_1n(t),$$

$$d(t) = d_0 + d_1n(t).$$

Si, a més, apliquem les definicions

$$r = b_0 - d_0,$$

$$K = \frac{b_0 - d_0}{b_1 + d_1},$$

llavors l'Eq. 1.9 es converteix en

$$\frac{dn(t)}{dt} = r \left( 1 - \frac{n(t)}{K} \right) n(t). \quad (1.10)$$

La solució d'aquesta equació diferencial és

$$n(t) = \frac{K}{1 + [K/n(0) - 1]e^{-rt}}$$



Sovint s'utilitza una normalització que és subtilment diferent a la del model discret. Per comptes de normalitzar respecte un valor màxim, normalitzarem respecte la capacitat del sistema

$$x(t) \equiv \frac{n(t)}{K}.$$

Lavors l'Equació 1.10 s'escriu com

$$\frac{dx(t)}{dt} = r[1 - x(t)]x(t)$$

i la seva solució com

$$x(t) = \frac{1}{1 + [1/x(0) - 1]e^{-rt}}.$$

A la Figura 1.9 es pot veure la representació de dues funcions  $x(t)$  modelitzades mitjançant el model logístic.

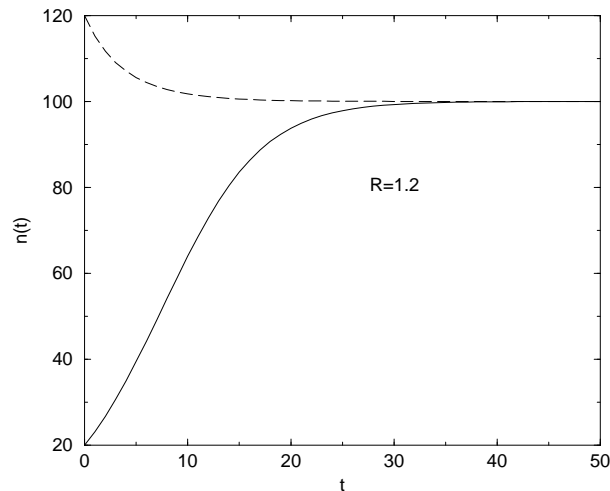


Figura 1.9: Dues corbes logístiques contínues

Una activitat relacionada amb el model logístic és la 5.

## 1.6 Modelització mitjançant autòmats cel·lulars

### 1.6.1 Concepte

Els models discrets i continus que hem vist fins ara tenen en comú que són *intensius*. Amb això es vol dir que tan sols tenim en compte el nombre de membres total de l'espècie i no la manera com està distribuïda geogràficament.

Està clar que quan parlem de  $N_i$  o de  $n(t)$  estem comptabilitzant uns membres que estan localitzats en una determinada regió. No obstant, podem ser més explícits en aquest punt i utilitzar models que incorporin la localització

dels membres de l'espècie com una informació més del model. Aquests models s'anomenen *extensius*

Uns models extensius particularment interessants són els autòmats cel·lulars. Un *autòmat cel·lular* consisteix en un conjunt de caselles (cèl·lules) cadascuna de les quals pot tenir un nombre finit d'estats diferents.

Els autòmats cel·lulars evolucionen per torns i totes les caselles es governen pel mateix conjunt de regles. Una condició que han de complir les regles és que l'estat d'una casella tan sols pot dependre de l'estat de les caselles del seu entorn en el torn anterior i de la història de la pròpia casella.

Els diferents autòmats cel·lulars es caracteritzen per

- Forma i dimensions de les caselles
- Què s'entén per entorn de la casella
- Nombre d'estats en què es pot trobar la casella
- Regles d'evolució

És habitual, per evitar que la matriu es quedi petita, considerar que la topologia de la matriu es toroïdal. Això vol dir que una casella de l'extrem dret de la matriu és veïna de la de l'extrem esquerra. El mateix passa amb les caselles de l'extrem superior i inferior.

En general podem dir que els autòmats cel·lulars no són models que puguin donar respostes definitives ja que tan sols intenten simular la natura a grans trets. No obstant serveixen per fer-nos una idea de quines són les lleis més essencials que intervenen en un fenomen.

## 1.6.2 El joc de la vida

El joc de la vida és va pensar per demostrar que és possible construir una computadora universal (veure glossari) mitjançant un autòmat cel·lular.

Després de dos anys de recerca, John Conway va trobar un sistema que consistia en una matriu rectangular de caselles, cadascuna de les quals podia tenir dos estats. Hom pot pensar en aquests dos estats com "viu" i "mort". Les regles eren molt senzilles: una casella viva sobreviu només si té dues o tres veïnes vives i una casella morta es converteix en viva si té exactament tres veïnes vives.

Val a dir que les caselles veïnes, al joc de la vida, són les 8 caselles més properes (*entorn de Moore*). En altres autòmats cel·lulars tan sols són veïnes les 4 caselles que es troben a dalt, a baix, a la dreta i a l'esquerra (*entorn de von Neuman*).

La vessant lúdica consisteix en trobar configuracions de caselles que evolucionin de manera complexa, evitant tant l'extinció total de les caselles vives com l'arribar a una configuració estacionària.

Per exemple, a la Figura 1.10 es pot veure una configuració interessant anomenada *lliscador*. Es desplaça en diagonal per la matriu de caselles. Es pot utilitzar per representar bits d'informació a la computadora universal. S'han descobert altres configuracions que poden actuar com a portes lògiques. És possible, doncs, fer una configuració que actuï com una computadora universal.

Per assegurar-te que has entès les regles del joc de la vida, fes l'activitat 6.

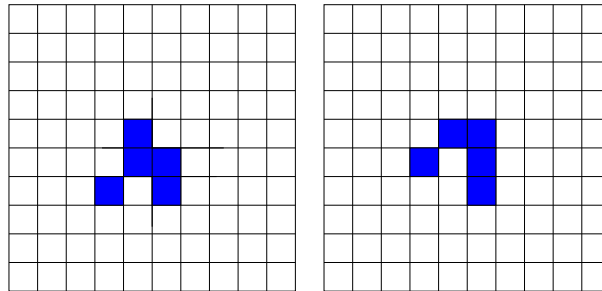


Figura 1.10: Un lliscador en dos instants diferents

### 1.6.3 Creixement logístic

No és difícil modificar el joc de la vida per aconseguir que el nombre de caselles ocupades creixi de manera semblant a la logística. Per exemple, considerem el següent conjunt de regles

- Una casella morta viurà si té dues veïnes o més
- Una casella viva sobreviurà si té dues, tres, quatre o cinc veïnes

És fàcil comprovar que aquest sistema presenta un creixement que és qualitativament similar al logístic. Hi ha molts més conjunts de regles amb el mateix comportament. De fet, el tret més interessant del joc de la vida és la capacitat per crear estructures amb un comportament complex, la qual cosa es perd en els nous conjunts de regles.

## Resum

S'han vist tres formes de modelitzar el creixement d'una espècie. Per una banda s'han presentat models intensius, discrets o continus. Per l'altra, s'ha fet una breu introducció als autòmats cel·lulars, que són models discrets i extensius.

Els models intensius discrets es basen en equacions de recurrència i els models intensius continus en equacions diferencials. No obstant, els resultats presenten uns comportaments equivalents — com no podia ser d'una altra manera ja que modelitzen el mateix fenomen —.

Es pot dir que el més interessant del resultat d'una equació, de recurrència o diferencial, és el seu comportament a llarg termini. Per aquest motiu hem classificat aquests comportaments en punts fixos, òrbites i atractors. Si el model depèn d'un paràmetre que pot variar de manera contínua, és important conèixer els valors per als quals es produeixi una bifurcació, o sigui, un canvi qualitatiu en el comportament a llarg termini.

En el cas dels models discrets, s'ha vist el model geomètric. Malgrat el seu comportament monòton es pot modificar per estudiar l'efecte dels factors externs o de les fluctuacions en el nombre descendents. Un refinament més important és la introducció de la dependència en la densitat, que ens porta al model logístic. El model logístic inclou el model geomètric per valors petits del nombre de membres d'una espècie i té, a diferència d'aquest, un comportament raonable a llarg termini.

Una de les característiques més notables del model logístic discret és l'aparició del caos determinista. Per aquest motiu s'ha dedicat un espai per comentar quina és la definició d'aquest fenomen i per comprovar que els seus trets més característics (autosimilitud, impredictibilitat, fractals) són presents a les solucions del model.

Els models discrets tenen el seu equivalent continu. En el cas del model logístic el comportament es molt més simple que el del seu equivalent discret per la qual cosa no són equivalents. Això no vol dir que un sigui més realista que l'altre. En realitat, el model discret implica que la reproducció té lloc en un interval de temps molt curt, la qual cosa pot ser certa per a determinades espècies.

Finalment, s'ha fet una breu explicació del concepte d'autòmat cel·lular. Van sorgir per resoldre problemes fonamentals de la matemàtica discreta però el

seu ús s'ha estès a altres camps perquè permet veure en quins casos els trets fonamentals d'un fenomen es deuen a lleis molt simples.

## Glossari

**computadora universal** Es tracta d'una computadora en el sentit de la *màquina de Turing*: un aparell que es capaç de processar informació binària mitjançant un programa arbitrari que també estigui expressat en binari.

**fluctuacions** Variacions al voltant d'un valor mig, degudes normalment a causes aleatòries.

**normalitzat** Es diu de la quantitat que es presenta sense dimensions i de forma que quan té valor 1 representa s'ha assolit una certa fita. Per normalitzar una quantitat tan sols cal dividir pel valor que té aquesta fita.

**separables** Es diu de les equacions diferencial on es possible concentrar tots els termes on apareix la variable independent a una banda i els termes on apareix la variable dependent a l'altre (incloent els diferencials). Les equacions diferencials separables es poden resoldre tan sols fent una integral.

**variància** Magnitud que dóna una idea de si un conjunt de valors són, en general, a prop o lluny de la seva mitja. Matemàticament,

$$\sigma = \sqrt{\langle x - \langle x \rangle \rangle}$$

## Referències addicionals

- **Ian Stewart:** *¿Juega Dios a los dados?*. Grijalbo-Mondadori, Barcelona (1991).

Excel·lent llibre de divulgació científica a on s'expliquen els fonaments matemàtics del caos i els principals camps d'aplicació.

- **Ricard V. Solé i Susanna C. Manrubia:** *Orden y caos en sistemas complejos*. Edicions UPC, Barcelona (1996).

Llibre sobre caos amb molts apartats referents a les equacions de la Biologia Matemàtica.

- **Jonathan Roughgarden:** *Primer in ecological theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River (1998).

Llibre de text a on s'exposen els models matemàtics del creixement d'una espècie, entre d'altres.

## Activitats

1. Troba el terme general de l'equació de recurrència

$$x_{i+1} = x_i^2.$$

2. A l'extrem orient, on el sistema de cognoms té milers d'anys, es freqüent que totes les persones d'una mateixa ciutat tinguin el mateix cognom. Dóna una explicació per a aquest fenomen.
3. Troba els punts fixos de l'equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a - bx$$

i discuteix si són estables o inestables.

4. L'any 1950 hi havia a la terra uns 2500 milions de persones mentre que l'any 2000 n'hi havia 6000 milions. Per a l'espècie humana, calcula el factor de creixement *anual* i la taxa de creixement, tenint en compte aquestes dues dades i suposant que el creixement és geomètric.
5. Imagina que el model logístic fos aplicable a l'espècie humana. Tenint en compte que a l'actualitat el creixement de l'espècie humana és lineal, estima la capacitat de la terra pel que fa als éssers humans.
6. Tenint en compte les regles del joc de la vida, dibuixa les diferents configuracions que adopta el "Iliscador" a mida que es desplaça per la matriu de caselles. Quantes n'hi ha?
7. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.



## Exercicis d'autocomprovació

1. Quina de les següents afirmacions referents als punts fixos és certa
  - (a)  $x = 0$  sempre és un punt fix
  - (b) Es extremadament improbable que un sistema es trobi en un punt fix inestable
  - (c) Una equació de recurrència no pot presentar simultàniament punts fixos estables i inestables
  - (d) Tota equació de recurrència presenta punts fixos
2. L'estocasticitat ambiental es deguda a
  - (a) Factors externs a l'espècie
  - (b) Factors que no es poden determinar
  - (c) Factors aleatoris que tenen a veure amb la pròpia espècie
  - (d) Tots els factors esmentats anteriorment
3. A un mateix edifici hi viuen 5 parelles. Tres tenen 1 fill, una en té 2 i una altra no en tenen cap. Podem dir que la variància i del nombre de fills per parella és
  - (a)  $3/5$
  - (b)  $1/5$
  - (c)  $2/5$
  - (d) Cap de les anteriors
4. Una de les característiques d'un fractal és que
  - (a) La seva dimensió de contingut no coincideix amb la seva dimensió topològica
  - (b) Té una dimensió de contingut fraccionària
  - (c) Te dimensions de contingut que sempre són més grans que 1
  - (d) Totes les característiques anteriors

5. La relació entre el factor de creixement i la taxa de creixement
- (a) És igual a 1 ja que ambdues coses són el mateix
  - (b) El factor de creixement és l'exponencial de la taxa de creixement
  - (c) Depèn del model que s'estigui emprant
  - (d) Depèn del interval de temps pel qual estigui definit el factor de creixement
6. Quina de les següents característiques no pot tenir un autòmat cel·lular
- (a) Caselles hexagonals
  - (b) Que l'estat d'una casella depengui del seu estat fa 5 torns
  - (c) Que l'estat d'una casella depengui del d'una casella situada a 5 caselles de distància
  - (d) Qualsevol de les anteriors

## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (a) 5. (d) 6. (c)

## **Unitat 2**

### **Relació entre espècies**

## Presentació

Ja hem estudiat els models de creixement d'una espècie. Hem intentat incloure en aquests models la variabilitat de les condicions externes i l'efecte que té l'augment de membres de la pròpia espècie sobre el seu creixement.

Fixem-nos que ambdós casos representen situacions oposades. En el primer cas, les condicions externes, l'efecte del nombre de membres de l'espècie és nul. Difícilment el fet que hi hagi més o menys membres farà que un any de sequera es converteixi en un any plujós.

En el segon cas, la dependència amb la densitat, l'efecte no depèn de qual-sevol altra cosa que no sigui del nombre de membres de l'espècie  $i$ , per tant, podem implementar-lo completament afegint nous termes a l'equació que ens determina el creixement de l'espècie.

Molts factors, però, no encaixen ben bé en cap d'aquests dos casos. Depenen de moltes altres coses a banda del nombre de membres de l'espècie, però tampoc en són completament independents.

El factor més important d'aquest conjunt és la influència de la resta d'espècies. Cadascuna de les altres espècies que conviuen amb la que estem estudiant tindrà els seus propis factors (externs, densitat, ...) que determinarà en gran mesura el seu creixement. També hi haurà, però, una influència mútua entre les espècies que competeixen per una mateixa font de recursos o entre una espècie  $i$  i la que s'alimenta d'ella.

La forma d'implementar aquesta dependència serà considerar una equació per a cada espècie i afegir-hi termes acoblats, que donin compte de la influència entre aquestes dues espècies. La forma d'aquests termes dependrà del tipus de relació entre les dues espècies i el valor dels paràmetres intentarà quantificar la intensitat d'aquesta relació.

Unes paraules sobre les matemàtiques que s'empraran. Essencialment, són les mateixes que es van introduir per estudiar el creixement d'una espècie. La principal diferència serà ara treballarem amb més d'una espècie (dues, per no complicar l'exposició). En aquest sentit caldrà generalitzar molts dels conceptes coneguts en una dimensió per treballar en un espai de variables amb diverses dimensions.

No obstant, podem anticipar que, com passava en el creixement d'una sola espècie, la principal finalitat no serà seguir amb detall l'evolució del nombre de

membres de les espècies sinó veure quin és el destí final del sistema. Es a dir, conèixer quins són els atractors del sistema i de quin tipus són.

## Objectius

- Estendre els conceptes de modelització mitjançant equacions de recurrència i mitjançant equacions diferencials a espais de vàries variables.
- Distingir entre modelització intensiva i extensiva, quan estudiem més d'una espècie.
- Ampliar els models de creixement d'una espècie per tenir en compte relacions de diferent tipus amb altres espècies.
- Reconèixer el significat dels diferents paràmetres que caracteritzen la interacció entre dues espècies.
- Normalitzar sistemes d'equacions per facilitar el seu estudi.

## Esquema

1. Modelització mitjançant sistemes d'equacions de recurrència
  - (a) Punts fixos, òrbites i atractors per a més d'una variable
  - (b) Tipus de representacions dels resultats.
2. Models discrets de relació entre espècies
  - (a) Model discret de Lotka–Volterra
  - (b) Model discret presa–depredador
3. Modelització mitjançant autòmats cel·lulars
4. Modelització mitjançant equacions diferencials
5. Models continus de relació entre espècies
  - (a) Model continu de Lotka–Volterra
  - (b) Model continu presa–depredador



## 2.1 Modelització mitjançant sistemes d'equacions de recurrència

Ja coneixem el concepte *d'equació de recurrència* i de *terme general*. En aquesta unitat volem seguir l'evolució de diverses espècies. Ens farà falta una variable i una equació de recurrència per a cadascuna. En general, hi haurà una influència entre espècies i, per aquest motiu, les equacions de recurrència estaran acoblades (veure glossari)

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i)$$

Per simplificar l'exposició ens hem limitat al cas de dues espècies. La generalització per a més espècies és immediata.

Ens caldrà conèixer el nombre inicial de membres de cada espècie,  $x_0$  i  $y_0$ . Introduint aquests nombres a les expressions anteriors i repetint el procés obtindrem dues sèries

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$$

Cada subíndex es refereix a un instant de temps. Aquestes sèries tan sols tenen significat si coneixem l'interval de temps  $\Delta t$  que hi ha entre dos termes consecutius.

El fet de tenir més d'una variable amplia els tipus de representació gràfica que es poden fer per visualitzar els resultats. Podem continuar representant el valor de les variables en funció del temps (o de l'índex). Aquest tipus de representació ens dóna una bona idea de com evolucionen les espècies amb el temps (veure Fig. 2.1)

Alternativament, podem construir una sèrie de punts

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$$

i representar-los. Amb això obtindrem una trajectòria (veure glossari) a *l'espai de variables* (veure Fig. 2.2). Aquest tipus de representació és especialment adequada per manifestar la relació entre les dues magnituds, encara que l'evolució amb el temps és perd una mica de vista.

Un dels avantatges de representar les trajectòries és que resulta aclaridor representar-ne moltes a la mateixa gràfica, amb diferents valors inicials. Si en

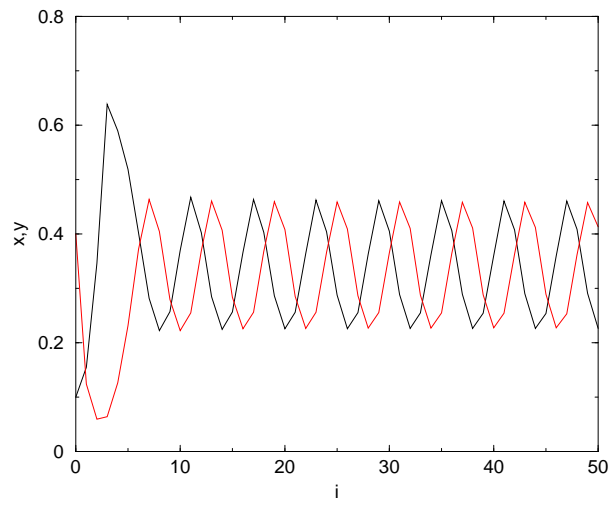


Figura 2.1: Exemple d'evolució temporal

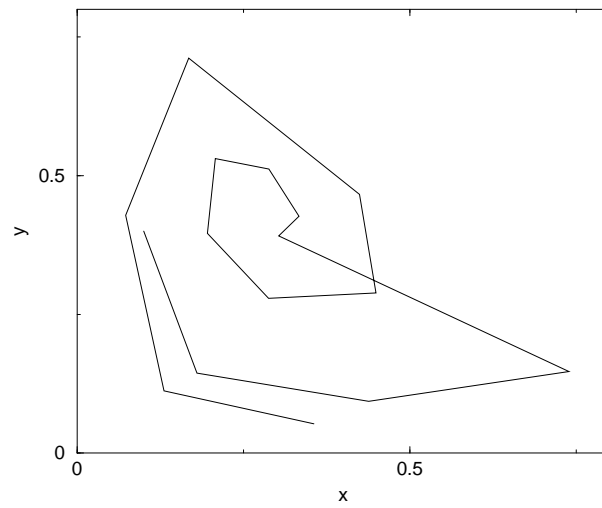


Figura 2.2: Exemple de trajectòria

dibuixem prous, ens podem fer una idea de quina forma tindria una trajectòria que s'iniciés en qualsevol punt de la gràfica (recordem que cada punt representa un estat del sistema). A més, ens pot servir per identificar característiques qualitatives de les solucions, com l'existència de punts fixos, òrbites o atractors.

Un punt fix és un estat del sistema que es pot mantenir indefinidament. La condició matemàtica en el cas de dues variables és

$$f(x^*, y^*) = x^* \quad (2.1)$$

$$g(x^*, y^*) = y^* \quad (2.2)$$

Detectarem la presència d'un punt fix a una gràfica de trajectòries perquè varies trajectòries aniran cap a aquest punt (o en sortiran).

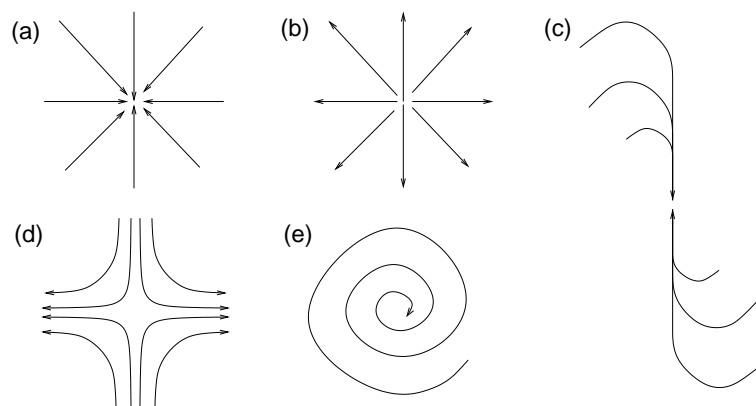


Figura 2.3: Diferents tipus de punt fix i punt de sella

Es pot discutir analíticament l'estabilitat del punt fix estudiant els valors  $\lambda_i$ . Aquests valors són les dues solucions del problema de *valors propis*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

Per a que el punt fix sigui estable, la part real de totes les  $\lambda_i$  ha de ser negativa. Si n'hi ha alguna de positiva llavors el punt és inestable.

De nou, la generalització a més de dues variables és immediata. No ho és, en canvi, la classificació dels punts fixos en funció de la forma de les trajectòries. Per una banda, tan sols hi ha un tipus de punt fix quan tenim una variable. Per l'altra, apareixen nous tipus a mida que augmentem el nombre de variables.

El motiu és fàcil d'entendre. Quan hi ha una sola variable les trajectòries tan sols es poden acostar al punt fix en una direcció. Si hi ha dues variables, les trajectòries tenen més opcions. Poden acostar-se o allunyar-se en qualsevol direcció. Això és el que es coneix com a *node estable* (Fig 2.3a) o *node inestable* (Fig. 2.3b). També pot passar que les trajectòries tan sols puguin acostar-se (o allunyar-se) al punt fix en una direcció determinada (Fig. 2.3c). Llavors es diu que el node és *degenerat*. Un tipus molt especial de punt fix és el *punt de*

*sella* (Fig. 2.3d). Es tracta d'un punt fix estable en unes direccions i inestable en unes altres. Una altra forma d'acostar-se (o allunyar-se) al punt fix és en *espiral* (Fig. 2.3e).

En més dimensions apareixen nous tipus de punt fix. Per exemple, en tres dimensions tenim dos tipus diferents de punt de sella.

Aquesta classificació es basa en el comportament d'un conjunt de mesura no nul·la (veure glossari) de trajectòries.

Després d'haver repassat el que és un punt fix i quines novetats apareixen en espais de més d'una dimensió, es pot fer l'activitat 1.

El concepte d'*òrbita* no canvia gaire respecte a una dimensió. Els mateixos estats del sistema es van repetint al llarg del temps, a partir d'un cert terme (Fig. 2.4).

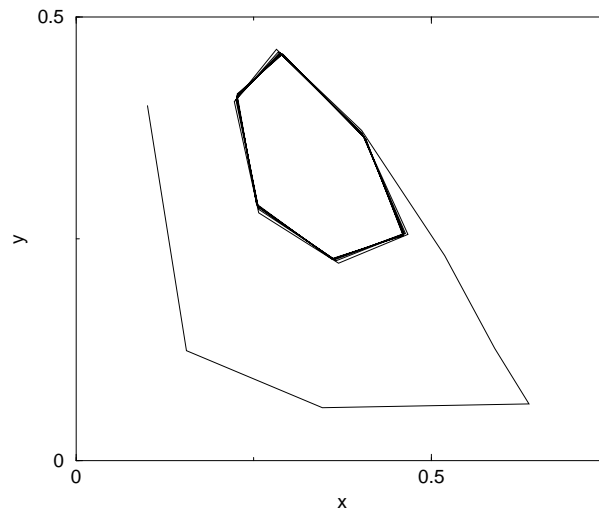


Figura 2.4: Exemple d'òrbita

Tampoc és molt diferent el concepte d'*atractor*. Quan hi ha un atractor, la trajectòria està continguda en una regió de dimensió superior a 1. A la figura 2.5 podem veure un exemple de trajectòria que forma un atractor.

## 2.2 Models discrets

### 2.2.1 Competència pels mateixos recursos

Partim del model logístic

$$N_{i+1} = N_i + (R - 1)\left(1 - \frac{N_i}{K}\right)N_i. \quad (2.4)$$

Recordem que segons aquest model l'espècie està caracteritzada per dos paràmetres: el factor de creixement  $R$  i la capacitat  $K$ .

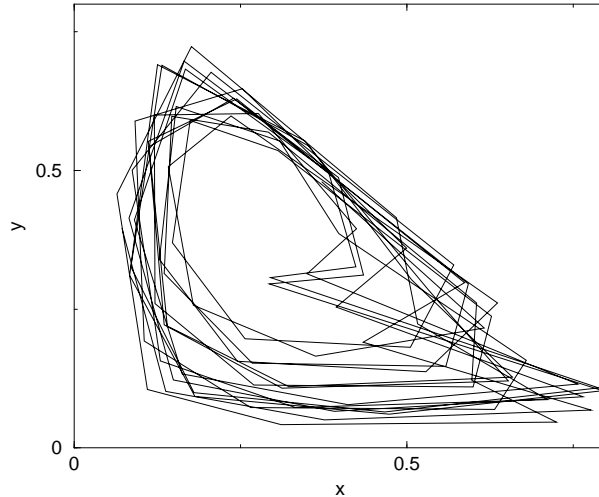


Figura 2.5: Exemple d'atractor

Considerem ara dues espècies descrites pel model logístic i que no competeixen per una mateixa font de recursos. Senzillament, escriurem una equació logística per a cada espècie

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (R_x - 1)\left(1 - \frac{N_{x,i}}{K_x}\right)N_{x,i},$$

$$N_{y,i+1} = N_{y,i} + (R_y - 1)\left(1 - \frac{N_{y,i}}{K_y}\right)N_{y,i}.$$

El fet que dues espècies competeixin pels mateixos recursos, implica que hi haurà una dificultat afegida per reproduir-se. La millor manera de modelitzar això és acoblant les dues equacions, afegint un terme que depengui del nombre de membres de l'altra espècie

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (R_x - 1)\left(1 - \frac{N_{x,i} - AN_{y,i}}{K_x}\right)N_{x,i}, \quad (2.5)$$

$$N_{y,i+1} = N_{y,i} + (R_y - 1)\left(1 - \frac{N_{y,i} - BN_{x,i}}{K_y}\right)N_{y,i}. \quad (2.6)$$

Els factors  $A$  i  $B$  representen la influència mútua entre les dues espècies.

Amb aquestes equacions ja podríem anar treballant, però per comoditat treballarem sempre amb equacions normalitzades. En acabar els càlculs recuperarem les quantitats reals multiplicant per la quantitat emprada per normalitzar. Utilitzarem dues quantitats  $Q_x$  i  $Q_y$  definides per

$$Q_x \equiv \frac{K_x R_x}{R_x - 1},$$

$$Q_y \equiv \frac{K_y R_y}{R_y - 1},$$

per normalitzar les variables  $N_x$  i  $N_y$ . Aquestes quantitats  $Q$  representen el límit de validesa del model. Quan  $N > Q$  el model dona resultats absurds. Les variables normalitzades vindran donades per

$$x_i \equiv \frac{N_{x,i}}{Q_x},$$

$$y_i \equiv \frac{N_{y,i}}{Q_y}.$$

Les Eqs. 2.5 i 2.6 queden, en funció d'aquestes variables com

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - \alpha y_i)x_i,$$

$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i - \beta x_i)y_i.$$

La relació que hi ha entre les variables  $\alpha$  i  $\beta$  d'aquesta equació i les variables  $A$  i  $B$  és

$$A = \frac{Q_x}{Q_y} \alpha \tag{2.7}$$

$$B = \frac{Q_y}{Q_x} \beta \tag{2.8}$$

Hem d'anar, doncs, amb compte quan juguem amb les equacions normalitzades. Si variem els factors de creixement  $R$  també estem modificant el significat (encara que no canviem el seu valor) dels paràmetres que determinen la influència entre les dues espècies.

Com sempre, es comença amb uns valors inicials i a partir d'aquí es van obtenint els valors  $x_i$  i  $y_i$ . Després podem trobar els valors reals multiplicant cada variable per la seva  $Q$ . Pots practicar una mica fent l'activitat 2.

## 2.2.2 Relació presa–depredador

Un altre cop, utilitzem el model logístic donat per l'Eq. 2.4 per descriure una espècie que viu d'un recurs renovable però limitat. Aquesta vegada suposarem que hi ha un depredador que té a aquesta espècie com a presa.

Anomenem  $A$  a la probabilitat de que en un interval  $\Delta t$  de temps *un* depredador capturi *una* presa. En aquest cas caldrà modificar l'equació 2.4 afegint un terme que comptabilitzi el nombre d'exemplars capturats

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (R_x - 1)\left(1 - \frac{N_{x,i}}{K_x}\right)N_{x,i} - AN_{x,i}N_{y,i} \tag{2.9}$$

Pel que fa al depredador suposarem que cada membre té una certa probabilitat  $\delta$  de morir a cada torn i que fa falta un cert nombre de captures  $1/B$  per a que pugui generar un nou depredador. Això ens suggereix l'expressió

$$N_{y,i+1} = ABN_{x,i}N_{y,i} + (1 - \delta)N_{y,i} \tag{2.10}$$

Si volem, podem normalitzar aquestes equacions. Podem normalitzar la presa mitjançant les definicions

$$Q_x \equiv \frac{K_x R_x}{R_x - 1},$$

$$x_i \equiv \frac{N_{x,i}}{Q_x},$$

Discutim la normalització de la segona espècie, que, a diferència de la primera, no té ni  $K$  ni  $R$ . De fet, l'Eq. 2.10 és lineal en  $N_y$ . Això vol dir que podem escollir qualsevol quantitat  $C$  per normalitzar el nombre de depredadors

$$y_i \equiv \frac{N_{y,i}}{C}.$$

Aplicant aquestes definicions les Eqs. 2.9 i 2.10 es converteixen en

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i)x_i - \alpha x_i y_i, \quad (2.11)$$

$$y_{i+1} = \alpha \beta x_i y_i + (1 - \delta)y_i. \quad (2.12)$$

La relació entre els paràmetre  $\alpha$  i  $\beta$  de les equacions normalitzades i els paràmetres  $A$  i  $B$  de les equacions sense normalitzar ve donada per

$$A = \frac{1}{C}\alpha$$

$$B = \frac{C}{Q_x}\beta$$

Per simplificar l'estudi d'aquestes equacions podem treballar amb un model menys general però més senzill. Suposant  $\delta = 1$  i  $\alpha = R_x$  s'obté

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_x \beta x_i y_i$$

Per fixar idees pots realitzar les activitats 3 i 4.

### 2.2.3 Modelització mitjançant autòmats cel·lulars

Podem estudiar la relació entre preses i depredadors amb un autòmat cel·lular. L'autòmat estarà format per un conjunt de caselles que podran estar en 3 estats diferents: buid, presa i depredador. Les caselles evolucionaran per torn d'acord amb les següents regles

1. A cada torn, cada una de les preses es mou a l'atzar a una de les caselles properes buides.
  - (a) Si la seva edat arriba a l'edat de reproducció, llavors és converteix en dues preses d'edat 0. Una a la casella inicial i l'altra a la casella final.

- (b) Si no hi ha caselles properes buides, no es pot moure ni reproduir.
2. A cada torn, cada un dels depredadors es mou a l'atzar a una casella propera ocupada per una presa (eliminant-la!), o si no n'hi ha cap a una casella propera buida (també a l'atzar).
- (a) La reproducció dels depredadors és com la de les preses.
  - (b) Si totes les caselles properes estan ocupades per depredadors, no es poden moure ni reproduir.
  - (c) el depredador es eliminat si passa un cert nombre de torns sense fer una captura.

Els paràmetres del model són: nombre inicial de preses i depredadors, edat de reproducció de preses i depredadors i període de inanició.

Tot i que aquest autòmat no és del tot equivalent al model de la Secció 2.2.2, presenta un comportament qualitativament similar.

## 2.3 Modelització mitjançant sistemes d'equacions diferencials

La principal diferència entre els models on el temps està dividit en intervals discrets i els models on el temps és una variable contínua és que els primers s'expressen habitualment en forma d'equació de recurrència mentre que els segons s'escriuen en forma d'equacions diferencials.

Per poder tractar vèries variables ens cal un sistema d'equacions diferencials. Per a dues variables

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Una altra vegada, ens farà falta conèixer el nombre inicial de membres cada espècie,  $x_0$  i  $y_0$ . Això són el que s'anomenen *condicions inicials* i són un requisit indispensable per obtenir una solució, ja sigui analíticament o numèricament, de la forma

$$x(t)$$

$$y(t)$$

Podem representar aquestes funcions de la manera habitual, la variable independent a l'eix d'abscisses i la variable independent a l'eix d'ordenades. Alternativament podem representar la trajectòria. Per fer-ho, s'ha d'eliminar la variable  $t$  de les solucions per obtenir una funció de la forma

$$y(x)$$



Cada tipus de representació té els seus avantatges i els seus inconvenients. En el primer cas es fàcil observar l'evolució temporal. En el segon és posa més en relleu la relació entre les dues variables.

Tant la definició de punt fix com la condició matemàtica és igual que en el cas de les equacions de recurrència. Les Eqs. 2.1 i 2.2 són, doncs, vàlides en el cas de sistemes d'equacions diferencials. També es pot discutir l'estabilitat dels punts fixos a partir de les solucions de l'Eq. 2.3.

Una representació interessant és dibuixar vàries trajectòries, amb condicions inicials diferents, a la mateixa gràfica. Aquest tipus de representació ens permet visualitzar la posició dels punts fixos, òrbites i atractors. La seva definició és la mateixa que en el cas de les equacions de recurrència. També és vàlida la classificació de punts fixos de la Fig. 2.3.

## 2.4 Models continus

Els models que s'han vist a la Secció 2.2 també tenen la seva versió en forma d'equacions diferencials. Com passava en els models de creixement d'una sola espècie, hi ha diferències importants en el comportament de les solucions, especialment en el cas presa–depredador.

### 2.4.1 Competència pels mateixos recursos

Les equacions són, sense normalitzar,

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dt} &= r_x \frac{K_x - N_x - AN_y}{K_x} N_x \\ \frac{dN_y}{dt} &= r_y \frac{K_y - N_y - BN_x}{K_y} N_y\end{aligned}$$

on  $A$  i  $B$  tenen el mateix significat i les mateixes unitats que a les Eqs. 2.7 i 2.8. La relació entre els factors de creixement ( $R_x$  i  $R_y$ ) i les taxes de creixement ( $r_x$  i  $r_y$ ) és l'habitual

$$r = \frac{\ln R}{\Delta t} \quad (2.13)$$

En el cas continu, les equacions queden més senzilles si normalitzem emprant la capacitat  $K$  per comptes de la quantitat  $Q$  que s'utilitza en el cas discret. Per tant, normalitzem les variables  $N_x$  i  $N_y$  fent

$$\begin{aligned}x &= \frac{N_x}{K_x} \\ y &= \frac{N_y}{K_y}\end{aligned}$$

obtenim les equacions

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x - ay)x$$

$$\frac{dy}{dt} = r_y(1 - y - bx)y$$

on les equacions anàlogues a les Eqs. 2.7 i 2.8 són

$$A = \frac{K_x}{K_y}a$$

$$B = \frac{K_y}{K_x}b$$

Ara, aniria bé que fessis l'activitat 5.

## 2.4.2 Relació presa-depredador

La versió contínua sense normalitzar és

$$\frac{dN_x}{dt} = r \frac{K - N_x}{K} N_x - A' N_x N_y \quad (2.14)$$

$$\frac{dN_y}{dt} = A' B N_x N_y - d N_y \quad (2.15)$$

$A'$  és la probabilitat per unitat de temps de que un depredador capturi una presa. Podem relacionar  $A'$  amb la variable  $A$  de l'Eq. 2.9

$$A' = \frac{A}{\Delta t}$$

En canvi,  $B$  té el mateix significat que a l'Eq. 2.10. És l'invers del nombre de captures que ha de fer el depredador per reproduir-se. La relació entre  $d$  i la variable  $\delta$  del model discret és

$$d = \frac{\delta}{\Delta t}$$

ja que en aquest cas es tracta de la probabilitat de mort per unitat de temps.

La relació entre la taxa de creixement  $r$  i el factor de creixement  $R$  de l'Eq. 2.11 és la mateixa que la de l'Eq. 2.13.

Si normalitzem les variables  $N_x$  i  $N_y$  fent

$$x = \frac{N_x}{K}$$

$$y = \frac{N_y}{C}$$

obtenim les equacions

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - x)x - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = abxy - dy$$

La relació entre els paràmetres d'una i altra equació ve donada per

$$A' = \frac{a}{C}$$

$$B = \frac{C}{K}b$$

Per reforçar tota aquesta explicació, pot aplicar-la a l'activitat 6.

Un fet curiós és que aquest model continu dona uns resultats que no són similars als del seu equivalent discret. En canvi, si treiem la part logística de l'Eq. 2.14, per exemple fent el límit quan  $k$  tendeix a infinit, sí que obtenim resultats semblants als del model discret.

## Resum

Per entendre el creixement d'una espècie cal, en primer lloc, tenir una idea clara de quin és el seu creixement quan el nombre de membres encara no és un problema per aconseguir recursos. Després s'ha de concretar a partir de quin moment la densitat de membres comença a jugar un paper. Aquests són els factors que té en compte el model logístic. Depenen de les característiques de la pròpia espècie i també de les condicions externes.

Ara bé, aquest model és insuficient quan parlem de factors que afecten l'espècie però que, alhora, també en depenen. El més important d'aquests factors és la relació amb altres espècies.

Per poder modelitzar la relació entre espècies cal considerar les equacions de cadascuna de les espècies implicades i acoblar-les amb una interacció. La forma concreta d'aquesta interacció depèn del tipus de relació que s'estableixi. Pot ser una relació de competència per uns recursos renovables però que no estan disponibles en quantitats il·limitades. També pot ser que una de les espècies sigui l'aliment de l'altra. Encara existeixen altres tipus de relació, com la simbiosi o la relació paràsit–hoste, que no s'han tractat.

A l'igual que quan parlàvem del creixement d'una sola espècie, podem modelitzar el temps de manera discreta o contínua. En qualsevol cas, al considerar diverses espècies passem a treballar amb sistemes d'equacions. La major part dels conceptes emprats en una variable són vàlids quan en tenim diverses. Uns pocs són lleugerament diferents, la qual cosa s'haurà de tenir en compte per planificar els càlculs. El més notable és que amb diverses variables s'amplia el nombre de representacions gràfiques possibles.

Un cas apart és el dels models extensius. Si utilitzem un autòmat cel·lular tan sols caldrà afegir nous tipus de caselles, que representaran diferents espècies. També s'hauran d'ampliar les regles per modelitzar la interacció entre aquestes espècies.

S'ha posat una especial atenció en la qüestió de la normalització de les equacions. Encara que a primer cop de vista pot semblar una complicació, el fet de tenir menys paràmetres ens permet extreure conclusions generals més fàcilment.

## Glossari

**acoblades** Es diu de les equacions que tenen variables en comú.

**conjunt de mesura nul·la** Per exemple, un segment contingut en un rectangle és un conjunt de mesura nul·la, malgrat tenir infinits punts, ja que la seva superfície és infinitesimal en comparació amb la del rectangle.

**trajectòria** Lloc geomètric format pels punts el valor dels quals assoleix el sistema.

## Referències addicionals

- **Ricard V. Solé i Susanna C. Manrubia:** *Orden y caos en sistemas complejos*. Edicions UPC, Barcelona (1996).  
Llibre sobre caos amb molts apartats referents a les equacions de la Biologia Matemàtica.
- **Jonathan Roughgarden:** *Primer in ecological theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River (1998).  
Llibre de text sobre Biologia Matemàtica.
- **Alfred J. Lotka:** *Elements of mathematical biology*. Dover, New York (1956).  
Un dels llibres clàssics sobre el tema encara que potser és massa ambiciós en algunes parts. Té capítols interessants.

## Activitats

1. Troba els punts fixos del sistema d'equacions de recurrència

$$x_{i+1} = -7x_i + 3(5 - x_i)x_i + 4x_iy_i$$

$$y_{i+1} = x_i(2 - y_i)y_i + y_i$$

i discuteix la seva estabilitat.

2. Dues espècies que competeixen per una mateixa font de recursos estan descrites pel sistema d'equacions d'equacions de recurrència

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (0.7 - 1) \left( 1 - \frac{N_{x,i} - 0.03N_{y,i}}{1000} \right) N_{x,i}$$

$$N_{y,i+1} = N_{y,i} + (0.5 - 1) \left( 1 - \frac{N_{y,i} - 0.001N_{x,i}}{100} \right) N_{y,i}$$

Normalitza aquest sistema d'equacions.

3. Consulta un llibre de Zoologia o una enciclopèdia. Amb aquesta informació, enuncia 5 parelles d'espècies que tinguin una relació presa-depredador.
4. El següent sistema d'equacions normalitzades descriu la relació entre una presa i el seu depredador

$$x_{i+1} = 1.04(1 - x_i)x_i - 1.5x_iy_i$$

$$y_{i+1} = 1.5 \cdot 0.01x_iy_i + 0.01y_i$$

En un cert instant de temps, s'assoleixen els valors  $x = 0.2$  i  $y = 0.05$ . Si per normalitzar el depredador s'ha escollit  $C = 750$  i es coneix que la capacitat de la presa es  $K_x = 750$ , quin és el nombre d'exemplars de cada espècie? Quant val la probabilitat  $A$  de que un depredador capturi una presa en el transcurs d'un torn?

5. Escribeu el sistema d'equacions diferencials sense normalitzar que correspon a aquest sistema d'equacions normalitzades

$$\frac{dx}{dt} = 0.8(1 - x - 0.01y)x$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.7(1 - y - 0.02x)y$$

si les capacitats de les espècies són  $K_x = 2000$  i  $K_y = 1000$ .

6. Si normalitzem aquest sistema d'equacions diferencials, que descriuen la interacció entre una presa i un depredador,

$$\frac{dN_x}{dt} = 0.5 \cdot \frac{750 - N_1}{750} N_x - 0.01 N_x N_y$$

$$\frac{dN_y}{dt} = 0.01 \cdot 0.02 N_x N_y - 0.1 N_y$$

quins són els paràmetres  $\alpha$  i  $\beta$  que en resultarien? Escriu un sistema d'equacions de recurrència que en sigui equivalent, suposant que les unitats de temps de les equacions anteriors són anys. Especifica quin valor de  $\Delta t$  has escollit.

7. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques d'aquesta unitat.



## Exercicis d'autocomprovació

1. Els paràmetres  $A$  i  $B$  que corresponen al sistema normalitzat

$$x_{i+1} = 1.7(1 - x_i - 0.02y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = 1.5(1 - y_i - 0.01x_i)y_i$$

són, si  $K_x = 1000$  i  $K_y = 100$ ,

(a)  $A = 0.13$   $B = 1.1 \times 10^{-3}$

(b)  $A = 0.17$   $B = 1.2 \times 10^{-3}$

(c)  $A = 0.16$   $B = 1.2 \times 10^{-3}$

(d) Cap de les anteriors

2. Els paràmetres  $\alpha$  i  $\beta$  del sistema

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + (1.05 - 1)\left(1 - \frac{N_{x,i}}{500}\right)N_{x,i} - 0.001N_{x,i}N_{y,i}$$

$$N_{y,i+1} = 0.001 \cdot 0.03N_{x,i}N_{y,i} + (1 - 0.01)N_{y,i}$$

un cop normalitzat són (si empren la mateixa normalització per a les dues variables)

(a)  $\alpha = 0.001$   $\beta = 0.03$

(b)  $\alpha = 10.5$   $\beta = 30$

(c)  $\alpha = 0.001$   $\beta = 30$

(d)  $\alpha = 10.5$   $\beta = 0.03$

3. El sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = xy - 20$$

té com a punts fixos

- (a)  $x = 8$   $y = 10$
- (b)  $x = 4$   $y = 5$
- (c)  $x = 4$   $y = 7$
- (d)  $x = 2$   $y = 2.5$

4. Si volem normalitzar la variable  $N_y$  del següent sistema

$$\frac{dN_x}{dt} = 0.8\left(1 - \frac{N_x + 2.0N_y}{1000}\right)N_x$$

$$\frac{dN_y}{dt} = 0.6\left(1 - \frac{N_y + 0.25N_x}{1100}\right)N_y$$

caldrà utilitzar la quantitat

- (a) 1000
  - (b) 1100
  - (c) 2250
  - (d) 2933
5. En un model presa–depredador hem aplicat la mateixa normalització per a la presa que per al depredador. Si la capacitat de la presa és  $K_x = 1000$ ,  $y = 0.3$  vol dir
- (a) 3000
  - (b) 300
  - (c) 30
  - (d) 3
6. Si en un model presa–depredador continu  $A' = 0.01$ , llavors en un model discret a on  $\Delta t = 0.1$ ,  $A$  valdrà
- (a) 0.1
  - (b) 0.01
  - (c) 0.001
  - (d) 0.0001

## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (c) 2. (d) 3. (b) 4. (a) 5. (b) 6. (c)

## **Unitat 3**

### **Destrucció de l'hàbitat**

## Presentació

Quan parlem de destrucció de l'hàbitat tothom té al cap una idea molt a grans trets del fenomen, desprovista de qualsevol subtilesa. Així doncs, pensem sovint en una destrucció massiva i lineal. Es comença a destruir un ecosistema per una banda i s'acaba de destruir per la banda contrària.

Potser en ocasions ha estat així, especialment quan la destrucció ha estat ocasionada per la construcció de grans obres d'enginyeria. Podem citar el cas dels grans embassaments d'aigua, entre d'altres.

No obstant, en la major part dels casos, la destrucció d'un ecosistema és un procés lent que no té una localització definida. Els seus efectes no es deixen sentir d'immediat. De fet, un ecosistema es pot destruir en certa mesura sense que els efectes siguin evidents. Sovint, però, els efectes de la destrucció arriben de sobte, sense que res indiqui que la destrucció d'un petit percentatge de l'hàbitat tindrà una repercussió sobre el sistema que no ha tingut el conjunt dels canvis precedents.

Això sol passar en aquelles situacions en que la destrucció de l'hàbitat no segueix una sistemàtica sinó que es va duent a terme en petits passos localitzats aleatòriament en l'espai i en el temps.

Pensem, per fixar idees, en la urbanització d'una àrea forestal. En primer lloc, potser s'establiran unes poques explotacions agrícoles, ben separades. Més endavant, s'establiran petits nuclis de xalets, també situats a l'atzar. El procés continuarà amb l'aparició dels nous nuclis i el creixement dels ja existents. L'hàbitat original es conservarà en certa mesura però cada cop en porcions més petites i nombroses.

En una situació com la que hem esmentat, cal esperar que els efectes de la *fragmentació* de l'hàbitat siguin més importants que els de la seva destrucció pròpiament dita. En aquesta unitat estudiarem de forma qualitativa però formal els motius d'aquest fenomen i en destacarem la seva universalitat. En altres paraules, veurem que els mateixos motius que l'expliquen, es poden trobar en una gran varietat de situacions físiques. Finalment, proposarem maneres de minimitzar l'impacte d'aquests canvis, en el cas que sigui impossible evitar-los.

## **Objectius**

- Explicar el concepte geomètric de percolació.
- Nomenar les propietats universals de l'estat crític.
- Utilitzar un autòmat cel·lular per modelitzar la destrucció d'un hàbitat.
- Demostrar que els efectes de la fragmentació no són proporcionals a la quantitat d'hàbitat destruït.
- Enunciar els diferents efectes de la fragmentació de l'hàbitat.

## **Esquema**

1. Concepte de percolació
2. La percolació com a fenomen crític
  - (a) Concepte de transició de fase
  - (b) Què són els fenòmens crítics?
  - (c) Temperatura, paràmetre d'ordre i longitud de correlació
3. Un model simplificat de destrucció de l'hàbitat
4. Efectes de la fragmentació de l'hàbitat
  - (a) Efecte de vores
  - (b) Estocasticitat demogràfica
  - (c) Deriva genètica

### 3.1 Concepte de percolació

Considerem un tauler de caselles quadrades que poden estar en dos estats diferents. Anomenem a un estat "ocupat" i a l'altre "buid" comencem amb un tauler a on totes les caselles estiguin ocupades.

Cada casella del tauler tindrà 4 veïnes: la de dalt, la de sota, la de l'esquerra i la de la dreta.

Pensem ara en un camí que vagi des de la part superior del tauler fins a la part inferior. Aquest camí ha de creuar el tauler passant d'una veïna a l'altra i, per tant, podrà tenir segments verticals i horitzontals però en cap cas diagonals (veure Fig. 3.1).

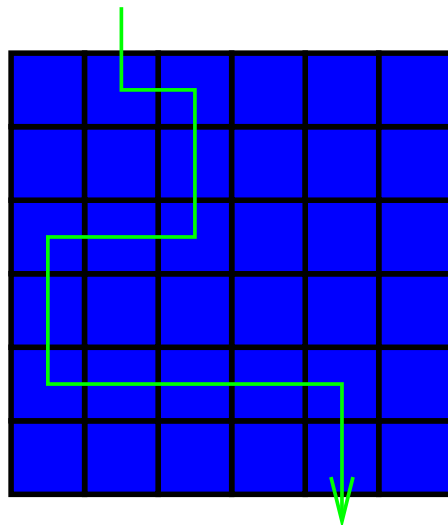


Figura 3.1: Exemple de camins en un tauler

És trivial veure que tots els camins que compleixen la condició anterior passen tan sols per caselles ocupades. De fet, diem que hi ha *percolació* quan hi ha almenys un camí, que travessa el tauler passant d'una casella veïna a una altra, format tan sols per caselles ocupades.

Ara, escollim una casella a l'atzar i la "buidem". Segurament hi continuarem havent percolació. Buidem-ne una altra i anem repetint aquest procés en successives vegades (veure Fig. 3.2).



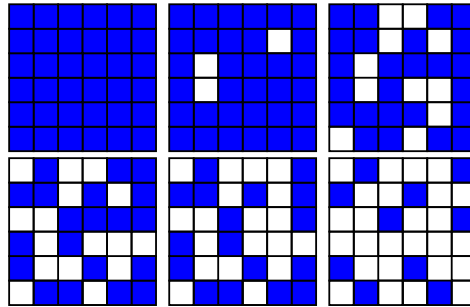


Figura 3.2: A mida que anem buidant caselles es fa més difícil trobar un camí que travessi el tauler

Arribarà un moment en que ja no serà possible trobar un camí de les característiques esmentades abans. Llavors, hi deixarà d'haver percolació.

El problema de la percolació està relacionat amb el problema de la mida de l'illa més gran. Entenem que dues caselles formen part de la mateixa illa si es possible establir un camí entre les dues caselles que vagi passant per caselles veïnes i, a més, totes les caselles per on passa el camí estan ocupades (veure Fig. 3.3)

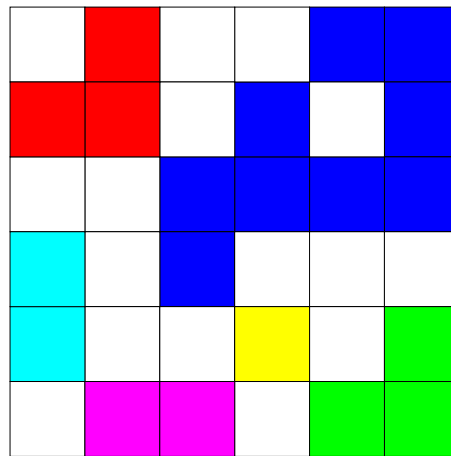


Figura 3.3: Les illes estan pintades amb colors diferents

Quan totes les caselles estan ocupades, l'illa més gran és, senzillament, tot el tauler. Si buidem unes poques caselles, l'illa més gran ja no estarà formada per totes les caselles del tauler, però sí per totes les caselles ocupades. Ara bé, si continuem amb el procés de buidar caselles arribarà un moment en que l'illa més gran ja no estarà formada per la totalitat de les caselles ocupades. A partir d'aquí, l'illa més gran estarà formada per cada cop menys caselles fins que al final del procés tindrà una sola casella.

Tal com ho hem presentat, la percolació és un fenomen geomètric. Tanmateix, hi ha molts fenòmens a la vida real que es poden modelar mitjançant la

percolació. Per posar uns pocs exemples, mencionem la ruptura d'un dielèctric (veure glossari), l'extinció natural d'un incendi, el contagi de malalties i la permeabilitat d'una roca. De fet, aquest darrer cas va ser el que va esperonar l'estudi de la percolació, pensant sobre tot en les aplicacions a l'extracció de petroli.

**Curiositat:** La preparació de cafè també és un procés de percolació. Si ho dubteu, proveu de fer-vos el cafè amb una quantitat de cafè clarament inferior a la que hi cap a la cafetera

## 3.2 La percolació com a fenomen crític

### 3.2.1 Transicions de fase de primer i segon ordre

Ara que hem vist intuïtivament en què consisteix la percolació, cal fer una petita digressió cap a altres temes, per poder ser capaços d'entendre-la des d'un punt de vista formal.

Parlem en primer lloc de les transicions de fase. Tothom identifica fenòmens quotidians, com l'ebullició de l'aigua o la fusió del gel, com a transicions de fase. El més característic de les *transicions de fase* és que tenen lloc quan a una substància es produeix un canvi de les propietats relacionades amb *l'ordre a nivell microscòpic*. Per exemple, és molt diferent l'ordenació de les molècules d'aigua quan formen un cristall de gel que quan formen aigua en estat líquid. Un altre tret destacable és que tan sols té sentit parlar de transicions de fase en sistemes formats per moltíssimes molècules.

Per fixar idees, centrem-nos en el cas de l'aigua. Per a una pressió i una temperatura donades tan sols hi ha una fase en la que es pugui trobar. Podem fer un *diagrama de fases* que reculli informació experimental i ens indiqui quina és aquesta fase, en funció de la temperatura i de la pressió (veure Fig. 3.4).

Les línies que separen les fases s'anomenen *línies de coexistència*. Ens indiquen per a quins valors de temperatura i pressió podem tenir en equilibri dues fases simultàniament.

El *punt crític*, per la seva banda, és el final de la línia de coexistència líquid-vapor. Per a temperatures o pressions superiors a la del punt crític no hi ha una diferència clara entre la fase líquida i la fase gasosa.

Si volem dur el sistema des d'un punt situat en una fase fins a un altre punt situat en una fase diferent, probablement haurem de creuar una línia de coexistència. En aquest moment tindrà lloc una *transició de fase de primer ordre*. Aquest tipus de transició es caracteritza per que mentre succeeix, la capacitat calorífica (veure glossari) és fa infinita. Fixem-nos, sense anar més lluny, en l'ebullició de l'aigua. Comença a bullir quan arriba als 100 C i fins que no s'ha convertit completament en vapor no és possible augmentar la seva

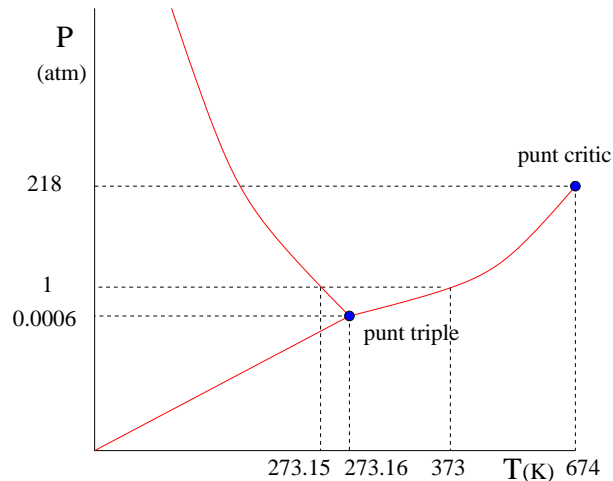


Figura 3.4: Diagrama de fases de l'aigua

temperatura. Tota l'energia subministrada s'inverteix en alterar l'ordre de les molècules.

Mentre dura la transició de primer ordre, l'aigua es troba a la línia de coexistència i per tant hi haurà una barreja de dues fases.

Si observem el diagrama de fases, és possible passar de la fase líquida a la gasosa sense passar per la línia de coexistència, fent un tomb que passi "per sobre" del punt crític. Encara que sembli mentida, això és possible i el resultat és que haurem convertit l'aigua líquida en vapor d'una manera gradual, sense cap canvi brusca i, per tant, sense cap transició de fase.

Finalment, és possible anar de la fase líquida a la fase gasosa "trepitjant" el punt crític. A sobre del punt crític tindrà lloc el que s'anomena una *transició de fase de segon ordre*. Des del punt de vista termodinàmic, la capacitat calorífica no es fa infinita durant aquest tipus de transició. Tan sols canvia de valor abruptament, però sense divergir en cap moment.

Abans de passar al proper apartat, pots fer l'activitat 1.

**Curiositat:** El gel és tan sols una de 8 fases sòlides en què pot existir l'aigua, encara que les altres tan sols es poden presentar en condicions artificials de pressió i temperatura.

### 3.2.2 Fenòmens crítics

Una transició de fase de segon ordre és un cas particular de *fenomen crític*. No és difícil veure que en el punt crític l'aigua es troba en un estat amb unes propietats molt particulars.

Quan som al punt crític, una petita variació de la pressió o de la temperatura pot fer que el sistema passi a l'estat líquid, a l'estat gasós, a una barreja dels dos o a un estat on ambdues coses són el mateix.

Suposem que tenim aigua en un punt de la línia de coexistència. Si observem el sistema des de lluny, observarem regions en estat líquid i regions en estat gasós. Potser observarem que aquestes regions tenen mides molt diferents però si ens mirem el sistema de més a prop veurem que cadascuna d'aquestes zones té una mida finita i es troba en un estat ben definit (veure Fig. 3.5).

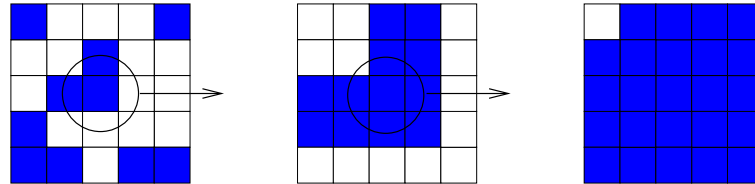


Figura 3.5: Sistema a la línia de coexistència, vist a vèries escales

A primer cop de vista, no observarem cap diferència al punt crític. De nou tindrem una distribució de regions líquides i gasoses de diverses mides. No obstant, si ho mirem de més a prop no podrem trobar una regió que estigui clarament en fase líquida o en fase gasosa. A mida que ens acostem, se'ns apareixeran nous detalls que faran que mai es vegi una zona que estigui en una fase ben definida (veure Fig. 3.6)

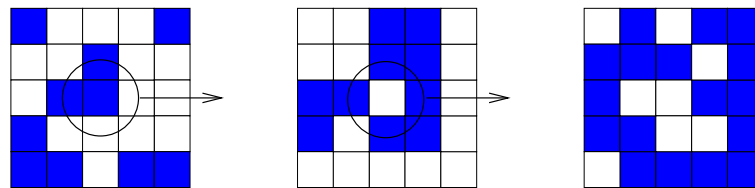


Figura 3.6: Sistema al punt crític, vist a vèries escales

Resumint, la diferència entre el punt crític i la línia de coexistència és que al punt crític el sistema té el mateix aspecte a qualsevol escala. En altres paraules té una *estructura fractal*.

Comentem molt breument tres quantitats, que ens faran servei més endavant. Són la *temperatura crítica*, el *paràmetre d'ordre* i la *longitud de correlació*.

La temperatura crítica és la temperatura a la que té lloc la transició de fase de segon ordre. El paràmetre d'ordre és una quantitat que val 1 a la fase més ordenada i 0 a la fase més desordenada. Normalment, és el promig d'una quantitat microscòpica. Finalment, la longitud de correlació és la distància a la qual arriba la influència d'una molècula. En principi les forces entre molècules són de curt abast però les característiques del punt crític fan que, com a les figures fetes amb fitxes de dominó, la influència d'una molècula arribi a qualsevol punt del sistema. Així doncs, la longitud de correlació es fa infinita o, com a mínim, del mateix ordre de magnitud que la mida del propi sistema.

### 3.2.3 Aplicació a la percolació

La percolació és en realitat un concepte geomètric i no un fenomen físic. Així i tot, els conceptes que s'utilitzen per a l'estudi dels fenòmens crítics es poden aplicar sense cap problema.

Tornem al tauler ple de caselles i mirem com podem aplicar aquestes idees. En primer lloc ens cal un concepte que sigui equivalent al de temperatura. Podem interpretar que els taulers de la Fig. 3.2 són a “temperatures” diferents. Recordem que la diferència entre aquests taulers tan sols és el nombre de caselles ocupades, després d'un procés consistent en anar buidant caselles de manera aleatòria. Agafarem, doncs, com a temperatura (en rigor, com a inversa de la temperatura) *la fracció de caselles ocupades*.

$$\beta = \frac{n_o}{n} = \frac{n_o}{n_o + n_b}$$

Definirem la fase ordenada com aquella a on els camins per creuar el sistema passant per caselles ocupades són molt abundants. La fase desordenada serà, en canvi, aquella a no hi haurà aquest tipus de connexió entre els extrems del sistema.

Abans hem vist que això també es pot expressar mitjançant la mida de l'illa més gran. A la fase ordenada totes les caselles ocupades formaran part de l'illa més gran. En canvi, a la fase desordenada fins i tot l'illa més gran estarà formada per una sola casella. Ens cal un nombre que sigui igual a 1 en el primer cas i igual a 0 en el segon. Anomenem  $n_{max}$  a la mida de l'illa més gran. El paràmetre d'ordre serà

$$\theta = \frac{n_{max}}{n_o}$$

Pel que fa a la longitud de correlació, podem considerar que  $n_{max}$  és una quantitat més o menys equivalent.

Cal tenir una idea ben clara: si apliquem aquestes definicions a un tauler de  $20 \times 20$ , no obtindrem una transició de fase. Si tinguéssim una transició de fase de veritat aniríem treient caselles de manera aleatòria i en un cert moment el valor de la variable  $\theta$  passaria de sobte de 1 a 0. Recordem que les transicions de fase necessiten de la participació d'infinites partícules (en aquest cas, caselles).

El que obtindrem és un comportament semblant al d'una transició de fase. El paràmetre d'ordre  $\theta$  valdrà gairebé 1 per a un bon interval de la variable  $\beta$ , tindrà una baixada acusada i finalment assolirà un valor de gairebé 0 pels valors més petits de  $\beta$ .

Això sí, com més caselles fem servir, més semblant serà el comportament del sistema al d'una transició de fase.

Pots posar en pràctica aquests conceptes tot fent l'activitat 2.

### 3.3 Model d'autòmat cel·lular per a la destrucció de l'hàbitat

Ha arribat el moment d'aplicar tot el que hem vist sobre la percolació a la destrucció de l'hàbitat. Per fer-ho, construirem un autòmat cel·lular que ens permeti estudiar com evoluciona el nombre de membres d'una espècie a un hàbitat parcialment destruït.

Recordem que un autòmat cel·lular és un conjunt de caselles, que poden estar en varis estats. Les caselles van evolucionant per torns. S'ha de complir que l'estat de cada casella depengui tan sols de l'estat d'altres caselles veïnes a l'instant anterior i/o de la seva pròpia història. En cas contrari, no es tracta d'un veritable autòmat cel·lular.

L'autòmat que farem servir consistirà en un tauler quadrat de caselles. Cada casella representarà un tros de territori. La principal novetat d'aquest autòmat és que una part de les caselles estaran "inutilitzades". Aquestes caselles representen l'hàbitat destruït i en cap cas podran allotjar vida. Aquestes caselles seran en un estat que anomenarem *inhabitable*.

Ara entra en joc el concepte de percolació. Intentarem simular la destrucció de l'hàbitat amb el mateix procés que hem emprat abans per fer canviar la "temperatura" del sistema. Anirem marcant caselles com a inhabitables de manera aleatòria. El nombre de caselles de caselles que farem inhabitables dependrà del grau de destrucció de l'hàbitat que es vulgui simular.

El resultat es que el tauler ara té dos tipus de caselles, les inhabitables i les habitables. Les caselles habitables representen la part del territori que encara és capaç de mantenir vida. Si observem la seva configuració, estarà format per illes més o menys grans dependent del grau de destrucció de l'hàbitat.

Aquesta configuració geomètrica de les caselles que poden sustentar vida és la clau del model.

Per la seva banda, les caselles habitables podran estar en dos estats diferents, segons hi hagi vida o no. Anomenarem aquests estats *habitat* i *habitable no habitat*, respectivament. Es pot passar de qualsevol d'aquests dos estats a l'altre. La vida en una casella habitada es pot extingir per causes naturals i llavors passa a habitable no habitada. Al contrari, una casella habitable però no habitada podrà ser colonitzada si té una casella habitada com a veïna.

En resum, en el nostre autòmat hi haurà tres tipus de caselles: inhabitables, habitables no habitades i habitades. En concret farem servir aquestes regles:

1. Una casella inhabitable sempre serà inhabitable.
2. Una casella habitable que tingui, com a mínim, una veïna habitada té una probabilitat del 20% d'esdevenir habitada al torn següent.
3. Una casella habitada té una probabilitat del 20% de convertir-se en habitable en el torn següent.

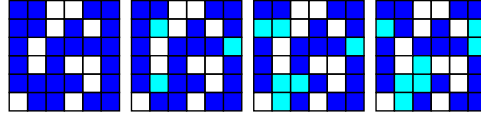


Figura 3.7: Regles de l'autòmat cel·lular

La simulació es desenvolupa segons els passos que es poden veure a la Fig. 3.3. En primer lloc, dividirem les caselles en inhabitables i habitables, escollint aleatòriament un nombre donat d'inhabitables. Després escollirem un altre nombre donat de caselles habitables i les marcarem com a

habitades. A partir d'aquest moment, aplicarem les regles de l'autòmat per fer evolucionar el sistema.

El sentit comú ens diu que el nombre de caselles habitades inicialment ha de jugar un cert paper i també que la destrucció d'un cert percentatge de l'hàbitat comportarà, a llarg termini, una reducció proporcional de l'espècie que l'habita.

Els resultats de l'autòmat cel·lular, que es poden observar a la Fig. 3.8, indiquen tot el contrari: la reducció és més forta que si fos proporcional i per sota d'un cert umbral l'espècie s'extingeix encara que la destrucció de l'hàbitat no sigui total.

A més, el resultat final no depèn del nombre inicial de caselles habitades. Al final, el destí de l'espècie depèn tan sols de la geometria de l'espai que pot colonitzar.

Per entendre el perquè d'aquests resultats cal recordar el concepte de percolació i el de transició de fase, no sense certes precaucions. Podem anar buidant caselles d'un tauler sense que hi deixi d'haver percolació o, vist des d'un altre punt de vista, sense que l'hàbitat es fragmenti significativament. Ara bé, a partir d'un cert moment, que coincideix amb la  $\beta$  crítica de la percolació, una petita destrucció de l'hàbitat comportarà una fragmentació molt gran.

Deduïm, per tant, que la destrucció d'un cert percentatge de superfície pot tenir efectes molt diferents depenent del grau de destrucció previ de l'hàbitat. En qualsevol cas, la fragmentació juga un paper determinant en l'impacte de la destrucció de l'hàbitat

### 3.4 Efectes de la fragmentació de l'hàbitat

La fragmentació afecta a les espècies que habiten un ecosistema de diverses formes, però de fet només n'hi ha una que es tingui en compte a la simulació de l'apartat anterior. Es tracta de *l'efecte de vores*, que és merament geomètric.

Per entendre'l cal seguir la Fig. 3.9. En ambdues configuracions la probabilitat de que una casella habitada es converteixi en deshabitada és la mateixa. En el cas amb hàbitat no destruït això es veu compensat pel fet que hi ha 8 caselles

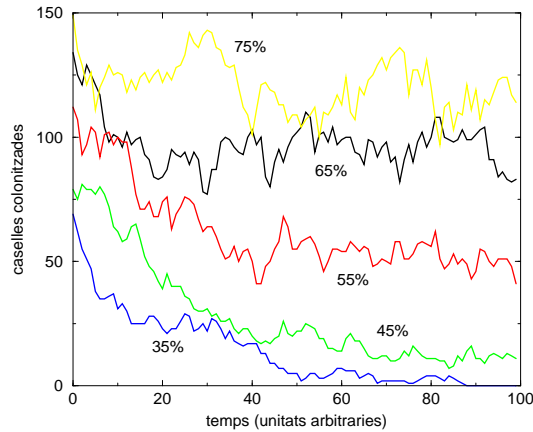


Figura 3.8: Evolució en funció de la destrucció de l'hàbitat

per colonitzar mentre que en el cas amb hàbitat destruït n'hi ha exactament la meitat.

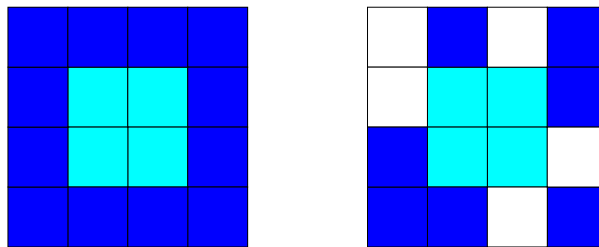


Figura 3.9: Efecte de vores

Aquest efecte es dona en certa mesura en la realitat, però n'hi d'altres tan importants com aquest o més.

Ja hem vist en què consisteix *l'estocasticitat demogràfica*. Bàsicament, es deguda a la dispersió en el nombre de descendents dels membres d'una espècie. El resultat és una aleatoritat en el nombre de membres que és molt més important per a poblacions petites. Aquestes fluctuacions (veure glossari) aleatòries del nombre de membres d'una espècie poden portar a la seva extinció. La fragmentació potencia els efectes de l'estocasticitat demogràfica en reduir la mida de les poblacions.

Un altre efecte important és el de la *deriva genètica* que es produeix quan un nombre relativament petit de membres d'una espècie queden aïllats. Si un dels membres de l'espècie té, per casualitat, un tret hereditari (veure glossari) que sigui rar en poblacions grans, automàticament passa a ser més freqüent en aquest àmbit més reduït. Per aquest motiu, malalties hereditàries molt poc freqüents poden arribar a convertir-se en habituals en poblacions aïllades. El resultat és un afebliment de la població que pot dur, en casos extrems, a la seva desaparició.





## Resum

S'ha vist el tema de la destrucció de l'hàbitat des d'un punt de vista diferent a l'habitual. Per comptes de preocupar-nos dels efectes obvis deguts a la disminució de la mida, hem mirat de quantificar els efectes causats per la fragmentació.

Per poder-ho fer, ha estat útil el concepte de percolació, que en principi és un concepte merament geomètric. A més, ha fet falta introduir el comportament crític, que és una de les característiques més notables de la percolació. Tot això ens ha permès fer una analogia amb les transicions de fase. El grau de destrucció té un paper semblant al de la temperatura de manera que, a partir d'un cert grau de destrucció, les propietats de l'hàbitat canvien radicalment, com a mínim pel que fa a la fragmentació.

Hem introduït un autòmat cel·lular per estudiar aquest comportament. Una anàlisi dels resultats ens confirma que malgrat la senzillesa de les seves regles es capaç de tenir en compte la fragmentació. Ara be, aquesta mena de models tan sols poden tenir en compte els efectes geomètric com ara l'efecte de vores. A la realitat, caldria afegir-hi altres efectes negatius produïts per la fragmentació, com l'estocasticitat demogràfica o la deriva genètica.

En qualsevol cas, la conclusió més important és que els efectes de la fragmentació poden arribar a ser més importants que els derivats de la disminució de l'espai disponible. Segons el model estudiat, que no té en compte tots els efectes negatius possibles, una espècie es pot extingir malgrat que encara li quedi una certa fracció d'hàbitat disponible. Per aquest motiu, és imprescindible establir corredors biològics per disminuir l'impacte de la destrucció de l'hàbitat.

## Glossari

**capacitat calorífica** És una quantitat que ens indica la quantitat de calor necessària per augmentar la temperatura d'un material.

**dielèctric** Material pel qual no hi pot circular el corrent elèctric.

**fluctuacions** Variacions al voltant d'un valor mig, degudes normalment a causes aleatòries.

**tret hereditari** Característica que es deguda al genoma i no al medi ambient. Es transmet als descendents.

## Referències addicionals

- **Ricard V. Solé i Susanna C. Manrubia:** *Orden y caos en sistemas complejos*. Edicions UPC, Barcelona (1996).

Llibre sobre caos amb molts apartats referents a les equacions de la Biologia Matemàtica.

## Activitats

1. Busca en un llibre de Termodinàmica o de Física General un exemple de transició de fase de primer ordre i un altre de transició de fase de segon ordre.
2. Pel tauler de la Fig. 3.11 troba
  - (a) La fracció de caselles ocupades
  - (b) La mida de l'illa més gran
  - (c) El paràmetre d'ordre
  - (d) Un histograma de les mides de les illes

Considera condicions de contorn toroïdals (la primera casella d'una fila es veïna de la darrera i el mateix passa a una columna).

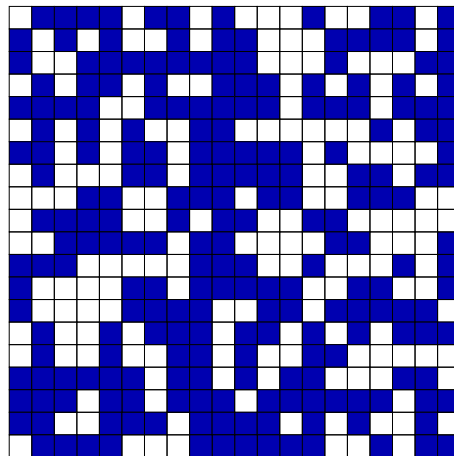


Figura 3.11: Exemple de percolació

3. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.

## Exercicis d'autocomprovació

1. Quin d'aquests fenòmens no té res a veure amb la percolació
  - (a) La propagació d'un rumor
  - (b) Una epidèmia
  - (c) La caiguda d'un llamp
  - (d) Tots els anteriors hi tenen a veure
2. A una transició de fase de primer ordre, la magnitud que es fa infinita és
  - (a) El volum
  - (b) La temperatura
  - (c) La capacitat calorífica
  - (d) La pressió
3. Una característica dels fenòmens crítics és que ...
  - (a) tenen a veure amb els fractals.
  - (b) tan sols es poden observar al laboratori.
  - (c) no han estat molt estudiats pels científics.
  - (d) Cap de les anteriors.
4. Les regles de l'autòmat cel·lular que s'ha presentat no permeten que ...
  - (a) una casella habitable no habitada es converteixi en habitada.
  - (b) una casella habitada es converteix en habitable no habitada.
  - (c) augmenti el nombre de caselles habitades.
  - (d) una casella inhabitable es converteixi en inhabitable.
5. Quina de les següents afirmacions sobre la deriva genètica es falsa
  - (a) És el principal mecanisme que ha dut a la diferenciació dels éssers humans

- (b) És el motiu pel qual algunes malalties hereditàries siguin endèmiques en comunitats aïllada.
- (c) Sempre produeix l'afebliment d'una comunitat aïllada.
- (d) Totes són certes

## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (d) 2. (c) 3. (a) 4. (d) 5. (c)



## **Unitat 4**

# **Difusió de contaminants a l'atmosfera**

## Presentació

El medi ambient és el conjunt de components físics, químics, biològics i socials capaços de causar efectes directes e indirectes, en un termini curt o llarg, sobre els éssers vius i les activitats humanes. (Definició de la Conferència de les Nacions Unides sobre Medi Ambient a Estocolm 1972).

En la segona meitat del segle XX ens vàrem trobar, de forma inesperada, amb una situació nova: els grans avenços científics han portat amb ells importants problemes. La civilització industrial ha anat alterant l'ambient d'una forma tan poderosa que ha arribat a ser una amenaça per a l'equilibri del planeta. L'atmosfera és essencial per a la vida. Les seves alteracions tenen una gran repercussió en l'home i altres éssers vius i, en general, en tot el planeta. És un medi extraordinàriament complex i la situació es fa encara més complicada i difícil d'estudiar quan se li afegeixen emissions d'origen humà en gran quantitat, com està succeint en aquestes últimes dècades. Per la seva importància per a la vida, és imprescindible fer pronòstics de contaminació atmosfèrica, per a intentar preveure les conseqüències dels possibles canvis atmosfèrics a mig i llarg termini.

L'eliminació total de l'emissió de contaminants d'origen antropogènic a l'atmosfera resulta materialment impossible, i encara la seva necessària reducció està condicionada per factors polítics, econòmics i socials. Per a controlar de forma òptima la contaminació atmosfèrica és necessari un estudi dels efectes dels contaminants i poder analitzar la relació entre els nivells d'emissió de contaminants amb els nivells d'immissió. Per a determinar aquesta relació emissió-immissió s'utilitzen diferents models matemàtics. Són sistemes d'equacions que intenten reproduir el món real. S'utilitzen dades conegudes com, per exemple, la reacció d'un petit volum d'aigua, d'aire o de gas sotmès al calor, a la radiació solar o a diferents condicions climatològiques.

En aquesta unitat estudiarem la contaminació atmosfèrica provocada per les xemeneies que són fonts emissores directes de diferents substàncies tòxiques. Tractarem la difusió dels contaminants mitjançant el model gaussià i analitzarem la simulació de la trajectòria de les partícules per diferents distribucions verticals de temperatures amb inversions tèrmiques situades a diferents alçades.

## Objectius

- Identificar les característiques més rellevants de l'atmosfera.
- Distingir i classificar els principals tipus de contaminants atmosfèrics i establir a partir de quina concentració són perjudicials per a la salut.
- Enunciar els principals fenòmens meteorològics que intervenen en la dispersió dels contaminants atmosfèrics.
- Explicar el paper que juguen l'estabilitat i la turbulència atmosfèrica en la dispersió dels contaminants emesos per les xemeneies.
- Raonar les principals idees en que es basen els models numèrics. Llistar les aproximacions i suposicions implícites al model gaussià.

# Esquema

## 1. L'atmosfera

### (a) Zones de l'atmosfera

- i. Troposfera
- ii. Estratosfera
- iii. Mesosfera
- iv. Ionosfera

### (b) Composició de l'aire

### (c) Contaminació atmosfèrica

### (d) Efectes de la contaminació atmosfèrica

- i. Efecte hivernacle:  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $O_3$ , CFC
- ii. Pluja àcida:  $SO_2$ ,  $NO$ ,  $NO_2$
- iii. Destrucció de la capa d'ozó
- iv. Smog fotoquímic
- v. Efectes sobre la salut humana

## 2. Meteorologia relacionada amb la contaminació atmosfèrica

### (a) Vent

### (b) Pressió atmosfèrica

### (c) Núvols

- i. cirrus
- ii. estrats
- iii. cúmulus

### (d) Humitat

### (e) Inversió de temperatura

## 3. Transport de la contaminació en l'atmosfera

### (a) Escales de transport en l'atmosfera

### (b) Fenòmens implicats en el transport de contaminants emesos per les xemeneies

- i. Estabilitat atmosfèrica
- ii. Turbulència atmosfèrica
- iii. Dispersió de la fumera. Estratificació.

#### 4. Models matemàtic de la dispersió de contaminants

- (a) Tipus de models
  - i. Model determinista
  - ii. Model estadístic
- (b) Models de difusió atmosfèrica
  - i. Model Eulerià
  - ii. Model Lagrangià
- (c) Solució gaussiana

## 4.1 L'atmosfera

L'atmosfera terrestre consisteix en una barreja de diversos gasos que envolten la Terra fins a una alçada d'uns 10.000 *km*, distància comparable a la del diàmetre terrestre. Va començar a formar-se fa uns 4600 milions d'anys. La major part de l'atmosfera primitiva es va perdre a l'espai. L'atmosfera actual prové principalment d'altres gasos que es van alliberar de les roques que formen el nostre planeta.

Abans de l'aparició de les primeres formes de vida, l'atmosfera estava formada per vapor d'aigua,  $CO_2$ ,  $N_2$  i una petita proporció d'hidrogen i  $CO$ . A la seva composició no hi havia oxigen. Era una atmosfera lleugerament reductora fins que l'activitat fotosintètica dels éssers vius va introduir oxigen i ozó (al voltant de fa uns 2500 milions d'anys). Des de fa 1000 milions d'anys l'atmosfera té una composició similar a l'actual.

També ara els éssers vius segueixen desenvolupant una funció fonamental en el funcionament de l'atmosfera. Les plantes i altres organismes fotosintètics prenen  $CO_2$  a l'atmosfera i a canvi hi alliberen oxigen.

### 4.1.1 Zones de l'atmosfera

L'atmosfera està unida a la Terra per l'atracció gravitatòria. Arriba a la màxima densitat al nivell del mar i disminueix ràpidament en vertical cap a dalt. El 97% de l'atmosfera es concentra en els 29 primers quilometres a partir del nivell del mar.

Es pot distribuir l'atmosfera en zones o capes segons diferents criteris: per la seva composició, per la seva temperatura o per la seva densitat. El més habitual és basar-se en les variacions de temperatura que s'experimenten a mida que augmenta l'alçada respecte el nivell del mar. A la Fig. 4.1 s'observa aquesta distribució de la temperatura així com les quatre grans zones a diferenciar:

- Troposfera. Arriba a una alçada mitja de 12 *km* (7 *km* en els pols i 16 *km* en els tròpics) i hi trobem, juntament amb l'aire, pols, fum i vapor d'aigua, entre d'altres components.
- Estratosfera. Zona bastant freda que s'estén des dels 12 *km* fins als 50 *km* d'alçada. A la seva capa superior (entre els 20 *km* i els 50 *km*) conté gran

quantitat d'ozó, el qual és d'enorme importància per a la vida a la terra ja que absorbeix la major part dels raigs ultraviolats del Sol.

- Mesosfera. Zona situada des dels 50 *km* fins als 80 *km* d'alçada, la seva temperatura mitja és de 10 °C, els meteorits adquireixen altes temperatures quan travessen aquesta capa i la gran majoria es volatilitzen.
- Ionosfera. Comença després dels 80 *km* i va desapareixent gradualment fins als 500 *km* d'alçada. A aquesta regió, constituïda per oxigen, la temperatura augmenta fins als 1000 °C. Els raigs X i ultraviolats del Sol ionitzen l'aire enrarit, produint molècules ionitzades. Des dels 100 *km* fins als 300 *km* la zona s'anomena Termosfera, i a continuació s'hi pot trobar una altra subzona anomenada Exosfera que s'estén fins als 1000 *km*. L'Exosfera està formada per una capa de heli i una altra d'hidrogen.

Després d'aquesta capa es troba una enorme banda de radiacions (coneguda com magnetosfera) que s'estén fins a uns 55000 *km* d'alçada, encara que no constitueix un estrat atmosfèric pròpiament dit.

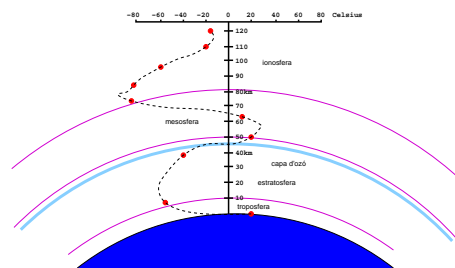


Figura 4.1: Diferents capes de la atmosfera en funció de la temperatura

En l'estudi de la contaminació atmosfèrica, la troposfera representa la capa de més interès ja que és la zona a on té lloc el transport dels contaminants més importants. S'hi produeixen importants moviments verticals i horitzontals de masses d'aire (vents) i hi ha una relativa abundància d'aigua, degut a la seva proximitat a la hidrosfera. Per aquesta raó és la zona on es localitzen els principals fenòmens climàtics: pluges, vents, canvis de temperatura, ...

Des del punt de vista de la seva composició química, les capes anteriors es poden agrupar en dues grans zones: Homosfera (des del nivell del mar fins a 80 *km*) amb una composició química molt uniforme pel que fa a la proporció de gasos que la constitueixen i Heterosfera (des de 80 *km* fins a uns 10000 *km*).

**Curiositat:** A la Homosfera hi pertanyen la troposfera, la estratosfera i la mesosfera, essent a la troposfera la zona on es produeixen el 79% de les reaccions químiques de l'atmosfera.

## 4.1.2 Composició de l'aire

Amb el nom d'aire designem la barreja de gasos que formen l'atmosfera terrestre. L'aire manté la proporció dels seus diferents components quasi invariable fins als 80 km, encara que cada cop és menys dens a mida que anem ascendint. A partir dels 80 km la seva composició es fa més variable.

Els dos principals components de l'atmosfera són el nitrogen, amb un 78% del total i l'oxigen amb un 21%. Com s'observa en la Taula 4.1, la resta de gasos tenen concentracions menors però importants. L'atmosfera no té una composició uniforme en allunyar-nos de la superfície terrestre. A 5.5 km d'alçada trobem la meitat del total de la massa i s'arriba al 90% al voltant dels 30 km.

**Curiositat:** L'aire net forma una capa d'aproximadament 500000 milions de tones que envolta la Terra.

<i>Component</i>	<i>Massa mol.</i>	<i>Concentració</i>	<i>Concentració</i>	<i>Espessor</i>
Nitrogen	28.02	78.08%	75.51%	6.35 km
Oxigen	32.00	20.95%	23.14%	1.68 km
Argó	39.94	0.93%	1.28%	74 m
Neó	20.18	18 ppm	13 ppm	15 cm
Heli	4.00	5 ppm	0.7 ppm	4 cm
Criptó	83.70	1 ppm	2.9 ppm	8 mm
Hidrogen	2.02	0.5 ppm	0.03 ppm	4 mm
Diòxid de Carbó	44.01	350 ppm	533 ppm	2.8 m
Ozó	48.00	0-12 ppm	0-20 ppm	0-1 mm
Vapor d'aigua	18.02	0-4 %	0-2.5 %	0-300 m

Taula 4.1: Composició de l'aire

En la composició de l'aire és destacable el seu contingut en substàncies que no es troben en fase gasosa, especialment l'aigua i en menor proporció compostos orgànics i partícules sòlides. Per a cada concentració de vapor d'aigua a l'aire, existeix una temperatura de condensació per sota de la qual, part del vapor d'aigua passa a líquid. Aquests canvis de fase es poden veure afavorits per la presència de partícules sòlides que serveixen com nuclis de formació de gotes d'aigua.

## 4.1.3 La contaminació atmosfèrica

Es defineix contaminació atmosfèrica com la impurificació de l'atmosfera per la injecció de matèries alienes a la seva composició normal o en una proporció molt superior a l'habitual.

En general, els contaminants primaris ( $SO_2$ ,  $NO_2$ , ...) són alliberats per una font. Aquest procés s'anomena emissió. En l'atmosfera els contaminants



es desplacen, es transformen, s'acumulen i es degraden. Altres contaminants, anomenats secundaris, es formen per reaccions químiques entre contaminants o entre aquests i compostos habituals de l'atmosfera, com el vapor d'aigua. A vegades aquestes reaccions són afavorides per la radiació solar. Els més coneguts són l'ozó troposfèric l'àcid sulfúric i l'àcid nítric.

**Atenció:** El grau de concentració de contaminants es mesura en parts per milió (*ppm*) o en micrograms per metre cúbic ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ). La intensitat d'una font emissora es pot mesurar en *kg/s*.

Per mesurar l'efecte dels contaminants s'han establert valors de referència i índexs de qualitat. Uns valors de referència típics són  $400 \mu\text{g}/\text{m}^3$  per als  $\text{SO}_x$ ,  $300 \mu\text{g}/\text{m}^3$  per a les partícules en suspensió i  $200 \mu\text{g}/\text{m}^3$  per als  $\text{NO}_x$ . Els valors habituals són 132, 120 i  $77 \mu\text{g}/\text{m}^3$  a les zones urbanes i 0.5, 37 i  $2 \mu\text{g}/\text{m}^3$  a les zones rurals. Per al  $\text{CO}$  no hi ha un valor de referència estàndard i una concentració típica és de  $7800 \mu\text{g}/\text{m}^3$  a la ciutat i  $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$  al camp.

A partir del grau de contaminació atmosfèrica que es detecta és necessari adoptar mesures preventives o correctores tenint present que existeix una relació entre emissió (veure glossari) i immissió (veure glossari). Aquests paràmetres no són necessàriament equivalents doncs les emissions són sotmeses a processos de transport, transformació química i dispersió a l'atmosfera que poden donar com a resultat diferents nivells d'immissió.

Per una altra banda, la vida mitja estimada dels contaminants informa sobre el seu caràcter reactiu o inert. A major vida mitja, creix el seu temps de permanència a l'atmosfera i poden ser transportats més lluny. Per exemple, la vida mitja del  $\text{SO}_2$  és de l'ordre de dies. Això implica que disposa d'aquest temps per traslladar-se a certa distància abans d'acabar combinant-se amb la humitat de l'atmosfera, provocant el fenomen de la pluja àcida.

Els focus d'emissió de contaminants poden ésser naturals (volcans, incendis, temporals de sorra, ...) o originats per activitats de l'home (focus antropogènics). Els focus antropogènics poden ser fixos (plantes de productes químics, incineració d'escombraries, refineries de petroli, ...) o mòbils (automòbils, trens, vaixells, ...). Per una altra banda, les zones que absorbeixen els contaminants de l'aire s'anomenen claveguerons de contaminació atmosfèrica. Aquests són, en general, el terra, la vegetació, les construccions i, especialment, les grans masses d'aigua (oceans).

Suposem que, per a una determinada massa de contaminants, tenim un únic focus emissor. El vent és el principal fenomen atmosfèric que trasllada el contaminant fins als receptors. A més a més d'aquest desplaçament, la massa de contaminants creix en amplitud i en alçada, degut al procés de barreja que s'experimenta a l'atmosfera. Durant el seu camí es produiran canvis en la direcció i en la velocitat del vent que faran que el contaminant serpenteï. La suma de tots aquests processos provoca la difusió dels contaminants i, en conseqüència, la concentració de contaminants en els receptors és menor que la seva concentració en el focus emissor.

**Curiositat:** En determinades condicions atmosfèriques, els gasos expulsats per una xemeneia poden ser transportats centenars de quilòmetres abans de dipositar-se a terra.

#### 4.1.4 Efectes de la contaminació atmosfèrica

##### Efecte hivernacle

El 46% de la radiació solar que arriba al nostre planeta és absorbida per la superfície terrestre. Una quantitat menor (23% del total) és absorbida per diferents components de l'atmosfera, com l'aire, la pols o els núvols i la resta (31% del total) és reflectida per l'aire, els núvols i la superfície terrestre.

La dinàmica de l'atmosfera i dels oceans permet una redistribució de les diferents quantitats d'energia rebudes des del sol a diferents latituds. Les superfícies dels oceans i continents perden constantment energia, que es irradia cap a l'espai exterior en longituds d'onda que depenen de les seves respectives temperatures. La major part són superiors a 4  $\mu$ m. Aquest tipus de radiació s'anomena radiació terrestre o d'onda llarga. Part de la radiació d'onda llarga emesa per la superfície terrestre, és absorbida per alguns gasos de l'atmosfera i torna a emetre's en totes direccions, inclòs cap a la Terra. Aquests gasos són, sobre tot, vapor d'aigua,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $O_3$  i CFCs. La presència d'aquests gasos redueix la pèrdua efectiva de calor de la superfície terrestre i eleva substancialment la temperatura. Aquest procés s'anomena efecte hivernacle i els gasos que hi intervenen activament es designen com a gasos hivernacle. La magnitud de l'efecte hivernacle depèn de la concentració de cadascun dels gasos i de la forma en que aquesta concentració varia amb l'alçada.

Des del començament de la segona revolució industrial, l'emissió de gasos hivernacle, especialment de  $CO_2$ , ha anat creixent, tal i com es pot apreciar a la Fig. 4.2. Les principals causes de l'augment del  $CO_2$  atmosfèric són l'augment de la seva generació com a conseqüència de l'ús de combustibles fòssils (petroli, gas i carbó) i la disminució del seu consum degut als canvis en el règim d'explotació de la Terra, en particular de la desforestació de les selves tropicals humides. Una altra font important de  $CO_2$  és la producció de ciment.

**Curiositat:** El documental *An Inconvenient Truth* (2006), presentat per l'ex-vicepresident dels EUA Al Gore, va contribuir decisivament a desvetllar la preocupació pública per aquest fenomen

##### Pluja àcida

Els principals gasos productors d'aquest fenomen són el diòxid de sofre ( $SO_2$ ) i els òxids de nitrogen ( $NO$  i  $NO_2$ ) que, en contacte amb el vapor d'aigua atmosfèric i en presència de la llum solar, reaccionen per a convertir-se en àcids

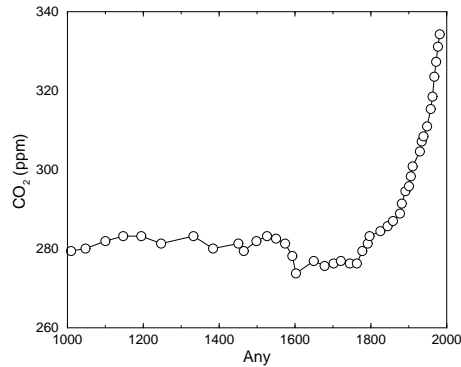


Figura 4.2: Evolució del  $CO_2$  a l'atmosfera

sulfúric i nítric diluïts. Aquests àcids cauen sobre la superfície terrestre en forma de partícules seques, pluja, neu o boira.

Els efectes biològics de la pluja àcida són amplis. En principi el seu nivell típic d'acidesa és tòxic per a alguns peixos i microorganismes aquàtics i terrestres (líquens i bolets). Aquests organismes són una part essencial de l'ecologia del terra dels boscos. Altres efectes venen com a conseqüència l'acció d'aquests àcids sobre els metalls que hi ha al sòl. És el cas de l'alumini, que un cop dissolt s'incorpora a l'aigua de llacs i rius. A través de plantes i microorganismes entra en la cadena tròfica. Aquest metall és molt tòxic per a algunes plantes i animals. Actualment s'ha detectat que està incorporat a la flora i fauna de zones on freqüentment es produeixen pluges àcides.

Per una altra banda, la pluja àcida també ataca l'estructura metàl·lica dels ponts, edificis i monuments, construïts normalment amb compostos calcaris, produint deteriorament i pèrdua de valor artístic.

### **Destrucció de la capa d'ozó**

A la part superior de l'Estratosfera es troba la capa d'ozó, que actua de filtre de la radiació solar ultraviolada. Si es produeix una reducció de la seva concentració, es provoca un increment de la quantitat de radiació ultraviolada que incideix sobre la Terra.

Aquestes capes superiors de l'atmosfera són contaminades per aeronaus que volen a gran alçada, proves atmosfèriques d'armament nuclear i erupcions volcàniques. Els principals contaminants són els òxids de sofre i altres gasos designats com clorofluorocarbonis (CFCs). Aquests gasos són utilitzats en aerosols, refrigerants en equips d'aire condicionat, pesticides, ... i el seu temps de vida mitja es de 1000 anys.

Quan el diòxid de nitrogen i els CFCs arriben a les altes regions de l'Estratosfera són dissociats per efecte de la llum solar, produint-se òxid de nitrogen i clor lliure. Aquest darrer element destrueix l'ozó.

Contaminant	SO <sub>2</sub>	Part.	NO <sub>2</sub>	CO
Valor de referència ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	250	300	400	15000
Valor típic urbà ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	132	120	77	7800
Valor típic rural ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	0.5	37	2	100

Taula 4.2: Valors de referència

La reducció de l'ozó a l'estratosfera provoca un increment en la radiació ultraviolada que assola la superfície terrestre. L'increment d'aquesta radiació augmenta els seus efectes naturals. Sense anar més lluny, és considerada un agent cancerigen. En general pot afirmar-se que l'increment percentual del flux ultravioleta és el doble que el percentatge de decreixement de la concentració d'ozó.

### Smog fotoquímic

El smog fotoquímic és un dels majors problemes de contaminació atmosfèrica a escala local o regional. Es caracteritza per la presència de vapors irritants que dificulten la visibilitat i està associat a determinades emissions urbanes i a determinades condicions atmosfèriques. Els components del smog fotoquímic normalment no són emesos directament a l'atmosfera sinó que són contaminants secundaris. Estan originats per les reaccions químiques que són afavorides per la irradiació de la llum solar a sobre d'una barreja d'hidrocarburs i òxids de nitrogen.

### Efectes sobre la salut humana

Amb la finalitat d'informar, d'una manera senzilla i fàcil d'entendre per tots els ciutadans, sobre l'estat de la qualitat de l'aire, s'han establert valors de referència i índexs de qualitat que ponderen els diferents contaminants mesurats. Els valors de referència són els valors màxims considerats inofensius (Taula 4.2).

Els índexs són més útils per informar del grau de contaminació. A Catalunya, el departament de Medi Ambient utilitza l'índex ICQA (veure glossari). Es tracta d'una adaptació a la normativa europea de l'índex americà PSI (veure glossari).

L'ICQA tradueix a una mateixa escala els efectes dels contaminants sobre la salut de les persones. Té en compte els 4 principals contaminants. Si n'hi ha més d'un s'agafa el que tingui un valor més baix a l'escala (Taula 4.3).

Mitjançant el valor d'aquest índex es pot classificar l'estat de l'atmosfera en tres categories: bona, millorable i pobre en funció de que la concentració dels contaminants es trobi a dins dels marges exposats a la Taula 4.4.

Si la categoria és bona no es presenten efectes negatius en la salut de la població. Si la categoria és millorable és possible que es presentin irritacions

ICQA	$SO_2$ ( $\mu g/m^3$ ) 24h.	Part. ( $\mu g/m^3$ ) 24h.	$NO_2$ ( $\mu g/m^3$ ) 1h.	$CO$ ( $\mu g/m^3$ ) 8h.
100	0	0	0	0
50	100	150	150	6000
0	250	300	400	15000
-100	800	600	1130	17000

Taula 4.3: Índex ICQA

bona	millorable	pobra
<b>excel·lent</b> $75 \leq ICQA \leq 100$	<b>acceptable</b> $25 \leq ICQA \leq 50$	<b>deficient</b> $-50 \leq ICQA \leq 0$
<b>satisfactòria</b> $50 \leq ICQA \leq 75$	<b>baixa</b> $0 \leq ICQA \leq 25$	<b>molt deficient</b> $ICQA \leq -50$

Taula 4.4: Marges per a la salut humana

en els ulls o mals de cap. En aquestes condicions als malalts de cor i de pulmó se'ls reactiven els símptomes de llurs patiments. Els nens lactants, la gent gran i els fumadors presenten trastorns funcionals de l'aparell respiratori i cardiovascular, com ara augment de la seva freqüència respiratòria, sensació de falta d'aire i palpitations.

En el cas de que la qualitat d'aire sigui pobre, els nens lactants, gent gran i fumadors presenten les molèsties descrites anteriorment, a més d'alteracions de tipus inflamatori en el sistema respiratori (tos, espasme bronquial, ...). La població generalment sana també presenta trastorns funcionals en l'aparell respiratori i cardiovascular, sobre tot si es realitza esport o una altra activitat física intensa a l'aire lliure. A partir d'aquest nivell de contaminació es reactiven tots aquests efectes de forma general amb la simple presència de la persona a l'exterior.

Ara és un bon moment per fer l'activitat 1.

## 4.2 Meteorologia relacionada amb la contaminació atmosfèrica

Des del punt de vista físic, l'aire es comporta com un fluid en règim turbulent que s'anomena flux lliure, és a dir, no tancat per parets sòlides. Els factors que condicionen aquest flux són:

1. El moviment de la Terra
2. L'orografia i la rugositat de la superfície terrestre

3. Les característiques reològiques de l'aire (densitat mitjana =  $1204 \text{ kg/m}^3$ , viscositat cinemàtica =  $0,1 \text{ kg/ms}$ )
4. Els fenòmens d'intercanvi d'energia que s'hi desenvolupen, com els canvis de fase de l'aigua i l'aport d'energia solar. També depèn de si aquests intercanvis tenen lloc a sobre el sòl o als oceans.

Tots aquests condicionants del flux atmosfèric generen una gran complexitat que va donar lloc al desenvolupament d'una ciència, la Meteorologia, que tracta d'explicar aquests fenòmens. Per a l'estudi de la contaminació atmosfèrica i del seu comportament és necessari conèixer alguns conceptes meteorològics que l'afecten directament. La major part d'aquests fenòmens es desenvolupen en l'anomenada capa límit atmosfèrica, definida com la capa més baixa de la troposfera, que és la que es troba afectada directament per la superfície terrestre.

### 4.2.1 El vent

El fenomen responsable en major grau del transport de contaminants a través de l'atmosfera és el vent. L'estudi d'aquest flux d'aire pot dividir-se en tres aspectes: vent mig, turbulència i ones. Qualsevol d'ells pot existir a la capa límit. El transport de magnituds com la humitat, el calor sensible, la quantitat de moviment i els contaminants està determinat en la direcció horitzontal (advecció) pel vent mig i en la vertical per la turbulència.

El vent és generat per diferències de temperatura a la Terra. Els oceans i altres grans masses d'aigua s'escalfen i es refreden a velocitats diferents de les de les grans masses de terra. Per aquest motiu existeixen gradients de pressió que ocasionen moviments d'aire des d'àrees d'alta pressió fins a àrees de baixa pressió.

El vent mig horitzontal sol ésser de l'ordre de 2 a  $15 \text{ m/s}$ , encara que disminueix considerablement en apropar-nos a la superfície terrestre. El vent mig vertical és molt més petit, permetent així l'existència d'una estructura estratificada a la capa límit atmosfèrica.

La turbulència pot considerar-se com un conjunt de remolins irregulars superposats. Entre els remolins, destaquen els de major magnitud en comparació amb l'alçada de la capa límit. Aquests remolins generen corrents ascendents i descendents que afecten a les fumeres de contaminants, provocant serpenteigs dels mateixos (looping).

### 4.2.2 La pressió atmosfèrica

La pressió disminueix ràpidament amb l'alçada, però a més hi ha diferències de pressió entre unes zones de la troposfera i les altres que tenen gran interès des del punt de vista climatològic. Són denominades zones d'altres pressions, quan

la pressió, reduïda al nivell del mar i a 0 °C, és major de 1.013 milibars o zones de baixes pressions si el valor és menor que aquest número.

L'aire es desplaça des de les àrees de més pressió a les de menys, formant-se així els vents. S'anomenen isòbares a les línies que uneixen punts d'igual pressió. Els mapes isobàrics són utilitzats pels meteoròlegs per a les prediccions del temps.

### 4.2.3 Els núvols

L'aigua pot existir en estat gasós, líquid o sòlid. Els núvols es formen quan l'aire ja no pot contenir més vapor d'aigua (gas). Quan l'aigua en el núvol s'agrupa en gotes prou pesades cau en forma de pluja o neu.

**Curiositat:** L'atmosfera conté uns 12000  $km^3$  d'aigua. La meitat d'aquesta aigua està situada entre la superfície i els 1800 m d'alçada.

Els núvols poden formar-se en qualsevol part de la troposfera i es mouen d'un punt a altre impulsats pel vent. Hi ha diferents tipus de núvols, pel seu aspecte i altitud sobre la Terra. Els tipus bàsics de núvols són: cirrus, estrats i cúmulus.

Els núvols cirrus semblen un cabell o plomes flotant en l'aire. Es troben a gran alçada en el cel, on l'aire és fred. La humitat en aquests núvols forma cristalls de gel per comptes de romandre com a gotes d'aigua.

El núvols estrats semblen llençols volant a través del cel. Es formen quan la condensació passa a la mateixa alçada on l'aire deixa d'eleva-se. Sovint, aquests núvols ocasionen pluges.

Els núvols cúmulus són bombats i poden tenir moltes formes. Aquests núvols tenen fons plans i tapes ondulades.

### 4.2.4 La humitat

Una massa d'aire no pot contenir una quantitat il·limitada de vapor d'aigua. Hi ha un límit a partir del qual l'excés de vapor es liqua en gotes. Aquest límit depèn de la temperatura ja que l'aire calent es capaç de contenir major quantitat de vapor d'aigua que l'aire fred.

El vapor que es troba a l'atmosfera procedeix de l'evaporació de l'aigua dels oceans, dels rius, dels llacs i dels terres humits. L'augment o disminució del vapor depèn de la temperatura i del nivell de saturació de l'aire. Un aire amb una humitat relativa baixa pot admetre molt vapor d'aigua procedent de l'evaporació, encara que estigui fred, mentre que un aire proper a la saturació ja no admetrà més vapor d'aigua per molt elevada que sigui la temperatura.

## 4.2.5 La inversió tèrmica

Un fenomen particularment interessant a l'atmosfera és la inversió de la temperatura. Habitualment, la temperatura absoluta a la capa límit disminueix amb l'alçada. Tanmateix, en determinades condicions, la temperatura augmenta considerablement amb l'alçada, a partir d'una determinada alçada que s'anomena alçada d'inversió.

L'atrapament de contaminants en una capa d'inversió és un fenomen típic de regions d'alta pressió, degut a la impossibilitat de que els remolins que els desplacen puguin superar la capa estable.

Aquest fenomen, en principi puntual, ha portat a l'estudi de les diferents situacions d'estabilitat atmosfèrica a la capa límit en relació amb el perfil de temperatures potencials. Com a referència, es defineix el perfil de temperatura adiabàtic com aquell en el que la temperatura decreix amb l'altura de manera que la densitat de l'aire varia proporcionalment a la pressió en cada nivell. El coneixement del gradient de temperatura és fonamental per a la determinació de la classe d'estabilitat o inestabilitat atmosfèrica.

Abans de continuar, pots fer les activitats 2 i 3.

## 4.3 Transport de contaminació a l'atmosfera

El cicle d'escalfament i refredament del terra sota l'acció de la radiació del sol, així com la barreja de masses d'aire de procedència diferent té com a conseqüència la modificació del valor de la temperatura de l'aire en funció de la alçada. Aquesta modificació repercuteix en l'habilitat de l'atmosfera per iniciar o inhibir els moviments verticals de l'aire i, en conseqüència, en la difusió dels contaminants.

### 4.3.1 Escales de transport a l'atmosfera

El problema de la contaminació atmosfèrica es desenvolupa en totes les escales, des de la local a la global. Encara que aquesta divisió no és general, es poden distingir cinc escales espaials diferents en el desenvolupament d'un problema de contaminació atmosfèrica: local, urbana, regional, continental i global. L'escala local inclou fenòmens fins a 50 *km* de distància, si no es tracta d'una zona urbana. L'escala urbana s'estén fins a aquests 50 *km*, però a zones densament poblades. L'escala regional abasta des de 50 *km* a 500 *km*. Les escales continentals van des de 500 *km* fins a milers de quilòmetres. Finalment, l'escala global abasta tota la Terra.

Els problemes de contaminació a escala local es caracteritzen generalment per l'existència d'un o varis grans focus emissors, o un gran número de focus relativament petits. Quan menor sigui l'alçada d'emissió, major pot ésser l'impacte de dita emissió sobre l'entorn local. Per exemple, els automòbils generen les concentracions de contaminants més elevades a prop de les carreteres, i



les plantes de tractament d'aigües residuals generen emissions de compostos orgànics volàtils (VOCs) que assoleixen la màxima concentració molt a prop de la pròpia planta, en ésser emesos a nivell del terra.

També grans focus emissors localitzats, que expulsen les seves emissions a l'atmosfera des de xemeneies elevades, poden provocar problemes de contaminació local. Aquests problemes estan condicionats per les condicions meteorològiques.

Existeixen dos tipus de problemes de contaminació atmosfèrica a zones urbanes: l'emissió de contaminants primaris i la formació de contaminants secundaris. Els primers poden ser causats per focus individuals, generalment petits i en gran número (xemeneies, cotxes, ...). Entre els problemes causats pels contaminants secundaris s'ha identificat la formació d'ozó troposfèric per reacció fotoquímica.

A escala regional, podem identificar tres tipus de problemes: el transport dels contaminants urbans a escala regional, l'emissió de contaminants amb velocitats de reacció lentes a l'atmosfera, que generen contaminants secundaris a grans distàncies (per exemple  $SO_3$ ), i la pèrdua de visibilitat deguda a les emissions de determinades fumeres de contaminants amb nivells d'emissió significatius.

A Europa, per la seva forma, els problemes de contaminació atmosfèrica es limiten generalment a l'escala regional. Per tant l'escala regional i continental es confonen. Així, la presència de pluja àcida en els països escandinaus, causada per les emissions procedents de la Gran Bretanya i Europa occidental, s'ha considerat com a continental. Per això, en general, es considera escala continental no només la derivada de la distància entre l'emissor i el receptor, sinó també quan existeixen diversos països implicats en el problema.

L'escala global aborda, en general, els problemes que causa la contaminació atmosfèrica a mig-llarg termini, com el canvi climàtic, la reducció de la concentració de ozó estratosfèric o les emissions naturals procedents de volcans (que generen gran quantitat de partícules). Tanmateix, com a excepció, podem esmentar l'accident de la Central Nuclear de Txernòbil, en el que es van detectar nivells anormalment alts de radioactivitat en el Nord-est de l'Oceà Pacífic al poc temps de l'accident. Aquest fet va demostrar l'existència d'un transport a llarga distància a partir d'una emissió puntual.

### **4.3.2 Fenòmens que intervenen en el transport de contaminants**

La descripció del transport d'una fumera de contaminants a l'atmosfera (Fig.4.3) engloba fenòmens de molt diferent natura.

En primer lloc, la fumera s'eleva sobre l'altura d'emissió degut a la seva velocitat de sortida i, en el cas de fumeres tèrmiques, a la major temperatura que posseeix el fum respecte a l'ambient. Aquesta elevació es perllonga en tant que siguin perceptibles l'impuls mecànic i, especialment, el desplaçament vertical

per gradient tèrmic. El resultat d'aquest fenomen no estacionari s'anomena sobrelevació de la fumera.

El segon fenomen a considerar és el desplaçament del centre de la fumera degut a l'arrossegament dels contaminants pel vent: és l'advecció.

Simultàniament a aquests processos, es produeix la difusió del contingut de la fumera des de la seva línia central, en les tres direccions de l'espai: és la difusió turbulenta.

Al mateix temps, cal considerar, per a aquells contaminants no inerts, la cinètica de les reaccions químiques que provoquen la seva transformació en altres contaminants secundaris, així com la velocitat amb que el terra absorbeix els contaminants. Aquests dos últims fenòmens, tanmateix, solen considerar-se de manera independent de la resta de processos (de manera que es simplifica el seu plantejament). El motiu és que, per a la resolució del problema de la difusió atmosfèrica, en primer lloc s'ha de conèixer on es troben els contaminants en cada moment per estudiar posteriorment quines són les transformacions que poden patir durant el recorregut.

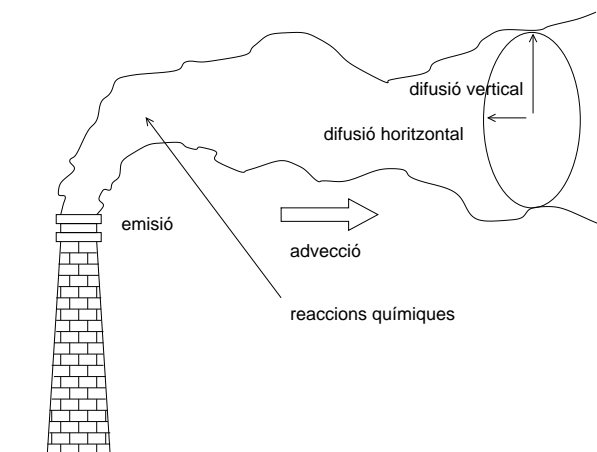


Figura 4.3: Fenòmens presents en el transport d'una fumera gasosa a l'atmosfera

Des del punt de vista fenomenològic, el moviment d'una fumera està perfectament caracteritzat pel vent, l'estabilitat i la turbulència atmosfèrica. Si els efectes del vent i de la turbulència són fàcilment comprensibles (a major turbulència, major dispersió de la fumera), l'estabilitat atmosfèrica és un concepte que requereix consideracions particulars.

En primer lloc, hem de tenir en compte l'evolució més habitual de la capa límit atmosfèrica durant el període diürn-nocturn. Pel matí, l'escalfament solar produeix la ruptura de la capa estable propera a la superfície terrestre que domina durant la nit, mitjançant la formació de corrents verticals d'aire calent que puguen des del terra. Degut a aquest efecte la capa estable s'eleva. Aquests corrents arriben a la seva màxima intensitat a les primeres hores del vespre, per a començar a créixer a mida que disminueix el flux de calor solar.

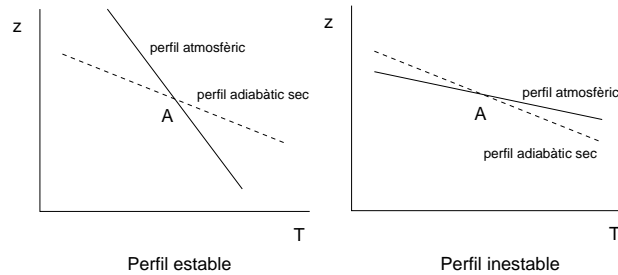


Figura 4.4: Perfils estables i inestables

Per la nit, amb el vent en calma, torna a aparèixer una capa estable molt definida a baixa alçada, que sol créixer durant el període nocturn, aquest creixement s'accelera si augmenta la velocitat del vent.

A més, tant pel dia com per la nit, en situacions de forta turbulència atmosfèrica solen produir-se ruptures del flux en dues o més capes horitzontals clarament diferenciades.

Existeix una estreta interrelació entre les formes que adopta una fumera que emet a certa alçada sobre el terra i el gradient vertical de temperatura present a la capa límit, que és indicatiu de l'estabilitat existent a diferents altures.

### Estabilitat atmosfèrica

Els moviments verticals de l'aire estan condicionats a la seva flotabilitat. La flotabilitat d'una bombolla d'aire depèn de la seva densitat relativa respecte a la de l'entorn que l'envolta. La densitat de l'aire varia fortament en funció de la seva temperatura, de forma que a l'aire més fred li correspon una major densitat relativa i per tant una tendència a l'enfonsament. Això és tot el contrari al que succeeix amb l'aire calent.

La relació entre l'anomenat perfil adiabàtic (veure glossari) i el real de l'atmosfera determina el que es coneix com a estabilitat vertical. En el desplaçament adiabàtic sec (veure glossari) d'una bombolla d'aire que puja o baixa es produeix un refredament o un escalfament, respectivament, d'uns  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  per quilòmetre. Es produeixen tres tipus d'equilibri: Estable, Neutre i Inestable. En general, una atmosfera *estable* és la que inhibeix els moviments verticals mentre que una atmosfera *inestable* els amplifica. Es denomina atmosfera *neutra* quan és indiferent a aquests moviments.

Considerem la Fig. 4.4: les línies sòlides representen el perfil real de temperatura a l'atmosfera i les línies de traços el de la temperatura d'una bombolla que canviés d'alçada, situada prèviament a A (perfil adiabàtic sec).

En el cas (a) si la bombolla d'aire ascendeix, la seva temperatura acaba sent menor que la del seu entorn i per tant torna de nou cap a A, per ser més densa que l'aire que l'envolta. En aquest mateix cas si la bombolla descendeix la seva temperatura seria més alta que la del seu entorn i per tant tendeix a recuperar

la seva posició A, per tenir una densitat menor que l'aire circumdant. Tenim doncs un perfil vertical estable en el que es tendeix a inhibir els moviments verticals de l'aire.

En el cas (b), seguint els mateixos raonaments emprats anteriorment, observem que el resultat és una amplificació dels moviments verticals de la bombolla per ser aquesta més lleugera (a dalt) i més densa (a baix) que l'aire que l'envolta. Estem llavors a davant d'una situació Inestable. Les condicions de forta inestabilitat són les causants de fortes ràfegues ascendents d'aire en les que es condensa el vapor d'aigua, donant lloc a la formació de gotes d'aigua que poden assolir una forma tal que acaben en precipitacions.

Si el perfil real de l'atmosfera coincideix amb la variació adiabàtica de temperatura diem que som a davant d'un perfil Neutre.

### **Turbulència atmosfèrica**

Definirem turbulència com les variacions caòtiques observades en els valors de les magnituds termodinàmiques mesurades de forma instantània a l'atmosfera. Quan s'esmenta la velocitat, direcció del vent, temperatura, ... s'entén que aquestes mesures són una mitja temporal dites propietats. La turbulència pot considerar-se com una fluctuació a l'atzar sobreposada al valor mig d'una magnitud termodinàmica mesurada a l'atmosfera.

Si considerem una bossa de contaminació emesa a l'atmosfera, l'efecte de la turbulència es manifesta de la forma següent: els remolins o fluctuacions d'escala més gran que la bossa de contaminació l'empenyen, la traslladen o la sacsegen a l'atzar. Els remolins d'escala similar a la bossa l'estiren, la deformen i acaben per fraccionar-la en bosses irregulars més petites. Aquestes cauen sota l'acció dels remolins d'escala més petita i així successivament fins que l'acció de la difusió molecular acaba el procés. Al mateix temps, la forma general del núvol de gas creix durant aquest refredament i passa a caure sota l'acció turbulenta d'escala majors. L'efecte final és la dispersió de la contaminació inicialment concentrada en la bossa d'aire.

### **Dispersió de la fumera. Estratificació**

Per a la fumera de contaminació d'una xemeneia tenim diferents possibilitats segons l'estratificació que presenta l'atmosfera. Quan hi ha un perfil superadiabàtic (Fig. 4.5), que implica una atmosfera molt inestable, els desplaçaments verticals són afavorits, per la qual cosa presenta fortes oscil·lacions en aquesta direcció. Es produeix l'anomenat serpenteig (looping), que implica la possibilitat de que la fumera impacti en punts dispersos del terreny proper al focus emissor, irregularment distribuïts i durant curts períodes de temps.

Quan el gradient vertical de temperatura és negatiu (Fig. 4.6), però menys negatiu que l'adiabàtic, la fumera, com la capa atmosfèrica, s'estabilitza. Això es deu a que es troba més restringida pel que fa a la seva mobilitat vertical. La dispersió turbulenta, si és suficientment intensa, pot no haver estat anul·lada

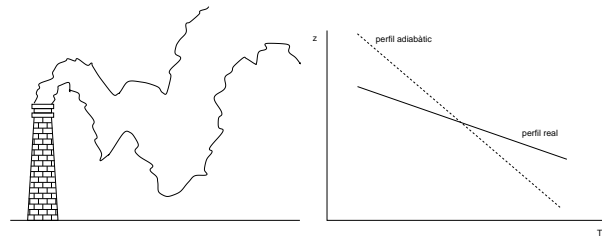


Figura 4.5: Fumera de forma serpentejant

pels efectes tèrmics, de manera que la fumera s'equilibra en una forma cònica característica. El seu impacte sobre el terreny proper és poc probable i de produir-se, es deuria a la escassa alçada d'emissió o a la presència d'elevacions topogràfiques importants.

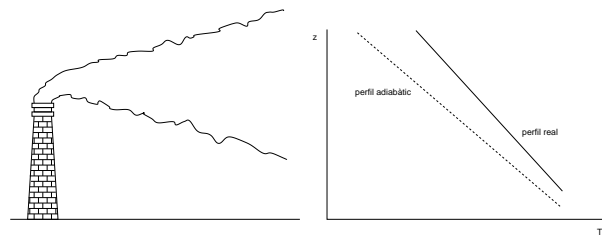


Figura 4.6: Fumera de forma cònica

Quan hi ha un perfil de temperatura netament positiu (Fig. 4.7), indicatiu d'una capa atmosfèrica estable, la fumera es troba atrapada en el nivell d'emissió, ja que el seu moviment vertical està absolutament impossibilitat. Es parla llavors d'una fumera estesa horitzontalment (fanning).

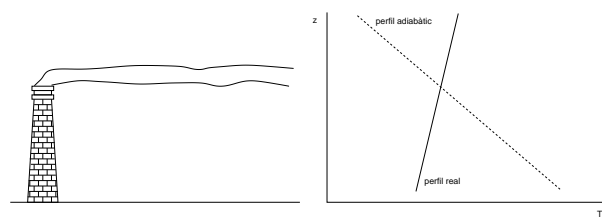


Figura 4.7: Fumera de forma horitzontal

L'aparició d'una inversió de temperatura (canvi d'estabilitat), a la capa atmosfèrica dins de la que es produeix l'emissió de la fumera, pot tenir dos efectes oposats:

1. Si la capa que es troba sota la fumera (Fig. 4.8) presenta un gradient vertical de temperatura positiu (capa estable) i la situada a sobre, un gradient negatiu proper a la neutralitat (capa neutra o inestable), la fumera

només podrà ascendir, doncs la capa estable l'impedeix apropar-se a terra. Aquest efecte s'anomena elevació de la fumera (lofting).

2. Quan es presenta el cas contrari, amb una capa inestable per sota de la fumera (Fig. 4.9) i una altra estable per sobre, el corrent de gasos que troba el seu equilibri en l'atmosfera es veu forçat a caure a terra i pot impactar sobre una zona de manera continuada en tant que les condicions meteorològiques no varien. Aquest fenomen s'anomena fumigació, i és la situació més perillosa en el comportament d'una fumera de contaminants.

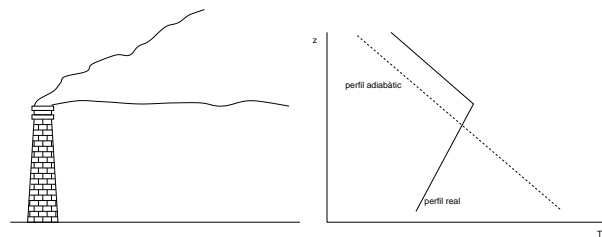


Figura 4.8: Elevació de la fumera degut a la inversió tèrmica

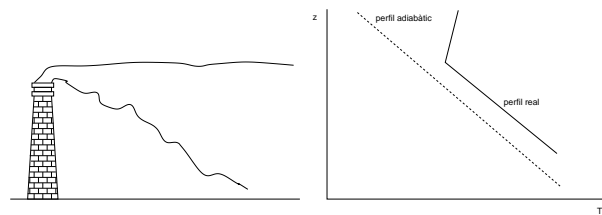


Figura 4.9: Fenomen de fumigació per inversió tèrmica

Precisament, aquest efecte confereix una gran importància a la presència d'inversions tèrmiques a les capes baixes de l'atmosfera ja que, segons la seva intensitat, poden arribar a taponar l'ascens de la fumera i fer que aquesta contami regions relativament properes al focus emissor.

En aquesta caracterització no hem avaluat l'efecte de la turbulència mecànica, un altre factor a tenir en compte en la dispersió de la fumera. Però en qualsevol cas, encara que turbulència i estabilitat atmosfèrica estan relacionades, la segona no implica necessàriament un fort increment de la primera, ja que la magnitud del vent i els efectes topogràfics també són importants.

## 4.4 Models matemàtics de la dispersió de contaminants

La modelització numèrica de l'atmosfera consisteix en obtenir una predicció objectiva de l'estat futur de l'atmosfera resolent un sistema d'equacions que

descriuen l'evolució de les variables atmosfèriques (temperatura, vent, humitat...) que defineixen l'estat de l'atmosfera. Els models són diferents entre ells en el tipus d'aproximacions i suposicions que fem en aplicar les equacions, en la seva resolució matemàtica i en els paràmetres que es consideren.

En Climatologia, l'ús d'un model és imprescindible per fer pronòstics meteorològics i per intentar preveure les conseqüències dels possibles canvis climàtics a mig i llarg termini.

Històricament, els meteoròlegs per a la seva realització divideixen l'atmosfera en capes i cada capa en una quadrícula, generant així un retícul de cel·les en tres dimensions. Després, introdueixen en cada una de les cel·les dades de temperatura i pressió i equacions que expressen com podrien variar aquestes dades segons les condicions generals i les dades de les cel·les veïnes. Aquests models eren útils per a prediccions del clima a curt termini.

Els seus successors han estat els actuals GCM (Global Circulation Models). Gràcies als avenços informàtics, aquests nous models són capaços de processar cascades de dades, que procedeixen d'una cada vegada més àmplia xarxa de satèl·lits i estacions de control remot. Poden modelar l'atmosfera del món amb un nivell de detall sorprenent. Però una cosa és predir que demà plourà i una altra saber si haurà moltes sequeres durant els propers 50 anys.

#### 4.4.1 Tipus de models

La modelització del comportament de la contaminació atmosfèrica és una eina fonamental en els estudis de pol·lució de l'aire. Existeixen models basats en experiments de laboratori que han permès identificar alguns mecanismes de transport de contaminants atmosfèrics. El problema global ha estat abordat amb diferents models matemàtics, amb major i menor dosi d'empirisme. Així, es distingeixen dos tipus bàsics d'orientacions en aquesta modelització:

- Models deterministes, típicament models de difusió atmosfèrica, que tracten d'establir alguna formulació matemàtica que descriu els processos atmosfèrics que influeixen en el transport de contaminants. L'objectiu es trobar la relació entre la causa (emissions) i l'efecte (nivells de concentració de contaminants en l'atmosfera i el terra, immissió).
- Models estadístics, basats en relacions estadístiques entre dades d'emissió, meteorologia i concentracions de contaminants disponibles.

Atenent a diferents criteris, i no només al seu fonament, els models de la qualitat de l'aire es poden classificar segons el seu abast espacial en regionals, locals, continentals o globals o bé segons la seva resolució temporal en períodes de termini curt o llarg.

## 4.4.2 Models de difusió atmosfèrica

Els models de difusió atmosfèrica són una de les solucions més esteses al problema del comportament dels contaminants a l'atmosfera. El seu plantejament general segueix l'esquema d'un model de processos o fenòmens, es a dir, consisteix en aplicar un model matemàtic a cada un dels fenòmens que experimenten els contaminants a l'atmosfera, i sumar les contribucions de tots els models del procés en una equació de balanç o conservació per a cada propietat considerada.

El balanç de contaminant en l'atmosfera aplicable en forma general és

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_j c_i)}{\partial x_j} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + R_i(c_1, \dots, c_n, T) + S(\vec{x}, T) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

on el primer terme representa la variació de concentració de contaminant amb el temps, el segon l'entrada neta de contaminants associada al flux atmosfèric (advecció), el tercer la variació de la concentració de contaminant degut a la difusió turbulenta, el quart la velocitat de desaparició del contaminant per reacció química i el cinquè la aparició de contaminant en l'entorn considerat, provinent de focus emissors en el propi entorn.

La resolució analítica d'aquestes equacions no és possible, ja que no es coneix la forma ni de la funció ni de la difusió turbulenta ( $D_i$ ). A més, és necessari resoldre les  $N$  equacions diferencials simultàniament per a tenir en compte la influència de la concentració i el seu balanç. Per a això, existeixen dues aproximacions generals a la resolució d'aquest problema: la via euleriana i la via lagrangiana.

- Eulerians: Utilitzen un sistema de referència absolut i tracten de calcular la difusió referida a aquest sistema a partir de diferents aproximacions (closure).
- Lagrangians: Distingeixen dos sistemes de coordenades per al càlcul del desplaçament dels contaminants: un absolut, referit a les coordenades del focus emissor, en el que es calcula la translació mitjana dels elements de contaminant considerats, i un altre relatiu, referit a un punt representatiu de la translació mitjana de la fumera, per a tenir en compte la dispersió de la fumera deguda a la turbulència.

La resolució simultània de totes les equacions de conservació, tal i com s'estudia en els models de predicció meteorològica, és complexa. Aquesta complexitat és molt major si s'afegeixen les equacions de balanç de matèria per a cada component. Ara bé, els contaminants atmosfèrics es troben en concentracions molt més petites que els principals components de l'aire, pel que la seva influència sobre el flux atmosfèric, es a dir, sobre la meteorologia, es menyspreable. Per tant l'equació de balanç de cada component (contaminant) pot ser resolta independentment de la resta d'equacions de conservació (de continuïtat, d'energia, de quantitat de moviment). Aquesta hipòtesi de flux estacionari no és aplicable en altres sistemes naturals en els que la presència del contaminant



pot modificar significativament el flux a dintre del sistema. És el que passa, per exemple, quan la densitat o viscositat del fluid varien amb la concentració de contaminant.

La hipòtesi de flux estacionari considera que l'equació de difusió es resol en cada període de temps, durant el qual es considera que el flux és estacionari. Pot resoldre's de forma consecutiva al llarg de diversos períodes estacionaris diferents, per a que es tingui en compte la variació del flux sobre el transport del contaminant de manera discreta. Tanmateix, aquesta solució no permet que existeixi cap influència del contaminant sobre el flux.

### 4.4.3 La solució gaussiana

Ni la solució euleriana ni la lagrangiana aporten un resultat pràctic aplicable al problema de la distribució de contaminants a l'atmosfera, pel que habitualment és precís considerar algunes aproximacions per a obtenir una solució pràctica i vàlida, bé sigui una solució analítica o bé una solució numèrica. La solució analítica més àmpliament utilitzada i que ha tingut un major èxit és l'equació gaussiana. Aquesta equació s'obté a partir de la solució euleriana o de la solució lagrangiana, considerant algunes aproximacions.

La solució gaussiana és

$$\langle c(x, y, z, t) \rangle = \frac{S}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x(t) \sigma_y(t) \sigma_z(t)} \exp \left[ -\frac{(x - ut)^2}{2\sigma_x^2(t)} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2(t)} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2(t)} \right] \quad (4.2)$$

Com es pot observar, el nom de la solució (gaussiana) es degut a la forma de la funció resultant de la integració. Les aproximacions que es consideren per a obtenir aquesta solució imposen que aquesta equació només serà vàlida quan:

- Les reaccions químiques siguin lentes comparades amb el transport turbulent.
- Les escales de longitud i temps característiques dels canvis de concentració siguin grans comparades amb les corresponents escales de transport turbulent.

A	molt inestable
B	moderadament inestable
C	lleugerament inestable
D	indiferent
E	lleugerament estable
F	moderadament estable
G	molt estable

Taula 4.5: Descripció qualitativa de l'estratificació

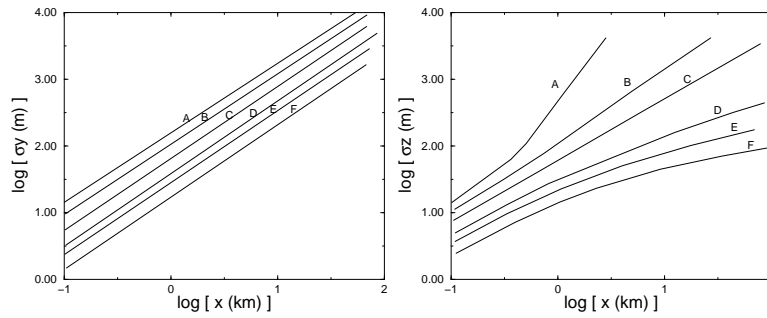


Figura 4.10: Valors empírics de la dispersió

Aquestes condicions no es compleixen en zones molt properes a focus localitzats. El model tan sols és vàlid, per tant, en situacions amb reaccions químiques relativament lentes (contaminants inerts) i focus dispersos (zones urbanes).

Segons l'aproximació gaussiana, s'aplica la hipòtesi de flux atmosfèric homogeni, pel que la velocitat del vent  $u$  és funció exclusivament del temps.

Però, fins i tot,  $u(t)$  és una funció aleatòria en el temps i és necessari conèixer alguna propietat d'aquesta aleatoritat que permeti integrar-la en el model.

La solució general gaussiana pot simplificar-se en ocasions per a adaptar-se a determinats entorns. Així, considerem un entorn homogeni i estacionari en el que el vent té la direcció de l'eix  $X$  i es manté constant en el temps i l'espai. Llavors es pot menysprear l'efecte de la dispersió, representat per la variància  $\sigma_x$ , en el transport en aquesta direcció, ja que l'efecte del vent és molt major.

En aquest cas, els paràmetres  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  es mantenen constants durant el transcurs del temps a un mateix lloc i depenen tan sols del temps  $x/u$  que triga la contaminació en arribar a aquest lloc. En aquestes condicions,  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  es poden expressar en funció de només la posició  $x$ . L'equació gaussiana que defineix la dispersió d'un contaminant des d'un focus emissor puntual continu es simplifica

$$\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{S}{2\pi\sigma_y(x)\sigma_z(x)} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2(x)} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2(x)}\right] \quad (4.3)$$

essent  $S$  el cabal màssic d'emissió del contaminant.

Si el que tenim és un focus emissor lineal (per exemple, una carretera) en la direcció  $y$  perpendicular a la direcció del vent, donat que l'emissió  $S$  és homogènia al llarg de tota la línia de la carretera, l'expressió estacionària es redueix a

$$\langle c(x, z) \rangle = \frac{S}{(2\pi)^{1/2}\sigma_z(x)} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2(x)}\right] \quad (4.4)$$

Aquestes expressions només poden utilitzar-se de forma precisa en les condicions indicades, encara que habitualment representen una aproximació acceptable. En qualsevol cas, ara ja pots fer l'activitat 4.

Fins ara no hem considerat cap efecte degut a la no homogeneïtat del medi. Potser la inhomogeneïtat més marcada, alhora que la més freqüent, és la

deguda a que l'atmosfera està limitada pel terra. Com a primera aproximació podem suposar que el terra és com un mirall que reflexa tota la contaminació que li arriba, sense modificar la seva velocitat horitzontal i invertint la seva velocitat vertical. En aquest cas, l'Eq. 4.3 es converteix en

$$\begin{aligned} < c(x, y, z) >= \\ &= \frac{S}{2\pi\sigma_y(x)\sigma_z(x)} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2(x)}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2(x)}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2(x)}\right] \right\} \end{aligned}$$

El focus emissor, que a les equacions precedents era a  $(0, 0, 0)$ , ara es troba a  $(0, 0, H)$ .

Queda pendent la qüestió de trobar una expressió acceptable per a  $\sigma_y(x)$  i  $\sigma_z(x)$ . A la Fig. 4.10 es poden veure unes relacions empíriques.

Cada corba es correspon a un estat de l'estratificació atmosfèrica. A la Taula 4.5 es pot veure la descripció qualitativa de cadascun d'aquests estats.

## Resum

En aquesta unitat s'ha descrit l'atmosfera com un medi complex, s'ha estudiat la contaminació atmosfèrica i s'han descrit els seus efectes. També s'ha tractat la dispersió dels contaminants emesos per les xemeneies i s'han vist diferents models matemàtics per descriure els nivells d'immissió que en resulten.

En el nostre estudi, la troposfera és la capa de més interès ja que és la zona a on es transporten els contaminants més importants. A més, és la regió a on es produeixen gairebé tots els fenòmens climàtics.

S'han definit els conceptes de contaminació atmosfèrica, nivell d'emissió i nivell d'immissió. Tan sols els contaminants primaris són emesos. Els contaminants secundaris es formen per reacció química d'altres contaminants. Els focus d'emissió poden ser naturals o originats per activitats de l'home (antropogènics).

Els efectes de la contaminació atmosfèrica són amplis. Per mesurar i controlar els efectes sobre la salut humana s'han establert els índexs de qualitat atmosfèrica. A Catalunya s'utilitza l'índex ICQA que és una adaptació a la normativa europea de l'índex americà PSI. Mitjançant el valor d'aquest índex, es pot classificar l'estat de l'atmosfera en tres categories: bona, millorable i pobre.

Hem descrit la Meteorologia relacionada amb la contaminació: pressió atmosfèrica, núvols, humitat i vent. Aquest darrer fenomen és el més important en el transport de contaminants a través de l'atmosfera. Un altre fenomen meteorològic important és la inversió tèrmica, que pot impossibilitar el desplaçament vertical de contaminants.

S'han descrit els fenòmens implicats en la dispersió de contaminants per xemeneies. Una atmosfera estable inhibeix els moviments verticals i una atmosfera inestable els amplifica. Des del punt de vista fenomenològic, el moviment d'una fumera està caracteritzat pel vent, l'estabilitat i la turbulència atmosfèrica. És destacable el fenomen de fumigació per inversió tèrmica. La seva presència a les capes baixes de l'atmosfera pot arribar a taponar l'ascens de la fumera i fer que la contaminació impacti sobre regions relativament properes al focus emissor.

Per acabar, hem fet una introducció a la simulació numèrica per obtenir una predicció objectiva de l'estat futur de l'atmosfera. Això s'aconsegueix resolent un grup d'equacions que descriuen l'evolució de les variables atmosfèriques.

Existeixen diferents models amb diferents quantitats de paràmetres empírics. Es distingeixen dos tipus bàsics: deterministes i estadístics.

Per a la resolució simultània de totes les equacions de conservació cal tenir en compte que els contaminants es troben en concentracions molt més petites que les dels principals components de l'aire. En particular, hem estudiat el model gaussià i l'hem adaptat a alguns entorns fent ús de diverses aproximacions i suposicions.

## **Glossari**

**adiabàtic sec** procés durant el qual no hi ha canvis de fase a l'aigua.

**emissió** contaminants emesos a l'atmosfera per xemeneies, cotxes, ...

**ICQA** acrònim de “índex català de la qualitat de l'aire”

**immissió** contaminants dipositats sobre la superfície terrestre

**perfil adiabàtic** és el perfil ideal pel qual no hi ha cap intercanvi de calor amb el medi del voltant.

**PSI** acrònim de “polution standard index”

## Referències addicionals

- **G. Luna Tomás:** *La contaminació atmosfèrica*. Generalitat de Catalunya, Barcelona (1995).

Realitza un estudi de la contaminació existent a Catalunya, senyalant quins són els principals focus emissors i analitzant els nivells de contaminació existents. També presenta solucions per poder disminuir l'emissió de contaminants i els nivells d'immissió.

- **J.J. La Villa:** *Todo sobre el medio ambiente*. Editorial Praxis, Barcelona (1996).

Ens proporciona una visió global de tots aquells processos que poden contaminar el terra, l'aigua i l'atmosfera, proporcionant solucions per evitar-los.

- **L. Echarri:** *Ciencias de la tierra y del medio ambiente*. Editorial Teide, Barcelona (1998).

Aquest llibre explica què és el medi ambient, el perquè de la seva regressió i com obtenir un model de desenvolupament sostenible. Proporciona una idea de què és l'atmosfera, de quins són els seus principals contaminants i quines repercussions tenen en el medi ambient i a la salut humana. També proposa una sèrie de models matemàtics.

- **A. Toll and J.M. Baldasano:** *Modelling of photochemical air pollution in the Barcelona area with highly disaggregated anthropogenic and biogenic emissions*. *Atmospheric environment* **34**, 3069–3084 (2000).

Aquest article realitza un estudi sobre la contaminació a l'àrea de Barcelona, deguda principalment als elevats nivells d'ozó que hi ha a la primavera i a l'estiu. Per realitzar la simulació numèrica han utilitzat el model MEMO (versió 5) desenvolupat per Kuntz i Moussiopoulos en 1995.

## Activitats

1. Consulta la pàgina web <http://www.gencat.cat/mediamb/icqa/> de valoració de la qualitat de l'aire a partir de les dades provinents de les estacions automàtiques de la Xarxa de Vigilància i Previsió de la Contaminació Atmosfèrica (XVPCA) de Catalunya. Dóna la teva opinió sobre l'evolució de la contaminació durant la darrera setmana.
2. Consultant l'arxiu de l'ICQA trobeu quin ha estat el millor i el pitjor dia, pel que fa a contaminació atmosfèrica, dels darrers vint dies, a la teva població. A la pàgina web <http://www.infomet.fcr.es/arxiu/> podeu trobar un arxiu de les dades dels observatoris del Servei de Meteorologia de Catalunya, dels darrers vint dies. En concret, hi trobareu mapes on consta la humitat, la temperatura i el vent. Aconseguiu les dades meteorològiques corresponents a la teva població per a aquests dos dies i comenteu quines són les principals diferències.
3. A la pàgina web esmentada a l'activitat 2 també s'hi pot trobar mapes de superfície amb fronts. Pels mateixos dos dies, aconsegiu els corresponents mapes meteorològics i assenyalau si corresponen a una situació de borrasca (baixes pressions) o anticicló (altes pressions).
4. Considera que tenim un focus emissor lineal, en la direcció  $y$  i perpendicular a la direcció del vent, i amb una emissió  $q$  homogènia al llarg de tota la línia. Mitjançant la equació que ens descriu la concentració en funció de la altura  $z$ , representa gràficament  $c = c(z)$  per a diferents valors possibles de la variància, i comenta els efectes d'augment o disminució de la variància.
5. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.



## Exercicis d'autocomprovació

1. Quina de les següents zones de l'atmosfera conté més ozó?
  - (a) Troposfera
  - (b) Estratosfera
  - (c) Mesosfera
  - (d) Ionosfera
2. Quin d'aquests gasos no es considera com gas de efecte hivernacle?
  - (a)  $CO_2$
  - (b)  $CH_4$
  - (c)  $He$
  - (d)  $O_3$
3. Quina de les següents formes d'una fumera produeix més contaminació sobre llocs propers a la xemeneia?
  - (a) fumera de forma cònica
  - (b) fumera de forma horitzontal
  - (c) fumera de forma serpentejant
  - (d) fumera de fumigació
4. Mitjançant el valor del índex de qualitat de l'aire, quin d'aquests valors correspon a la categoria baixa per a la salut humana?
  - (a) 22
  - (b) 28
  - (c) 36
  - (d) 52
5. De les següents afirmacions, quina es falsa?
  - (a) El moviment d'una fumera està perfectament caracteritzat pel vent, l'estabilitat i la turbulència

- (b) Els núvols cirrus semblen un cabell o plomes flotant en l'aire
- (c) Els gradients de pressió atmosfèrica ocasionen moviments de l'aire de llocs d'alta a baixa pressió
- (d) Els principals gasos productors de pluja àcida són el  $SO_2$  i el  $CO_2$

## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (a) 5. (d)

## **Unitat 5**

# **Difusió de contaminants al sòl**

## **Presentació**

El sòl de la superfície terrestre és el magatzem de nutrients per la vegetació i és un medi sotmès a diferents processos físics i químics que influeixen directament en el desenvolupament dels vegetals. Un dels factors que poden modificar aquest desenvolupament és la irradiació deguda a la contaminació radioactiva o presència de substàncies radioactives sobre la superfície terrestre i al subsòl. Per aquest motiu és interessant analitzar el creixement vegetal condicionat amb la presència de material radioactiu a l'atmosfera que degut a diverses condicions mediambientals, com la pluja, constitueix una font de contaminació per al sòl.

En aquesta unitat estudiarem com passa una substància tòxica (de caràcter radioactiu) des de l'atmosfera a la vegetació a través del sòl. Mitjançant un model senzill i el mètode de resolució d'equacions diferencials d'Euler mirarem de descriure la propagació temporal al sòl de contaminants radioactius.

## Objectius

- Enunciar les principals característiques de la radioactivitat i de diversos punts que hi estan relacionats: radionúclids, instal·lacions radioactives, ...
- Descriure els processos que tenen lloc quan un contaminant passa de l'aire al sòl i modelitzar-los adientment.
- Utilitzar un mètode senzill per resoldre numèricament equacions diferencials.

# Esquema

## 1. Radioactivitat

### (a) Els processos de desintegració

- i. Partícules  $\alpha$  i  $\beta$ .
- ii. Radiació electromagnètica  $\gamma$ .
- iii. Radiacions ionitzants.

### (b) Fonts radioactives d'origen natural

- i. Fonts de radiació interna
- ii. Fonts de radiació externa
- iii. Sèries radioactives

### (c) Fonts radioactives d'origen humà. Protecció dels seus efectes

- i. Fissió controlada
- ii. Enriquiment radioactiu
- iii. Reactor nuclear convencional
- iv. Residus radioactius d'alta i baixa activitat

### (d) Model de desintegració simple de materials radioactius

## 2. Difusió de contaminants radioactius al sòl

### (a) Càlcul de la concentració

- i. Deposició
- ii. Modelització del sòl-vegetació
- iii. Coeficients de transferència

### (b) Resolució del sistema pel mètode d'Euler

### (c) Exemple representatiu i validesa del model

## 5.1 Radioactivitat

### 5.1.1 Els processos de desintegració

Existeixen un nombre d'elements naturals a la Terra que són radioactius, és a dir, que estan formats per àtoms inestables que espontàniament per pèrdua de protons, neutrons i/o captura d'electrons es desintegren i es converteixen en altres elements, fins arribar a transformar-se en àtoms estables.

Els mecanismes més importants de desintegració dels radionúclids són els següents: uns elements radioactius es transformen en altres per l'emissió de partícules  $\alpha$  (nuclis de heli, formats per dos protons i dos neutrons); altres emeten partícules  $\beta$  (electrons) sense alterar el seu número màssic i augmentant en una unitat el seu número atòmic. Amb freqüència, el nucli fill format després de la desintegració  $\alpha$  i  $\beta$  es troba en un estat excitat i allibera aquesta energia d'excitació emetent raigs  $\gamma$ , radiacions electromagnètiques similars als raigs X però amb menys longitud d'ona, i per això amb més poder penetrant. Encara que existeixen altres tipus d'activitat radioactiva natural, els mecanismes que s'han descrit corresponen a la majoria dels processos espontanis de desintegració.

Aquestes radiacions donen lloc a interaccions amb els àtoms i molècules de la matèria, provocant una ionització directa, pel xoc amb el medi de les partícules  $\alpha$  i  $\beta$  amb elevada energia cinètica, o indirecta per la radiació electromagnètica  $\gamma$ . La ionització es la causa dels efectes produïts per les radiacions i del seu impacte ambiental.

<p><b>Curiositat:</b> La velocitat d'emissió de les partícules <math>\alpha</math> és d'uns 10000 Km/s i les partícules <math>\beta</math> poden arribar fins a 290000 km/s. La penetració de la radiació <math>\alpha</math> amb energia de 4 MeV a l'aire en condicions normals és d'uns 3 cm i la penetració de la radiació <math>\beta</math> amb les mateixes condicions és de més de 15 m.</p>
--

### 5.1.2 Fonts radioactives d'origen natural

Les fonts de radiació són tots aquells materials naturals o artificials (materials o aparells d'origen humà) que emeten o poden emetre les radiacions ionitzants.



A l'escorça terrestre existeixen dues fonts de radiació natural: la interna, que és la produïda pels radionúclids presents al seu interior, i l'externa, que és la produïda per els radionúclids que s'originen per la interacció dels raigs còsmics (veure glossari) amb els núclids de l'atmosfera (per exemple l'hidrogen-3 o triti, carboni-14, ...).

En general els radionúclids interns procedeixen de sèries radioactives (veure glossari) naturals de les quals existeixen quatre fonamentals:

- sèrie del tori, tots els seus elements tenen masses atòmiques múltiples de 4
- sèrie del neptuni, masses atòmiques  $4n + 1$
- sèrie del urani-radi, masses atòmiques  $4n + 2$
- sèrie del urani-actini, masses atòmiques  $4n + 3$

A la vegada també hi ha elements radioactius naturals de procedència interna que no formen sèries radioactives com per exemple el potassi-40.

### 5.1.3 Fonts radioactives d'origen humà. Protecció dels seus efectes

#### Reactors nuclears i aparells

Els reactors nuclears bàsics es fonamenten en el procés de fissió controlada de l'urani-235. Si els neutrons no es perden, la fissió d'un nucli dona lloc a la inducció de la fissió de dos o més nuclis. En un reactor nuclear convencional, utilitzat per generar energia, el combustible està format per òxids d'urani que tenen un enriquiment per contenir aproximadament el 3% de  $U^{235}$ . Aquest enriquiment és necessari ja que el  $U^{235}$  constitueix solament el 0.7% del  $U^{238}$  que és l'isòtop natural i no fissionable.

**Curiositat:** Un procés de fissió bàsic és:  $1 U^{235} + 1 n \longrightarrow 1 Sr^{90} + 1 Xe^{143} + 3 n$

Els òxids d'urani estan situats en tubs de zirconi aïllats i formant un conjunt de tubs muntats a l'interior d'una estructura grossa d'acer (Fig. 5.1). L'aigua s'utilitza tant per refrigerar els dipòsits com per transferir aquesta energia a un generador de vapor. Aquest vapor és usat per al funcionament d'una turbina-generador elèctric.

Altres dispositius construïts artificialment que poden generar radiacions són els aparells de raigs X, els acceleradors de partícules i els explosius nuclears. De la mateixa manera que en els reactors, en aquests dispositius també és necessari interposar blindatges entre el seu entorn i la font radioactiva, amb un greu perill en el cas de les proves nuclears amb explosius. En aquest darrer

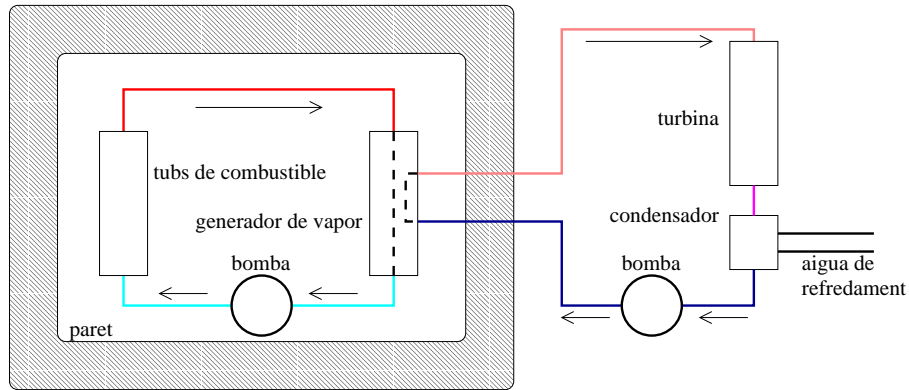


Figura 5.1: esquema d'una central nuclear

cas no hi ha controls estrictes de protecció per als efectes nocius de les radiacions ionitzants en el medi ambient.

Per als aparells de raigs X, els acceleradors de partícules i altres dispositius de radiació que comporten un benefici social (per exemple exposicions necessàries per diagnòstics mèdics), existeix un sistema de protecció basat principalment en la limitació de la dosi absorbida (veure glossari) anual per a l'exposició de les persones.

**Curiositat:** La unitat de la dosi absorbida en el SI és el Gray, *Gy*, absorció d'un Joule en una massa d'un quilogram

## Residus radioactius

La utilització de les fonts de radioactivitat natural i artificial provoca la producció de residus radioactius que constitueixen fonts de radioactivitat controlada i aïllada al sòl. Es poden considerar diferents tipus de residus, els residus radioactius d'alta (HLW), mitjana (ILW) i baixa activitat (LLW). Els residus de alta activitat procedeixen principalment del combustible gastat pels reactors nuclears. Els residus de mitjana activitat procedeixen del procés de fabricació de combustible nuclear, de reprocessaments i d'altres fonts com, per exemple, la medicina. Els residus de baixa activitat es poden considerar formats pels residus esporàdics.

Els residus radioactius d'origen humà de baixa i mitjana activitat són després d'un pretractament de filtració, compactació i un procés de condicionament en bidons metàl·lics, situats en estructures aïllades en superfície o a baixa profunditat. El seu aïllament garanteix que durant un període de segles aquests materials no constitueixen una font de contaminació per al sòl.

Per altra banda, els efectes provocats pels residus radioactius d'alta activitat són molt més difícils de controlar. Durant el segle XX es van estudiar diverses formes d'aïllament com l'abocament en fosses marines, llançament a

l'espai, emmagatzematge a gran profunditat del sòl amb barreres artificials (contenidors resistents) i barreres naturals (entorn geològic de materials, com el granit, d'un gruix de centenars de metres).

### 5.1.4 Model de desintegració simple de materials radioactius

Abans de començar a tractar els fluxos de radiació d'un sistema complex de plantes i sòl es necessari conèixer el procés de desintegració de la substància radioactiva mitjançant un model simple. La desintegració natural del radionúclids és un procés de primer ordre; el nombre d'àtoms d'un cos radioactiu que és desintegra per unitat de temps és proporcional al nombre total dels àtoms existents al cos.

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C(t)$$

a on  $C(t)$  ens representa els àtoms sense desintegrar i  $\lambda$  la constant radioactiva. El signe menys ens indica que, amb el temps, disminueix el nombre d'àtoms del material estudiat. La resolució d'aquesta equació ens dona

$$C(t) = C(0)e^{-\lambda t}$$

Aquesta equació és certa pels radionúclids, es a dir, si el temps creix en progressió aritmètica, el nombre d'àtoms original disminueix en progressió geomètrica i el període de semidesintegració (veure glossari) pot ser des de segons fins a milers d'anys.

**Curiositat:** Per a l'urani el període de semidesintegració és de 4500 milions d'anys, mentre que el del poloni és de 0.16 s.

El problema sorgeix quan per algun error humà, accident (per exemple el de Txernòbil) o proves d'explosions nuclears aquests materials (que hem tractat en els anteriors apartats) procedeixen a contaminar l'atmosfera i el sòl d'un entorn i comença així la possible destrucció d'un hàbitat.

## 5.2 Difusió de contaminants radioactius al sòl

En aquesta secció estudiarem un model compost de fonts per estimar la concentració de material radioactiu en el sòl, subsòl i plantes, mitjançant les seves relacions.

La contaminació radioactiva és la presència de substàncies radioactives en éssers vius o en el medi ambient. Això significa que una contaminació radioactiva sempre comportarà una possibilitat d'irradiació. En el cas de les plantes es distingeix la contaminació externa, que és el dipòsit de substàncies radioactives sobre la superfície de les plantes, de la interna, produïda per l'absorció d'aigua que procedeix del sòl amb fonts radioactives. En el nostre estudi es valorarà

com passa una substància tòxica des de l'atmosfera a la vegetació a través del sòl.

En la Figura 5.2 es mostren esquemàticament els diferents processos que cal modelitzar. El model pot ser separat en subsistemes connectats seqüencialment: la deposició de l'aire, la contaminació del sòl per deposició, la contaminació de la vegetació per absorció, resuspensió i deposició, la transferència de contaminació des de les plantes als animals per ingestió i la infiltració del sòl al subsòl. En el model que tractarem a continuació es considerarà el sistema de aire-plantes-sòl-subsòl sense la intervenció dels animals. Tot i que el procediment és semblant per a qualsevol material, ho aplicarem al cas del  $Cs^{137}$ , un dels contaminants emesos durant l'accident de Txernòbil.

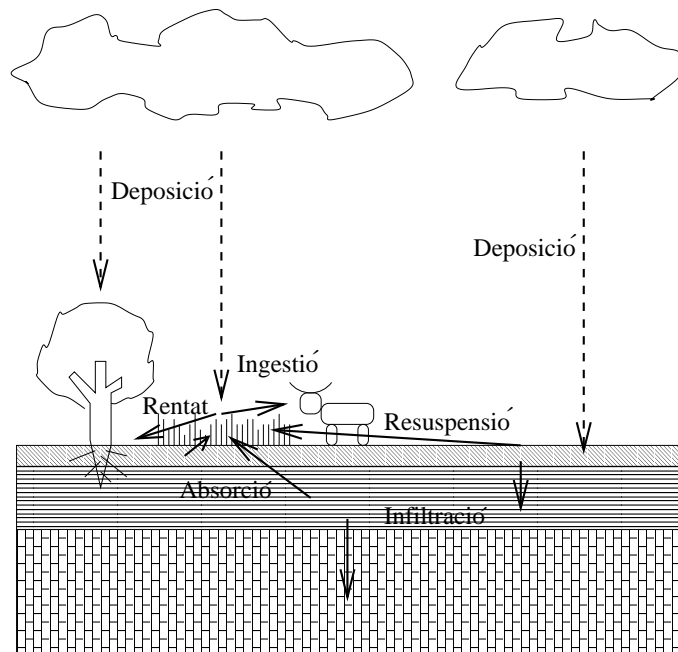


Figura 5.2: Processos al sòl

### 5.2.1 Càlcul de la concentració

En primer lloc considerarem el terme de concentració radioactiva a l'aire com la font principal del sistema. Aquesta concentració es considera situada a una alçada afectada per les pluges dels núvols. Per aquest motiu la deposició  $\Phi$  sobre la vegetació i el sòl està composta per dos termes: sec i humit. El terme sec  $\Phi_S$  és la pluja radioactiva de les partícules i el terme humit  $\Phi_H$  representa el rentat de l'aire per les precipitacions:

$$\Phi = \Phi_S + \Phi_H$$

La deposició  $\Phi$  es mesura en Bequerels ( $Bq$ ) per unitat de superfície i dia. Un  $Bq$  és una desintegració per segon. L'expressió general de la deposició és

$$\Phi = V_g \chi + h I a \chi$$

a on  $V_g$  és la velocitat de deposició ( $m/d$ ),  $I$  és la precipitació ( $mm/d$ ),  $h$  és l'alçada dels núvols i  $\alpha$  és la constant de rentat. La concentració de material radioactiu a l'aire  $\chi$  es mesura en  $Bq/m^3$  (El nombre de desintegracions radioactives que tenen lloc cada segon en un metre cúbic d'aire). La precipitació es mesura en  $mm/d$ , on un  $mm$  és un  $l/m^2$ .

A la Taula 5.1 es sumariuen les dades que ens faran falta per poder fer càlculs amb aquest model.

La Figura 5.3 ens representa les relacions de transferència de contaminants en el sistema de aire–plantes–sòl–subsòl. La deposició constitueix el punt de partida de la dinàmica de aquest sistema, és la font de contaminació d'entrada al sòl (0.75% de la deposició) i plantes (0.25% de la deposició). La concentració de material radioactiu al sòl es pot expressar en  $Bq/m^2$  (ens referim a tota l'activitat que té lloc a una superfície de  $1 m^2$  en una capa de sòl determinada). La concentració de material radioactiu a la vegetació s'expressa en  $Bq/kg$ . Es pot passar d'una unitat a l'altra utilitzant la densitat de vegetació ( $kg/m^2$ ) com a factor de conversió.

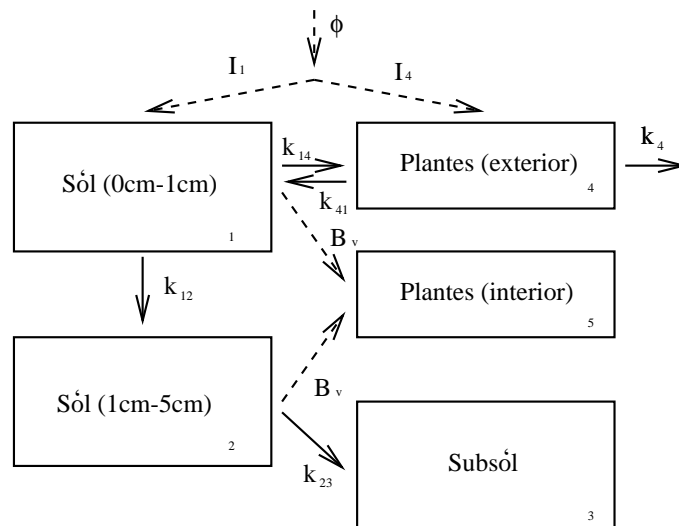


Figura 5.3: Modelització del sòl

Les línies discontinües representen fonts o relacions de proporcionalitat. Les línies contínues són fluxos proporcionals a la quantitat de sortida. A més hi ha una variació per la semidesintegració del material radioactiu. De aquesta manera el sistema considerat està constituït per cinc llocs o cel·les de concentració: sòl fins  $1 cm$ , sòl entre  $1 cm$  i  $5 cm$ , subsòl, superfície externa i interior de plantes. En aquest model els coeficients de transferència de contaminants entre aire–plantes–sòl–subsòl estan basats en resultats empírics. En la Taula 5.2 s'anomenen cadascú d'aquests coeficients amb el valor que correspon al cas del  $Cs^{137}$ . També tenim, a la Taula 5.3, el valor dels paràmetres que no són específics d'aquest radionúclid.

El sistema d'equacions usat per calcular el temps d'evolució de la activitat en el model plantes–sòl és el següent:

Concentració a l'aire	$\chi$	$Bq m^{-3}$
Precipitació	$I$	$mm d^{-1}$
Densitat de vegetació (humida)	$Y_m$	$kg m^{-2}$

Taula 5.1: Entrades del model

Deposició (sòl)	$I_1$	$0.75 \Phi$
Deposició (plantes)	$I_4$	$0.25 \Phi$
Semidesintegració	$\lambda$	$6.33 \cdot 10^{-5} d^{-1}$
Infiltració	$k_{12}$	$6.65 \cdot 10^{-4} d^{-1}$
Infiltració	$k_{23}$	$1.73 \cdot 10^{-4} d^{-1}$
Resuspensió	$k_{14}$	$8.64 \cdot 10^{-5} d^{-1}$
Rentat	$k_{41}$	$3.0 \cdot 10^{-2} + I \cdot 3.4 \cdot 10^{-2} d^{-1}$
Creixement	$k_4$	$Y'_m/Y_m$
Absorció	$B_v$	$2.0 \cdot 10^{-2} m^2 kg^{-1}$

Taula 5.2: Paràmetres del model

Alçada de barreja	$h$	$1000 m$
Constant de rentat	$\alpha$	$0.6 mm^{-1}$
Velocitat de deposició	$V_g$	$210 md^{-1}$
Densitat sòl (capa 1)	$P_1$	$13 kg m^{-2}$
Densitat sòl (capa 2)	$P_2$	$52 kg m^{-2}$

Taula 5.3: Constants del model

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= (-\lambda - k_{12} - k_{14})Q_1 + k_{41}Q_4 + I_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} &= k_{12}Q_1 + (-\lambda - k_{23})Q_2 \\ \frac{dQ_3}{dt} &= k_{23}Q_2 - \lambda Q_3 \\ \frac{dQ_4}{dt} &= k_{14}Q_1 + (-\lambda - k_{41} - k_4)Q_4 + I_4 \\ Q_5 &= Y_m B_v \left( \frac{Q_1}{P_1} + \frac{Q_2}{P_2} \right) \end{aligned}$$

Les unitats dels coeficients d'activitat a les cel·les  $Q_1, Q_2, Q_3$  i  $Q_4$  són  $Bq/m^2$  i  $Q_5$  és  $Bq/kg$ .  $K_{ij}$  representen els coeficients de transferència entre cel·les. Les primeres quatre equacions són equacions diferencials de primer ordre, en les que intervenen totes les possibles relacions existents entre les diferents cel·les del sistema, així com la desintegració en cada cel·la. La cinquena equació és l'expressió de la activitat de la concentració al interior de les plantes i  $P_1, P_2$  representen les densitats a les dues capes superficials de sòl amb valors:  $P_1 = 13 \text{ kg}/m^2$  (fins  $1 \text{ cm}$ ),  $P_2 = 52 \text{ kg}/m^2$  ( $1-5 \text{ cm}$ ).

Ara pots fer les activitats 1 i 2.

## 5.2.2 Resolució del sistema pel mètode d'Euler

El mètode d'Euler serveix per resoldre equacions diferencials del tipus

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

No es pot fer servir quan  $f(x_0, t) = 0$ . L'algoritme d'aquest mètode és:

1. Partim d'uns valors inicials  $x_0$  i  $t_0$ .
2. Dividim el temps en passos discrets d'una durada  $\Delta t$

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

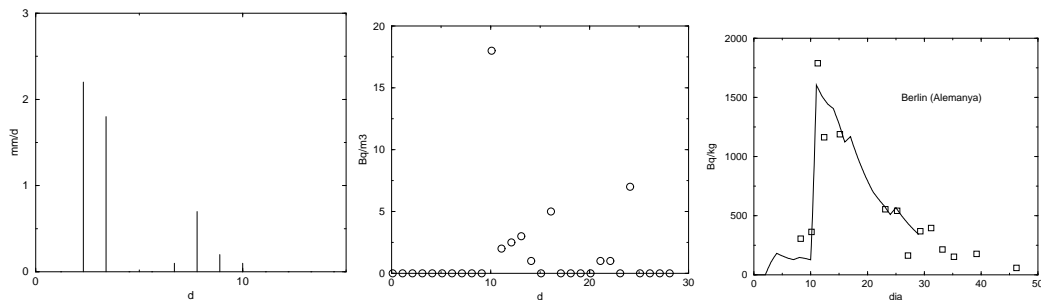


Figura 5.4: Dades i resultats del model

3. Per a cada pas, trobem el valor de la variable dependent

$$x_i = x_{i-1} + f(x_{i-1}, t_{i-1} + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t$$

4. Un cop ja tenim  $x_i$  podem obtenir un valor millor iterant (això és opcional!)

$$x_i = x_{i-1} + f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, t_{i-1} + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t$$

5. Es torna a repetir el procés amb el següent pas.

Per aplicar aquest esquema a un sistema d'equacions diferencials, només cal dibuixar una fletxeta de vector a sobre de cada  $x$ .

### 5.2.3 Exemple representatiu i validesa del model

Com exemple representatiu de la validesa del model i del mètode de resolució d'equacions diferencials per la propagació temporal de contaminants radioactius, podem comparar els resultats obtinguts amb les dades reals corresponents a Berlín després de la contaminació que va sofrir l'aire amb l'accident de Txernòbil. En la Figura 5.4 s'observen els resultats: la primera gràfica ens representa la pluja observada ( $mm/d$ ) en un període de 15 dies; la segona gràfica la concentració de  $Cs^{137}$  a l'aire observada en un període de 30 dies; i la tercera gràfica és la que ens mostra els resultats experimentals de concentració radioactiva a la vegetació (punts) amb les prediccions efectuades amb el model (línia).

Per aprendre més coses sobre la contaminació al sòl, fes l'activitat 3.



## Resum

En aquesta unitat hem analitzat un model dinàmic de concentració radioactiva en un sistema aire–sòl–vegetació. Inicialment s’han enumerat els mecanismes més importants de desintegració dels radionúclids i les fonts de radiació: naturals o artificials, i una descripció de la protecció dels seus efectes. S’ha descrit els fonaments de desintegració natural de la substància radioactiva mitjançant un model simple per començar a tractar els fluxos de radiació d’un sistema complex de plantes i sòl.

Com resultat de accidents o proves nuclears atmosfèriques hem considerat una concentració de  $Cs^{137}$  a l’aire que dona lloc a la deposició radioactiva al sòl i a les plantes d’un entorn amb la possible destrucció d’un hàbitat. El model que es planteja en aquesta unitat està separat en subsistemes o cel·les (sòl fins 1 *cm*, sòl entre 1 i 5 *cm*, subsòl, superfície externa i interior de plantes) relacionats de forma directa i indirecta mitjançant: la deposició de l’aire, la contaminació del sòl per deposició, la infiltració del sòl al subsòl i la contaminació de la vegetació per absorció, resuspensió i deposició.

De aquestes relacions s’ha presentat el sistema d’equacions per calcular el temps d’evolució de la activitat radioactiva en el model. S’han tingut en compte totes les possibles relacions existents entre les diferents cel·les del sistema, així com la desintegració en cada cel·la. La resolució de aquest sistema pel mètode d’Euler ens ha permès arribar a descriure l’activitat radioactiva a l’aire i precipitacions com, per exemple, a Berlín.

## Glossari

**raigs còsmics** radiació electromagnètica y partícules carregades que s'originen en diferents llocs del univers. La radiació electromagnètica del Sol és en la seva majoria infraroja, visible i ultra violeta, cau contínuament sobre la Terra i produeix una sèrie de efectes importants, com el clima i la fotosíntesis.

**sèries radioactives** és el conjunt de materials lligats per desintegració natural, es a dir, que s'obtenen uns dels altres per eliminació de partícules  $\alpha$  i  $\beta$ , s'anomenen sèries radioactives.

**dosi absorbida** és el quocient entre el valor mitja de l'energia impartida per la radiació a la matèria en un volum elemental i la massa continguda en aquest volum.

**període de semidesintegració** temps necessari perquè el nombre de nuclis de la mostra es redueixi a la meitat.

## Referències addicionals

- **Josep Lluís Font et alter:** *A model of radionuclide transfer from air into foodstuff*. CIEMAT, Madrid (1994).

En aquest llibre trobareu el model desenvolupat en aquesta unitat amb una descripció més ampla dels coeficients utilitzats, així com el estudi dels efectes del  $Cs^{137}$  i d'un altre material radioactiu ( $I^{131}$ ). Aquest estudi es fa per comparar les prediccions amb els resultats experimentals obtinguts en 13 llocs del món afectats per l'accident de Txernòbil.

## Activitats

1. Segons la figura 5.3 que ens representa la modelització del sòl, hem plantejat el sistema de equacions diferencials a tractar, troba una manera de modificar aquest esquema i en conseqüència el sistema de equacions si es consideren també els efectes deguts a la pastura d'animals, com per exemple vaques.
2. Observant les 4 equacions diferencials tractades, planteja com ha de ser l'expressió general de la velocitat de transferència de activitat radioactiva  $dQ_i/dt$  de un compartiment o cel·la  $i$ .
3. Busca informació sobre alguna contaminació del sòl que fos considerada important (excepte Txernòbil). Comenta els estudis i resultats als que s'han arribat. No cal que el contaminant sigui radioactiu.
4. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.

## Exercicis d'autocomprovació

1. Quin dels següents contaminants no formen sèries radioactives naturals:
  - (a) Tori
  - (b) Urani
  - (c) Radi
  - (d) Potassi
2. De les següents afirmacions quina és falsa?
  - (a) El període de semidesintegració del urani es de 4500 milions d'anys
  - (b) El subsòl influeix en la contaminació de les plantes per absorció
  - (c) La activitat de la concentració al interior de les plantes (Q5) es inversament proporcional a l'absorció
  - (d) El rentat de les plantes per pluja és un flux de sortida de la contaminació exterior de les plantes al sòl
3. La unitat de la deposició és:
  - (a)  $Bq m^{-2} d^{-1}$
  - (b)  $Bq m d^{-1}$
  - (c)  $Bq m^2 d$
  - (d)  $Bq m^2$

## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (d) 2. (c) 3. (a)

## **Unitat 6**

# **Difusió de contaminants al medi aquàtic**

## **Presentació**

L'aigua a la biosfera transporta matèria i energia i ofereix suport al desenvolupament de la vida, de la qual n'és un component essencial. La importància de l'aigua no es pot sobrevalorar. Per aquest motiu és molt interessant poder preveure quin serà l'impacte d'un determinat ús de l'aigua sobre el medi aquàtic i quin serà l'efecte sobre els altres usos de l'aigua.

En aquesta unitat mirarem d'estimar quina relació hi ha entre les concentracions de contaminants en el medi aquàtic i la intensitat dels abocaments, mitjançant models senzills. Es comentarà breument quines són les principals vies de dispersió i es discutirà el rang de validesa dels resultats dels models emprats.



## **Objectius**

- Descriure breument el sistema d'aigües superficial.
- Utilitzar models senzills per predir la concentració de contaminants a un medi aquàtic.

## **Esquema**

1. El sistema d'aigües superficials
  - (a) El cicle hidrològic
  - (b) Usos de l'aigua
    - i. Medi natural
    - ii. Font de subministrament
    - iii. Medi receptor
    - iv. Generació d'energia
  - (c) La qualitat de l'aigua (paràmetres)
    - i. Físics
    - ii. Químics
    - iii. Biològics
2. Concentració dels contaminants a l'aigua
  - (a) Rius
  - (b) Llacs, estuaris i mars
3. Vies de dispersió dels contaminants
  - (a) Transport pel corrent
  - (b) Sedimentació
4. Rang de validesa del model
  - (a) Interrelació amb el medi
  - (b) Homogeneïtzació de les concentracions
  - (c) Variació dels cabals i dels abocaments
  - (d) Interacció amb els sediments

## 6.1 El sistema d'aigües superficials

### 6.1.1 El cicle hidrològic

Quan parlem d'aigües superficials (veure glossari) en realitat ens referim a una part del cicle de l'aigua (Fig. 6.1) a la troposfera (veure glossari).

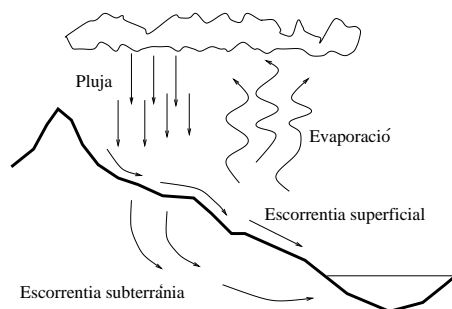


Figura 6.1: El cicle de l'aigua

De fet, es tracta de la part més important del cicle de l'aigua, doncs hi tenen lloc una gran quantitat de processos geològics (arrossegament de materials), químics (transport de substàncies dissoltes) i biològics (síntesi de matèria orgànica, flux de nutrients, circulació de residus).

**Curiositat:** L'aigua és un dels composts més abundants del planeta, ja que constitueix un 7% de la seva massa total. No obstant, tan sols el 0.7% d'aquesta aigua correspon a aigua dolça en estat líquid

Podem dir que la característica més notable de les aigües superficials és la seva capacitat per transportar matèria i energia. Aquesta capacitat confereix a l'aigua un paper determinant en l'estat dels ecosistemes terrestres i aquàtics.

### 6.1.2 Usos de l'aigua

L'aigua és un medi natural que té una forta activitat. A més, interacciona amb el territori que té al seu voltant (riberes i zones inundables). La preservació de

la flora i de la fauna que viu al medi aquàtic o al seu voltant requereix un cabal mínim d'aigua, que tingui un cert nivell de qualitat.

Les aigües superficials són, a més, una font de subministrament per a subministrament públic, reg agrícola, activitats industrials, activitats ramaderes o altres usos. En aquest sentit, cada activitat té les seves exigències, tant en quantitat com en qualitat.

**Curiositat:** El volum d'aigua considerat mínim per poder viure és de 10 l/hab dia, incloent consum i higiene. El consum a les grans ciutats situa entre els 150 i 200 l/hab dia, tenint en compte tan sols el consum domèstic

Estretament lligat a l'ús anterior, tenim l'ús com a receptor d'altres fluxos hídrics. Sovint s'utilitza l'aigua com a medi físic adequat per transportar i desfer-se de residus. Aquesta utilització comporta un deteriorament de la qualitat de les aigües.

L'aigua s'utilitza per generar energia hidroelèctrica, mitjançant la construcció d'embassaments, o energia tèrmica, utilitzant l'aigua com a font freda. En ambdós casos es poden produir efectes negatius, ja sigui per la modificació del cabal en el primer cas o per l'augment de la temperatura en el segon.

En aquest moment, ja pots fer l'activitat 1.

**Curiositat:** La mitjana estatal de disponibilitat d'aigua és de 3000 m<sup>3</sup> per habitant i any, per sobre de la mitjana europea de 2500 m<sup>3</sup> per habitant i any. La gran variabilitat espacial i temporal fa, però, que a moltes zones hi hagi escassetat d'aigua

### 6.1.3 La qualitat de l'aigua

La contaminació (veure glossari) pot ser tant d'origen natural com antropogènic (veure glossari). En aquest darrer cas, sol estar associada amb l'aportació de substàncies (normalment contingudes en un flux d'aigua) o energia.

La composició de l'aigua varia en el mateix instant en que es precipita en forma de pluja. El diòxid de carboni es dissol a l'aigua de pluja i li dóna una lleugera acidesa. Això fa que, un cop a la superfície, tingui una major capacitat per dissoldre els minerals. El resultat final és un augment de la salinitat de l'aigua.

A la costa mediterrània, predominantment calcàrea, aquest fenomen produeix aigües dures, amb un gran contingut de calç.

A banda de les sals minerals, altres tipus de substàncies inorgàniques també poden anar a parar a l'aigua, amb resultats diversos.

Els cianurs, els cromats i els metalls pesants tenen un efecte tòxic. Els fosfats i els nitrats, que es troben principalment als adobs, estimulen el creixement biològic i provoquen, per aquest motiu, l'empobriment de l'aigua en oxigen.

L'aport de matèria orgànica també provoca una disminució de l'oxigen disponible a l'aigua. Això es degut a que els organismes que descomposen la matèria orgànica són aerobis (veure glossari) i a que també hi ha processos inorgànics d'oxidació de la matèria orgànica. La matèria inorgànica que en resulta contribueix a deteriorar la qualitat de l'aigua.

**Curiositat:** Un contaminant no té perquè ser tòxic. La mationesa és una substància molt contaminant malgrat no ser tòxica. Si us caduca un pot no el buideu a la pica. És molt millor llençar-lo a les escombreries

La manca d'oxigen és tan sols un primer pas en la pèrdua de qualitat de l'aigua. Els organismes anaerobis, que són els únics que poden viure sense oxigen, emeten nitrogen, àcid sulfhídric i metà. La coloració fosca i l'aparició de males olors és el senyal més evident de la presència d'organismes anaerobis.

Per poder informar de la qualitat de l'aigua d'una manera pràctica, s'han creat indicadors. Aquests indicadors expressen la qualitat de l'aigua en forma de resultat numèric, basant-se en el valor de determinats paràmetres de qualitat.

L'índex ISQA, adoptat per la Generalitat de Catalunya es basa en sis paràmetres: la temperatura, l'oxigen dissolt, la  $DBO_5$  (veure glossari), la DQO (veure glossari), la matèria oxidable i la matèria en suspensió.

A la taula 6.1 podem veure altres paràmetres emprats per avaluar la qualitat de l'aigua.

<i>Paràmetres físics</i>	<i>Paràmetres químics</i>	<i>Paràmetres biològics</i>
Temperatura	pH	Bacteris
Olor	Potencial redox	Virus
Sabor	Alcalinitat	Fongs
Color	Acidesa	Microalgues
Terbolesa	Duresa	Plantes
Matèria en suspensió	Clorurs	Animals
Matèria dissolta	Amoníac	
Conductivitat elèctrica	Nitrats	
Radioactivitat	Nitrits	
	Oxigen dissolt	
	Demanda bioquímica d'oxigen (DBO)	
	Demanda química d'oxigen (DQO)	
	Nitrogen Kjeldahl	
	Substàncies orgàniques	

Taula 6.1: Paràmetres de qualitat de l'aigua

Abans de continuar, pots fer l'activitat 2.

## 6.2 Concentració dels contaminants a l'aigua

En aquesta secció estudiarem un model simple per estimar la concentració d'un contaminant a partir de la intensitat de l'abocament.

Fins ara hem vist com la incorporació d'un component (o la modificació de la seva concentració) al sistema de les aigües superficials no tan sols deteriora la qualitat de l'aigua sinó que altera el seu equilibri, provocant canvis addicionals.

Per no complicar excessivament el model, suposarem, en contra del que s'ha dit, que la interacció del contaminant amb el medi que l'envolta és senzilla. Això vol dir que el contaminant es descomposa en altres substàncies que no tenen cap efecte sobre el medi aquàtic. A més, la velocitat a la que es descomposa el contaminant només depèn, proporcionalment, de la seva concentració:

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\lambda C(t), \quad (6.1)$$

on  $\lambda$  és una constant de proporcionalitat, característica del contaminant. Les dimensions de  $\lambda$  són de  $[T]^{-1}$ . Quan  $\lambda$  és molt petita ens trobem davant d'una substància molt estable. Una  $\lambda$  gran és pròpia de materials que es descomponen ràpidament.

Les unitats de la concentració depenen del contaminant. La concentració és una quantitat dividida entre un volum. El volum es pot donar en litres ( $l$ ) o metres cúbics ( $m^3$ ). La quantitat de contaminant és dona en unitats de massa si és un producte químic o en unitats d'activitat radioactiva si és un radionúclid. En el primer cas podem utilitzar grams ( $g$ ), miligrams ( $mg$ ) o qualsevol altre múltiple o submúltiple del kilogram ( $kg$ ). En el segon cas podem utilitzar els bequerels ( $Bq$ ) que equivalen a una desintegració radioactiva per segon.

Resolvent l'Eq. 6.1 es veu que la concentració té una dependència exponencial amb el temps

$$C(t) = C(0) e^{-\lambda t}. \quad (6.2)$$

Aquestes premisses són certes en el cas particular dels radionúclids, però també poden servir per caracteritzar certs contaminants químics.

Per suposat, també són vàlides en el cas de contaminants extremadament estables, siguin del tipus que siguin. En aquest cas  $\lambda = 0$ .

També suposarem que el contaminant es difon de manera homogènia immediatament.

Finalment, considerarem que no hi ha interacció amb els sediments i que, per tant, tot el contaminant prové del flux d'aigua i és difon de la mateixa manera.

## 6.2.1 Càlcul de la concentració a rius

Segons les premises que hem assenyalat abans, la concentració d'un contaminant a un riu és

$$C = \frac{T}{R} e^{-\lambda t_p}, \quad (6.3)$$

on  $T$  és la intensitat de l'abocament,  $R$  és el cabal del riu i  $t_p$  el temps que triga l'abocament en arribar al punt del riu a on volem predir la concentració (veure la Fig. 6.2). Aquesta equació es dedueix, tret del factor exponencial, amb un

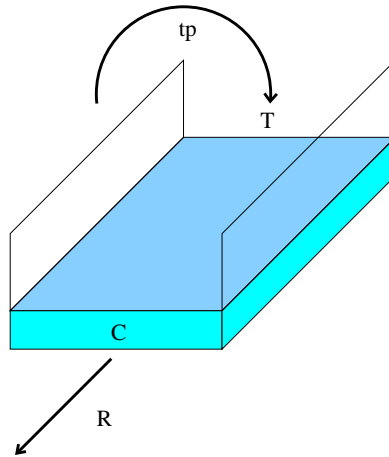


Figura 6.2: Paràmetres per calcular la concentració d'un contaminant a un riu simple argument de proporcionalitat.

Les unitats de  $T$  són de quantitat de contaminant per unitat de temps.  $R$  és un volum per unitat de temps.

Quan  $t_p$  és molt més petit que  $\lambda$ , l'exponencial és gairebé igual a 1.

En el cas que  $T$  i  $R$  siguin variables en el temps (la qual cosa es gairebé segura) l'Eq. 6.3 serà vàlida tan sols si el temps que triga l'aigua en arribar a un determinat punt és molt més petit que l'escala típica de variació de  $T$  i  $R$ .

## 6.2.2 Càlcul de la concentració a llacs, estuaris i mars

En el cas d'un llac, s'ha de treballar una mica més per poder obtenir la concentració de contaminant. Considerarem un llac com el de la Fig. 6.3, amb un abocament d'intensitat  $T$ , un volum  $V$  i un cabal de sortida  $R$ . Si anomenem  $Q$  a la quantitat de contaminant i  $C$  a la seva concentració, està clar que la relació entre ambdues magnituds vindrà donada per

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (6.4)$$

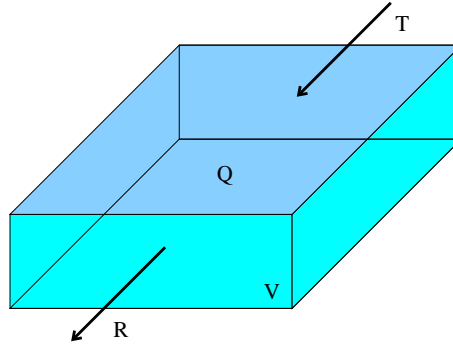


Figura 6.3: Paràmetres per calcular la concentració d'un contaminant a un llac

Pensem ara per quins motius varia la quantitat de contaminant  $Q$ . Per una banda tenim una variació deguda a l'abocament

$$\frac{dQ_a}{dt} = T, \quad (6.5)$$

una altra deguda a la quantitat de contaminant que es perd a través del flux de sortida

$$\frac{dQ_f}{dt} = -CR = -\frac{Q}{V}R \quad (6.6)$$

i una altra deguda a la descomposició del contaminant

$$\frac{dQ_d}{dt} = -Q\lambda. \quad (6.7)$$

Sumant aquestes equacions terme a terme obtenim la següent equació diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = T - Q \left( \lambda + \frac{R}{V} \right), \quad (6.8)$$

la solució de la qual és

$$Q = \frac{T}{\lambda + R/V} \quad (6.9)$$

o aplicant l'Eq. 6.4, si es prefereix en termes de la concentració,

$$C = \frac{T}{V \lambda + R/V}. \quad (6.10)$$

Per fixar idees, fes les activitat 3, 4 i 5.

### 6.2.3 Vies de dispersió dels contaminants

La principal via de dispersió, i l'única que hem tingut en compte, és la del moviment de les aigües. Una altra via important és la transferència als sediments. Els sediments poden absorbir una part del material contaminant. A l'inrevés, també és possible el pas de contaminació dels sediments a l'aigua, si hi ha una disminució de la concentració de contaminant al medi aquàtic.



## 6.2.4 Rang de validesa del model

El model que hem presentat és suficient per fer una estimació de les concentracions de contaminant a un medi aquàtic, a partir de la intensitat de l'abocament. No obstant presenta algunes limitacions.

En primer lloc, no s'ha tingut en compte les repercussions del contaminant a les propietats del medi. La presència d'un contaminant sovint modifica les propietats físiques, químiques i biològiques del medi d'una manera difícil de quantificar. A l'hora, aquest canvi en les propietats del medi pot afectar la concentració del propi contaminant. En aquest sentit, l'Eq. 6.1 és una simplificació radical, vàlida en comptades ocasions (radionúclids, substàncies molt estables químicament, concentracions baixes, ...).

Una altra limitació és que parteix de que la concentració de contaminant és homogènia. En un riu, aquesta condició no es raonable a distàncies curtes del punt d'abocament. En un llac sovint es dona el fenomen de l'estratificació, on el material difícilment pot passar d'una capa a una altra. Des d'un punt de vista matemàtic caldrà considerar que tenim varis compartiments i modelitzar la transferència de matèria entre aquests compartiments.

De la mateixa manera, s'ha considerat que els abocaments i els cabals són constants en el temps (homogeneïtat temporal). Alguna hipòtesi addicional i una major complexitat de les equacions diferencials ens permetrien anar més enllà en aquest punt.

Finalment, una limitació molt important és que no hem tingut en compte la interacció amb els sediments. Els sediments poden emmagatzemar contaminant i convertir-se en una font d'aquest material un cop s'hagi aturat l'abocament.

## Resum

En aquesta unitat hem presentat un model senzill de la propagació de contaminants al medi aquàtic. S'han enumerat els principals usos del sistema d'aigües superficials, que resulta ser tan sols una fase, de gran importància, del cicle de l'aigua.

La modificació de les propietats de l'aigua, degut a la introducció d'una substància aliena a la seva composició habitual o a la forta variació en la concentració d'un dels seus components habituals, comporta un efecte en cadena que produeix sovint canvis addicionals — fins i tot pel que fa a la pròpia substància que ha originat el canvi —. Per aquest motiu les consideracions sobre la concentració d'una certa substància sense tenir en compte el medi en el seu conjunt s'han de fer amb precaució.

Els radionúclids són un tipus de contaminant que ens ofereixen la oportunitat de treballar amb models senzills. No afecten de manera visible les propietats del medi i la seva velocitat de descomposició es independent dels factors ambientals.

El model que s'ha presentat té en compte els efectes més importants. Es pot millorar modelitzant de manera més acurada el moviment del contaminant entre les diferents zones del medi aquàtic i entre el medi aquàtic i les zones adjacents (sediments i riberes). També s'hauria d'estendre pel cas en que els abocaments i els cabals no són constants. Incloure la modificació de les propietats del medi degudes a la presència del contaminant implica un grau de dificultat molt superior.

## Glossari

**aerobis** que el seu metabolisme consumeix oxigen. Tots els éssers eucariota (que tenen cèl·lules amb nucli) i un bon nombre de procarionts (són una cèl·lula sense nucli) són aerobis. En canvi, els éssers anaerobis (per exemple els llevats) no necessiten oxigen i poden utilitzar altres espècies químiques (per exemple, l'ió nitrat o l'ió sulfat) com acceptors d'electrons.

**aigües superficials** són les que es troben als llacs, rius o, senzillament, les que s'escolen per sobre la superfície.

**antropogènic** generat per l'home.

**contaminació** modificació de les condicions físiques, químiques o biològiques d'una aigua superficial amb conseqüències desfavorables per a algun dels éssers vius que la utilitzen.

*DBO<sub>5</sub>* acrònim de “demanda biològica d'oxigen”.

*DQO* acrònim de “demanda química d'oxigen”.

**troposfera** és la capa de la terra compresa entre la superfície i 11 *km* d'alçada. És a on té lloc gairebé la totalitat dels fenòmens meteorològics.

## Referències addicionals

- **Josep Lluís Font:** *Dispersión de contaminantes en la biosfera. Modelos dosimétricos*. CIEMAT, Madrid (1990).

En aquest llibre trobareu el model desenvolupat en aquesta unitat, juntament amb alguns perfeccionaments. Està orientat principalment cap a la dispersió de radionúclids però el seu contingut pot ser d'interès en l'estudi d'altres substàncies contaminants.

## Activitats

1. Segons l'esquema que hem vist a la subsecció 6.1.2, com classificaries l'ús lúdic (bany, pesca, turisme fluvial, ...) dels rius.
2. Busca informació sobre el diòxid de sofre ( $SO_2$ ). Comenta breument on s'emet i com reacciona amb l'agua de pluja. Creus que intensifica o que disminueix l'efecte del diòxid de carboni ( $CO_2$ )?
3. Considera el cas de la Fig. 6.3, però suposant que per comptes d'un abocament  $T$  hi va a parar un flux d'aigua de cabal  $R_0$  i amb una concentració de contaminant  $C_0$ . Com caldria expressar les Eqs. 6.9 i 6.10?
4. Tornem a l'Eq. 6.10. Troba una expressió per a  $C/C_0$  i digues quines propietats matemàtiques li trobes (per exemple, si és positiva, negativa, creixent, decreixent, si té cotes superiors o inferiors, ...). Explica qualitativament com varia en funció de  $\lambda$  i en funció de  $V$  si la resta de paràmetres adopten valors arbitraris.
5. Basant-te en el que has vist en la unitat sobre propagació de contaminants al sòl, amplia el model del llac, per tenir en compte l'estratificació, utilitzant un model de caps amb fluxos proporcionals als seus continguts.
6. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.

## Exercicis d'autocomprovació

1. Quin dels següents efectes negatius no es degut a l'ús de l'aigua per generar energia?
  - (a) La inundació de terrenys pels embassaments
  - (b) L'augment de la temperatura de l'aigua dels rius
  - (c) L'acidesa de la pluja
  - (d) La variació dels cabals
2. Quin dels següents contaminants es caracteritza pel seu efecte tòxic?
  - (a) Els nitrats
  - (b) Els cromats
  - (c) La matèria orgànica
  - (d) Les sals minerals
3. Quin dels següents organismes és anaerobi?
  - (a) *Canis Familiaris*
  - (b) *Tripanosoma*
  - (c) Ferment lacti
  - (d) Ameba
4. Les unitats de la intensitat d'abocament  $T$  poden ser
  - (a)  $Bq/s$
  - (b)  $Bq/m^2$
  - (c)  $Bq \cdot s$
  - (d)  $Bq \cdot m/s$

## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (c) 2. (b) 3. (c) 4. (a)

## **Unitat 7**

# **Metabolisme i cadenes tròfiques**



## Presentació

Els models lineals són molt emprats a la Física i a l'Enginyeria. S'ha dit, amb sentit de l'humor, que la Física no-lineal és l'equivalent de la Biologia dels no-elfants. Així i tot, els models lineals són molt populars, per dos motius.

El primer motiu és que qualsevol dependència entre dues magnituds es pot considerar aproximadament lineal per a variacions no molt grans d'aquestes magnituds. Usualment, aquest argument es presenta a l'inversa. Per exemple, hom considera que una oscil·lació és petita quan la força recuperadora és proporcional a la separació fins a la posició d'equilibri.

En aquest sentit, tot sistema és lineal dintre d'uns certs límits, que depenen de les característiques del propi sistema. Això, però, no ens garanteix que l'aproximació lineal sigui vàlida en un cas particular.

El segon motiu és que els sistemes d'equacions lineals, ja siguin algebraïques o diferencials, es poden resoldre fàcilment, tant de forma analítica com numèrica.

En resum, els models lineals ens proporcionen fàcilment solucions que sempre tenen un cert rang de validesa, encara que no necessàriament resulten interessants des del punt de vista pràctic. Això tan sols ho pot determinar la comparació amb els valors reals.

En aquesta unitat presentem dos models lineals per a dos fenòmens diferents però relacionats, perquè ambdós modelitzen la transferència de matèria entre diversos llocs de l'ecosistema.

Un dels models estudia la transferència de radionúclids des del menjar fins a diferents parts del cos d'una vaca. Es tracta, doncs, d'un model del metabolisme d'una vaca, encara que es pot adaptar fàcilment a altres animals o a altres substàncies.

L'altre model ens indica com la matèria es va propagant al llarg d'una cadena tròfica. Es tracta d'un model amb moltes analogies amb el del metabolisme.

Tots els models lineals tenen en comú que es poden representar en forma d'esquema de capsles. Estudiarem aquests esquemes i recordarem algunes de les seves propietats.

Finalment, es farà una crítica d'aquests models i esmentarem quines són les seves principals mancances.

## **Objectius**

- Descriure les motivacions, el rang de validesa i les limitacions dels models lineals.
- Representar gràficament models lineals.
- Predir la quantitat de tòxic que es transferiran a diversos òrgans d'un animal utilitzant un model del metabolisme.
- Utilitzar un model de transferència de matèria al llarg d'una cadena tròfica.

## **Esquema**

1. Models lineals
  - (a) Representació mitjançant caps
  - (b) Propietats
2. Modelització del metabolisme
3. Modelització d'una cadena tròfica

## 7.1 Models lineals

Els models que s'exposaran en aquesta unitat són lineals en el següent sentit: la variació amb el temps d'una variable serà lineal respecte a la pròpia variable

$$\frac{dQ}{dt} = aQ + C.$$

L'objectiu és trobar una funció  $Q(t)$  que descriu la dependència de la variable respecte el temps, tot i que a vegades en tindrem prou amb conèixer algunes propietats de la solució, com, per exemple, el comportament a llarg termini.

Si tenim vàries variables, el model serà lineal sempre i quan la variació d'una variable depengui linealment de les variables del sistema. Per exemple, en el cas de 3 variables

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{dt} &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{13}Q_3 + C_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + a_{23}Q_3 + C_2 \\ \frac{dQ_3}{dt} &= a_{31}Q_1 + a_{32}Q_2 + a_{33}Q_3 + C_3\end{aligned}$$

Naturalment, algunes d'aquestes constants poden ser igual a zero. Aquest tan sols és el cas lineal més general possible per a tres variables.

Una de les propietats del sistema anterior és que es pot expressar de manera compacta mitjançant operacions matricials

$$\frac{d}{dt}Q_i = \sum_j a_{ij}Q_j + C_i$$

la qual cosa pot ser interessant a l'hora de resoldre el model mitjançant l'ordinador. La notació és l'habitual, tant en àlgebra com en anàlisi matemàtica.

Ha arribat, però, el moment de fixar idees i adaptar aquesta notació al nostre propòsit. En aquesta unitat volem modelitzar la transferència d'una substància d'un lloc a l'altre. Aquesta substància pot ser un element molt concret, com ara un radionúclid, o pot ser un tipus genèric de material, per exemple matèria orgànica o nutrients.

$Q_i$  representarà la quantitat (segons el model també pot ser una concentració) d'aquesta substància que es troba a dins d'un compartiment  $i$ . El significat

físic d'aquests compartiments depèn del model. Si estem estudiant el metabolisme (veure glossari), els compartiments representaran els òrgans de l'animal. En el cas de les cadenes tròfiques (veure glossari), poden representar éssers vius sencers. En qualsevol cas, es tracta d'una abstracció que deliberadament passa per alt els detalls referents al seu funcionament.

També donarem per suposada l'existència d'un medi que, per definició, contindrà tot el que no sigui a dins d'un compartiment. Això fa que la quantitat de substància al medi no sigui quantificable, ja que n'hi haurà molta més al medi que en qualsevol dels compartiments. Tan sols podrem quantificar els intercanvis del medi amb els compartiments.

Ens serà útil una notació que posi de manifest quina part de la variació d'una quantitat es deguda a la transferència de substància d'un compartiment a l'altre, quina es deu a intercanvis amb el medi i quina desapareix per la pròpia desintegració de la substància.

Considerarem que la transferència de matèria entre dos llocs diferents té lloc a través de *fluxos*. Cada flux serà proporcional a la quantitat a un dels dos compartiments i el considerarem positiu quan sigui aquesta quantitat la que perdi substància.

Segons això, hi haurà un flux del compartiment  $i$  al compartiment  $j$ . Degut a aquest flux, el lloc  $i$  perd una quantitat  $k_{ij}Q_i$  per unitat de temps. Aquesta quantitat és la que guanya el lloc  $j$  a causa d'aquest flux. Simultàniament, hi ha un altre flux, de  $j$  a  $i$ , que transfereix una quantitat  $k_{ji}Q_j$  per unitat de temps.

Part de la substància no es transfereix d'un lloc a l'altre. Això pot ser degut a que hi hagi una aportació del medi, una pèrdua al medi o a que la substància no sigui inert i vagi desapareixent amb el temps. Suposarem que tant la quantitat de substància desintegrada a  $i$  com les pèrdues del compartiment  $i$  cap al medi són proporcionals a la quantitat total que hi ha a aquest compartiment. En canvi, considerarem que les aportacions del medi són constants. La quantitat perduda al compartiment  $i$  que no va a parar a altres compartiment és doncs, per unitat de temps

$$\lambda Q_i + k_{ii}Q_i - C_i.$$

Les constants  $k$  i  $C$  poden ser negatives, si així ho requereix el problema que estem estudiant.  $\lambda$  acostuma a ser una constant coneguda, característica del material i és igual a zero en el cas de materials inerts.

Amb aquesta nova notació podem escriure el sistema anterior com

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= -(\lambda + k_{11} + k_{12} + k_{13})Q_1 + k_{21}Q_2 + k_{31}Q_3 + C_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} &= k_{12}Q_1 - (\lambda + k_{21} + k_{22} + k_{23})Q_2 + k_{32}Q_3 + C_2 \\ \frac{dQ_3}{dt} &= k_{13}Q_1 + k_{23}Q_2 - (\lambda + k_{31} + k_{32} + k_{33})Q_3 + C_3 \end{aligned}$$

El millor d'aquesta nova notació és la facilitat per representar-la gràficament. Dibuixarem cada compartiment  $i$  com una capsula, els fluxos com a línies contínues

i les aportacions constants com a línies discontinües. La representació gràfica del sistema es pot veure a la Figura 7.1.

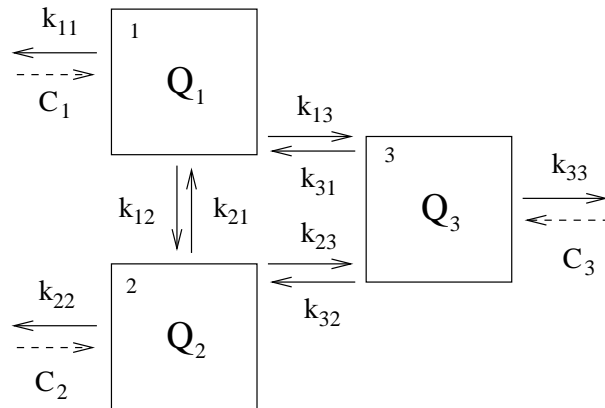


Figura 7.1: El model lineal més general possible per a la transferència d'una substància entre tres llocs diferents

Per practicar, pots fer les activitats 1 i 2.

Aquests models poden tendir cap a un estat estacionari o, en altres paraules, el sistema pot tenir un punt fix. En aquest estat les quantitats  $Q_i$  no varien i, en conseqüència, les seves derivades són iguals a zero. Si notem com a  $Q_i^*$  el valor de les variables a l'estat estacionari, el següent sistema algebraic

$$\begin{aligned} C_1 &= (\lambda + k_{11} + k_{12} + k_{13})Q_1^* - k_{21}Q_2^* - k_{31}Q_3^* \\ C_2 &= -k_{12}Q_1^* + (\lambda + k_{21} + k_{22} + k_{23})Q_2^* - k_{32}Q_3^* \\ C_3 &= -k_{13}Q_1^* - k_{23}Q_2^* + (\lambda + k_{31} + k_{32} + k_{33})Q_3^* \end{aligned}$$

ens permet trobar el punt fix per a uns valors donats de  $k_{ij}$  i  $C_i$ . En el cas que sigui incompatible entendrem que el model no tendeix cap a l'equilibri.

Quan estudiem un sistema real ens trobem gairebé sempre que ja és en equilibri. En aquests casos ens resultarà més fàcil mesurar experimentalment les quantitats a l'estat estacionari  $Q_i^*$  i les aportacions del medi. El problema és l'invers de l'anterior ja que ara les incògnites són les constants  $k_{ij}$  del sistema. Cal tenir en compte que aquest problema tan sols es pot resoldre, sense fer aproximacions addicionals, quan el nombre de fluxos és igual al nombre de compartiments del model.

## 7.2 Modelització del metabolisme d'una vaca

Atesa la complexitat del metabolisme d'un ésser viu, tan sols és possible una aproximació al problema basada en fórmules empíriques. Així doncs, no es justificarà biològicament el model. Més aviat, tindrem en compte que hi ha un rang de concentracions on la transferència de substàncies entre els diversos

$k_{00}$ 1.12	$k_{01}$ $5.69 \cdot 10^{-2}$	$k_{02}$ $1.56 \cdot 10^{-3}$
$k_{03}$ $8.64 \cdot 10^{-2}$	$k_{11}$ $6.91 \cdot 10^{-3}$	$k_{22}$ $6.91 \cdot 10^{-3}$

$$\lambda = 6.33 \cdot 10^{-5} d^{-1}$$

Taula 7.1: Constants del model del metabolisme d'una vaca

òrgans de l'animal és lineal i esperarem que els casos que es vulguin estudiar siguin a dintre d'aquest rang. Les constants  $k_{ij}$  que determinen aquesta transferència tampoc es deduiran en base a cap argument biològic sinó que s'utilitzaran valors que l'experiència ha demostrat que són raonables.

El model de la vaca es pot veure a la Fig. 7.2. Els compartiments són el tub digestiu (0), la carn (1), el fetge (2) i la llet (3). Aquest esquema és equivalent al següent sistema d'equacions

$$\begin{aligned} \frac{dQ_0}{dt} &= -(\lambda + k_{00} + k_{01} + k_{02} + k_{03})Q_0 + C \\ \frac{dQ_1}{dt} &= k_{01}Q_0 - (\lambda + k_{11})Q_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} &= k_{02}Q_0 - (\lambda + k_{22})Q_2 \\ \frac{dQ_3}{dt} &= k_{03}Q_0 - \lambda Q_3 \end{aligned}$$

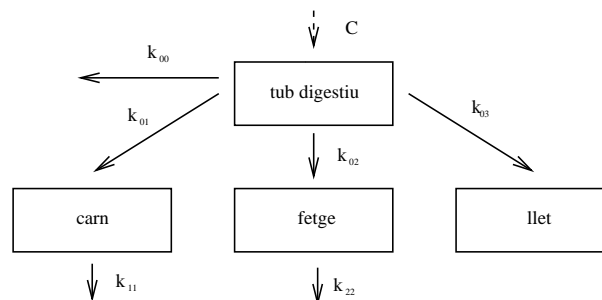


Figura 7.2: Model del metabolisme d'una vaca

En concret, volem modelitzar el pas d'un radionúclid ( $Cs^{137}$ ) des del menjar fins als diferents òrgans de la bèstia. Les unitats de  $Q_i$  seran doncs bequerels ( $Bq$ ). Recordem que 1  $Bq$  és la quantitat de radionúclid que dóna lloc a una desintegració radioactiva per segon.

La font  $C$  representa el  $Cs^{137}$  ingerit amb el menjar. Li assignarem unitats de Bequerels per dia ( $Bq/d$ ). Per a que les unitats quadrin, les constants  $k_{ij}$  han de tenir unitats d'invers de dia ( $d^{-1}$ ). Empíricament s'ha trobat que els valors de la Taula 7.1 són útils.

Amb aquestes constants, la concentració al menjar de  $Cs^{137}$  ( $Bq/kg$ ) i la quantitat de menjar ingerida diàriament per una vaca ( $kg/d$ ) podem calcular la concentració d'aquest radionúclid en els diferents òrgans de l'animal.

Quines són les limitacions d'aquest model? Un problema és inherent a les pròpies constants  $k_{ij}$ . No es ben conegut com depenen de l'espècimen i del seu entorn i cal prendre els resultats com una aproximació.

La principal limitació, però, és la suposició de linealitat. Així i tot, el model pot continuar sent vàlid de manera qualitativa i pot ser útil per entendre certs comportaments. Per exemple, el perquè un òrgan admet una certa quantitat d'un element i un cop superada aquesta concentració ja no n'accepta més. El cas més conegut és el del iode. Per evitar l'absorció per part de la glàndula tiroides (veure glossari) del radionúclid  $I^{129}$ , present als residus radioactius, es sol administrar a les persones exposades a aquesta contaminació pastilles amb l'isòtop estable del iode ( $I^{127}$ ). Com que les propietats químiques d'ambdós isòtops són idèntiques, l'isòtop estable satura la glàndula tiroides, que d'aquesta forma ja no absorbeix l'isòtop radioactiu.

## 7.3 Modelització d'una cadena tròfica

### 7.3.1 Model lineal

Els models de capsos també ens permeten modelitzar cadenes tròfiques. En aquest cas cada compartiment representarà la totalitat dels éssers vius d'una determinada espècie presents a un ecosistema (veure glossari).  $Q_i$  representarà la quantitat de matèria orgànica de l'espècie, es a dir, el pes total de tots els membres de l'espècie (biomassa).

Un ecosistema es pot veure com una unitat processadora d'energia i matèria inorgànica. Per analitzar la circulació d'energia i matèria es subdivideix l'ecosistema en *nivells tròfics*. Cada nivell disposa d'una quantitat d'energia i matèria i en proporciona a un altre nivell tròfic.

A partir d'energia i matèria inorgànica, els *productors primaris* generen matèria orgànica. Per una banda, aquesta matèria emmagatzema energia química que pot ser emprada per altres éssers vius. Per l'altra, proporciona la matèria necessària per construir les seves estructures.

Els organismes fotosintètics (veure glossari) poden generar matèria orgànica a partir d'energia i matèria inorgànica. En aquest sentit, són productors primaris. Per tant, les plantes i les algues sempre es trobaran a la base de la cadena tròfica i constituiran el primer nivell de la cadena tròfica.

De la matèria orgànica generada pels productors primaris se n'aprofiten diversos tipus de *consumidors*. Aquests es poden subdividir en *herbívors* i *carnívors*. Aquests organismes són el següents nivells tròfics de la cadena.

Un paper molt important és el que juguen els *descomponedors*. La matèria inorgànica que processen els productors primaris pot venir per dues vies, *intersistèmica* si ve de fora de l'ecosistema o *intrasistèmica* si procedeix del propi



ecosistema. És en aquest segon cas que els descomponedors actuen, retornant a la base de la cadena tròfica la matèria orgànica morta.

De fet, és el ritme al qual s'aporta matèria inorgànica als productors primaris el que determina la producció de matèria orgànica, ja que l'energia acostuma a estar disponible amb facilitat. Per aquest motiu és molt important entendre la circulació de determinats composts, per predir la magnitud d'aquesta producció. Els més importants són els composts del nitrogen, que potencien el creixement vegetal. És pot dir que la quantitat total de biomassa de l'ecosistema depèn en gran mesura de la disponibilitat dels composts nitrogenats.

Un dels ecosistemes més estudiats és el del *Kattegat*, una plataforma continental situada entre Dinamarca i Suècia. El principal productor primari de l'ecosistema és una alga microscòpica anomenada *eelgrass*. Un model de capses que proposem per a aquest ecosistema és a la Figura 7.3.

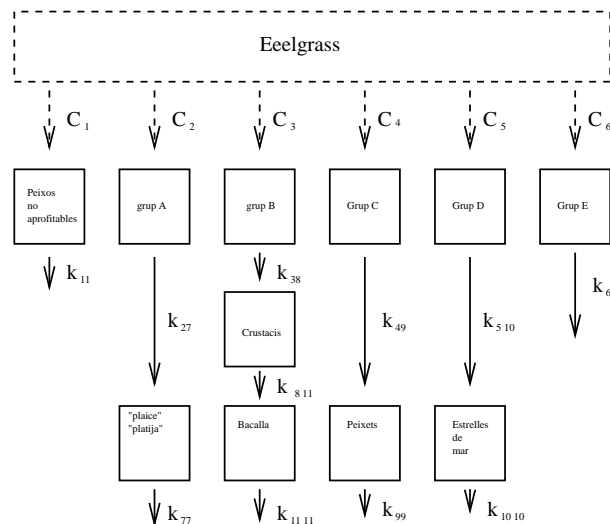


Figura 7.3: Model del Kattegat

El flux que entra a cada capsa és la seva *producció*. Val  $C_j$  pels organismes del segon nivell i  $k_{ij}Q_j$  per a la resta. En aquest model, les constants  $k$  són les *taxes de renovació*. Les seves inverses  $1/k$  són els *temps de renovació de la biomassa*.

Es tracta d'un model molt simplificat. Bàsicament hem fet quatre suposicions

- El primer nivell és una font constant d'aliments.
- Tan sols s'ha tingut en compte la principal font d'aliment de l'espècie.
- Tan sols s'ha tingut en compte el principal depredador de l'espècie.
- Exceptuant els organismes que es troben al capdamunt de la cadena tròfica, tota la resta convergeix en biomassa tot l'aliment que ingereix.

$C_1$	$C_2$	$C_3$
20000	200	2000
$C_4$	$C_5$	$C_6$
400	800	600

Taula 7.2: Valor de les fonts en milers de tones anuals

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
5000	50	500
$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$
100	200	150
$Q_7$	$Q_8$	$Q_9$
5	50	10
$Q_{10}$	$Q_{11}$	
25	6	

Taula 7.3: Valor de les quantitats a l'equilibri en milers de tones

El fet que es modelitzi l'aportació del primer nivell com a constant vol dir que la disponibilitat d'energia i de matèria inorgànica també ho és. Pel que fa a l'energia estem menyspreant, sense anar més lluny, l'efecte de les estacions. Com s'ha comentat abans, la disponibilitat de matèria inorgànica depèn de l'acció dels descomponedors (que caldria modelitzar adequadament) i de les aportacions externes (que també poden ser variables).

Malgrat tractar-se de suposicions considerables, tenen la seva lògica i podem esperar que els resultats siguin, si més no, qualitativament correctes. S'ha fet per tal de poder calcular el valor de les constants  $k_{ij}$  a partir del valor de les fonts  $C_i$  i de les quantitats a l'equilibri  $Q_i^*$ . Aquestes dades es poden consultar a la Taula 7.2 i 7.3.

Et suggerim que facis les activitats 3 i 4.

### 7.3.2 Més enllà del model lineal

Una aproximació diferent al problema de modelitzar una cadena tròfica consisteix en emprar els models de creixement i de relació entre espècies que ja es van estudiar.

Per comptes de caracteritzar cada espècie per la seva biomassa, utilitzarem el nombre de membres de l'espècie. De la mateixa manera, es caracteritzarà la relació entre dues espècies mitjançant els paràmetres dels models de competència entre espècies i presa–depredador, per comptes de la taxa de renovació del model lineal.

Per exemple, una cadena tròfica de tres nivells es modelitzaria mitjançant el sistema d'equacions

$$\frac{dN_x}{dt} = r\left(1 - \frac{N_x}{K}\right)N_x - a_{xy}N_xN_y$$

$$\frac{dN_y}{dt} = a_{xy}b_{xy}N_xN_y - d_yN_y - a_{yz}N_yN_z$$

$$\frac{dN_z}{dt} = a_{yz}b_{yz}N_yN_z - d_zN_z$$

La variable  $N_x$  representa el productor primari, mentre que  $N_y$  i  $N_z$  són els consumidors.

Aquest model ja no és lineal, per la qual cosa cal esperar un comportament més correcte lluny de l'equilibri. A més, el fet de considerar els membres de cada espècie de manera explícita, per comptes de caracteritzar l'espècie per la seva biomassa, resol alguns dels problemes d'interpretació del model lineal.

Una cas particular interessant es dóna quan

$$a_{xy} = a_{yz} = \dots$$

$$b_{xy} = b_{yz} = \dots$$

$$d_y = d_z = \dots$$

Es pot demostrar que, si es compleixen aquestes condicions, el nombre d'exemplars al primer nivell de la cadena tròfica depèn bàsicament de si el nombre de nivells de la cadena es senar o parell. Si hi ha un nombre senar de nivells tròfics el primer nivell serà molt abundant. En canvi, si hi ha un nombre parell de nivells tròfics el primer nivell no tindrà molts membres.

## Resum

Els models lineals són vàlids en situacions no molt allunyades de l'equilibri. A la pràctica, la major part dels sistemes es troben o bé a l'equilibri o bé en un estat equiparable, en el sentit que els canvis en els paràmetres del sistema es produeixen a un ritme molt més lent que el dels processos que hi tenen lloc.

En canvi, s'hauran de considerar amb moltes prevencions els resultats que es refereixin a estats transitoris, ocasionats per un canvi bruscat al sistema.

Per poder treballar amb més comoditat, s'ha establert una representació gràfica que ens permet visualitzar d'una manera més còmoda els mecanismes que modelitzem mitjançant un sistema d'equacions diferencials.

Hem aplicat aquest tipus de modelització a dos casos. En el primer, s'ha estudiat l'acumulació de radionúclid als teixits d'una vaca. Aquest model és fàcilment adaptable a altres organismes atès el seu grau de generalitat.

En el segon model, s'ha modelitzat com la matèria orgànica creada a la base d'una cadena tròfica va passant de formar part d'una espècie a una altra.

En ambdós casos, s'han comentat alguns problemes dels models, que tenen a veure principalment amb la suposició de linealitat. El sistema pot no actuar linealment lluny de l'equilibri o, senzillament, pot no haver-se estudiat mai fora de l'equilibri. Per aquest motiu, cal tenir un coneixement qualitatiu del sistema per poder avaluar la bondat de les nostres prediccions. Per a les cadenes tròfiques, s'ha presentat un model alternatiu.

## Glossari

**cadena tròfica** Conjunt de nivells tròfics entre els quals s'estableix una circulació, habitualment en un sol sentit, de biomassa.

**ecosistema** Qualsevol àrea de la natura contemplada des del punt de vista de la interacció de factors biòtics i abiòtics.

**metabolisme** Conjunt dels canvis químics que s'esdevenen contínuament en les cèl·lules vives.

**organisme fotosintètic** Són els que poden generar nutrients a partir de matèria inorgànica, bàsicament  $CO_2$  i  $H_2O$ .

**tiroides** Glàndula situada sota la faringe, la secreció de la qual té importància en la creixença i en el metabolisme.

## Referències addicionals

- **Alfred J. Lotka:** *Elements of mathematical biology*. Dover, New York (1956).

Un dels llibres clàssics sobre el tema encara que potser és massa ambiciós en algunes parts. Té capítols interessants.

- **Josep Lluís Font et al:** *A model of radionuclide transfer from air into foodstuff*. CIEMAT, Madrid (1994).

En aquest llibre trobareu el model de metabolisme de vaca desenvolupat en aquesta unitat amb una descripció més ampla dels coeficients utilitzats

- **Jonathan Roughgarden:** *Primer in ecological theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River (1998).

Llibre de text de biologia matemàtica amb un enfocament modern.

## Activitats

1. Escriu el sistema d'equacions diferencials que es correspon amb l'esquema de la Fig. 7.4.

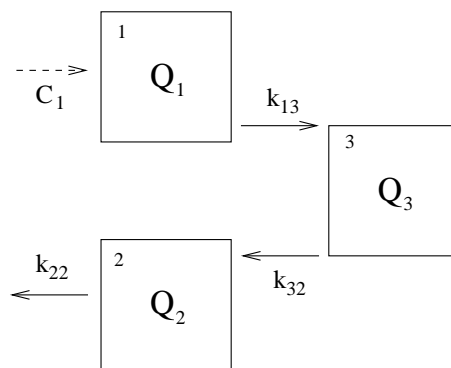


Figura 7.4: Exemple d'esquema de coves

2. Dibuixa l'esquema que correspon al sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dQ_1}{dt} = -(\lambda + k_{12})Q_1$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = +k_{12}Q_1 - (\lambda + k_{22})Q_2$$

3. Amplia l'esquema de la cadena tròfica del *Kattegat* amb els fluxos que et semblin imprescindibles. Raona la necessitat d'incloure cadascuna de les noves fletxes.
4. Busca en un llibre de Biologia un exemple de cadena tròfica. Indica quants nivells té.
5. Realitza les activitats descrites al guió de pràctiques corresponent a aquesta unitat.

## Exercicis d'autocomprovació

1. A un esquema de capsos, quantes fletxes contínues hi pot haver entre dues capsos.
  - (a) 1
  - (b) 2
  - (c) 4
  - (d) Tantes com vulguem
2. Considera el model de vaca que hem presentat. La carn d'una vaca que tingui el doble de massa que una altra tindrà, pel que fa a la concentració de radionúclids,
  - (a) el doble
  - (b) la meitat
  - (c) la mateixa
  - (d) cap de les anteriors
3. Quins organismes podem considerar que són a la base de la cadena tròfica?
  - (a) Els que realitzen la fotosíntesi.
  - (b) Els que disposen d'una font il·limitada d'aliment.
  - (c) Els que es poden nodrir de matèria inorgànica.
  - (d) Totes les anteriors són equivalents.



## **Solucions dels exercicis d'autocomprovació**

1. (d) 2. (b) 3. (c)

# Índex alfabètic

- acoblament, 47
- advecció, 92
- aerobis, 141
- aigües superficials, 141
- antropogènic, 141
- atmosfera, 80
  - capes, 80
  - composició, 82
  - modelització numèrica, 96
- atractor, 7, 38
- autòmat cel·lular, 20, 41, 64
- autosimilitud, 14
  
- bifurcació, 8
  
- cabal màssic, 100
- cadena tròfica, 159
  - de tres nivells, 156
- caos determinista, 7
- capacitat, 13, 38
- capacitat calorífica, 69
- CFCs, 85
- cicle, 7
  - de l'aigua, 133
- computadora universal, 24
- condicions inicials, 42
- conjunt
  - de mesura nul·la, 47
- contaminació, 141
  - atmosfèrica, 82
  - radioactiva, 117
  - valors de referència, 83
- contaminants
  - concentració de, 137
  - descomposició de, 138
  - fumera de, 91
  - no inerts, 92
  - primaris, 82
  - secundaris, 83
  - vida mitja estimada, 83
  - vies de dispersió, 138
- Conway, J., 20
- corredors biològics, 67
  
- DBO<sub>5</sub>, 141
- depredador, 40
- deriva genètica, 66
- descomponedors, 154
- destrucció de la capa d'ozó, 85
- diagrama
  - de bifurcacions, 14
  - de capes, 151
- dielectrics, 69
- difusió
  - turbulenta, 92
- dispersió, 83
- dosi absorbida, 124
- DQO, 141
  
- ecosistema, 159
- eelgrass, 155
- efecte hivernacle, 84
- elevació, 92
- emissió, 104
  - focus, 83
- equació
  - de recurrència, 6, 35
  - diferencial, 17, 42, 138
    - mètode d'Euler, 121
    - separable, 24
    - sistema de, 119
- escales de transport, 90
- estabilitat, 7, 37
- estocasticitat
  - ambiental, 9
  - demogràfica, 10, 66
- estratosfera, 80
  
- factor
  - de creixement, 13, 38
- fenomen crític, 61

flotabilitat, 93  
 fluctuacions, 24, 69  
 flux, 151  
 flux atmosfèric, 87  
 fonts radioactives, 114  
 fractal, 15  
  
 hàbitat, 64  
     fragmentació, 65  
 heterosfera, 81  
 homosfera, 81  
  
 ICQA, 104  
 immissió, 104  
 índex de qualitat, 83  
 influència mútua, 39  
 inversió tèrmica, 90  
 ionosfera, 81  
 ISQA, 135  
  
 Kattegat, 155  
  
 línia de coexistència, 60  
 longitud de correlació, 62  
  
 magnetosfera, 81  
 mesosfera, 81  
 metabolisme, 159  
 model  
     compost de fonts, 117  
     continu, 16  
     de circulació global, 97  
     de desintegració radioactiva, 117  
     de difusió atmosfèrica, 98  
     dependent de la densitat, 11  
     discret, 16  
     exponencial, 17  
     extensiu, 8, 20  
     geomètric, 8  
     independent de la densitat, 8  
     intensiu, 8  
     lineal, 150  
     logístic, 12, 18, 38  
  
 núvols  
     cúmulus, 89  
     cirrus, 89  
     estrats, 89  
 nivells tròfics, 154  
 normalització, 24  
  
 òrbita, 7, 38  
 organisme fotosintètic, 159  
  
 paràmetre d'ordre, 62  
 període de semidesintegració, 124  
 percolació, 58  
 perfil adiabàtic, 104  
 perfil de temperatura, 93  
 pluja àcida, 83, 84  
 presa, 40  
 procés  
     adiabàtic sec, 104  
     de transport, 83  
 producció, 155  
 PSI, 104  
 punt crític, 60  
 punt fix, 6, 37, 152  
     classificació, 37  
  
 radiacions ionitzants, 114  
 radioactivitat, 114  
 radionúclids, 115  
 raigs còsmics, 124  
 reactors nuclears, 115  
 representació, 42  
 residus radioactius, 116  
  
 sèries radioactives, 124  
 smog fotoquímic, 86  
 solució gaussiana, 99  
  
 taxa  
     de creixement, 18  
 temperatura crítica, 62  
 territori, 64  
 tiroides, 159  
 trajectòria, 47  
 transformació química, 83  
 transició de fase, 60  
     de primer ordre, 60  
     de segon ordre, 61  
 tret hereditari, 69  
 troposfera, 80, 141  
 turbulència, 88, 94  
  
 variància, 24  
 vent mig, 88

# Llicència

L'OBRA O LA PRESTACIÓ TAL COM ES DEFINEIX MÉS ENDAVANT, S'OFEREIX SEGONS ELS TERMES D'AQUESTA LLICÈNCIA PÚBLICA DE CREATIVE COMMONS (D'ARA ENDAVANT **CCPL O LLICÈNCIA**).

L'OBRA O LA PRESTACIÓ ESTÀ PROTEGIDA PER LA LLEI ESPANYOLA DE PROPIETAT INTEL·LECTUAL O QUALSEVOL ALTRA NORMA APLICABLE. QUEDA PROHIBIT QUALSEVOL ÚS DE L'OBRA O LA PRESTACIÓ DIFERENT DEL QUE AUTORITZI AQUESTA LLICÈNCIA O DISPOSIN LES LLEIS DE PROPIETAT INTEL·LECTUAL. L'EXERCICI DE QUALSEVOL DRET SOBRE L'OBRA O LA PRESTACIÓ COMPORTA QUE ACCEPTEU LES LIMITACIONS I OBLIGACIONS D'AQUESTA LLICÈNCIA I HI CONSENTIU, SENSE PERJUDICI DE LA NECESSITAT DE CONSENTIMENT EXPRÉS EN CAS DE VIOLACIÓ PRÈVIA DE LES SEVES CONDICIONS. EL LLICENCIADOR US CONCEDEIX ELS DRETS CONTINGUTS EN AQUESTA LLICÈNCIA, SEMPRE QUE N'ACCEPTEU LES CONDICIONS QUE HI SÓN PRESENTS.

## 1. Definicions

1. L'**obra** és la creació literària, artística o científica oferta en els termes d'aquesta llicència.
2. En aquesta llicència es considera una **prestació** qualsevol interpretació, execució, fonograma, enregistrament audiovisual, emissió o transmissió, mera fotografia o qualsevol altre objecte protegit per la legislació de propietat intel·lectual vigent aplicable.
3. L'aplicació d'aquesta llicència a una **col·lecció** (definida més endavant) afectarà únicament l'estructura com a forma d'expressió de la selecció o disposició dels continguts, i no es farà extensiva a aquests. En aquest cas la col·lecció tindrà la consideració d'obra a efectes d'aquesta llicència.
4. El **titular originari** és:
  - (a) En el cas d'una obra literària, artística o científica, la persona natural o el grup de persones que l'ha creada.
  - (b) En el cas d'una obra col·lectiva, la persona que l'editi i el divulgui amb el seu nom, llevat que hi hagi un pacte contrari.
  - (c) En el cas d'una interpretació o execució, l'actor, cantant, músic, o qualsevol altra persona que representi, canti, llegeixi, reciti, interpreti o executi de qualsevulla manera una obra.
  - (d) En el cas d'un fonograma, el productor fonogràfic, és a dir, la persona natural o jurídica sota la iniciativa i responsabilitat de la qual es fa per primera vegada una fixació exclusivament sonora de l'execució d'una obra o d'altres sons.
  - (e) En el cas d'un enregistrament audiovisual, el productor de l'enregistrament, és a dir, la persona natural o jurídica que tingui la iniciativa i assumeixi la responsabilitat de les fixacions d'un pla o una seqüència d'imatges, amb o sense so.

- (f) En el cas d'una emissió o una transmissió, l'entitat de radiodifusió.
  - (g) En el cas d'una mera fotografia, aquella persona que l'hagi realitzada.
  - (h) En el cas d'altres objectes protegits per la legislació de la propietat intel·lectual vigent, la persona que aquesta indiqui.
5. Es consideraran **obres derivades** aquelles obres creades a partir de l'objecte d'aquesta llicència com, per exemple, les traduccions i adaptacions; les revisions, actualitzacions i anotacions; els compendis, resums i extractes; els arranjaments musicals, i en general qualsevol transformació d'una obra literària, artística o científica. Per aclarir dubtes, si l'obra consisteix en una composició musical o en un enregistrament de sons, la sincronització temporal de l'obra amb una imatge en moviment (*synching*) serà considerada com una obra derivada als efectes d'aquesta llicència.
  6. Tindran la consideració de **col·leccions** la recopilació d'obres alienes, de dades o d'altres elements independents com ara les antologies i les bases de dades que per la selecció o disposició de llurs continguts constitueixin creacions intel·lectuals. La mera incorporació d'una obra en una col·lecció no donarà lloc a una obra derivada a efectes d'aquesta llicència.
  7. El **licenciador** és la persona o l'entitat que ofereix l'obra o la prestació subjecta als termes d'aquesta llicència i que en concedeix els drets d'explotació conforme al que s'hi disposa.
  8. **Vós** sou la persona o l'entitat que exerceix els drets concedits mitjançant aquesta llicència i que prèviament no ha violat els termes d'aquesta llicència respecte a l'obra o la prestació, o que ha rebut un permís exprés del licenciador per exercir els drets concedits mitjançant aquesta llicència malgrat una violació anterior.
  9. La **transformació** d'una obra comprèn la traducció, l'adaptació i qualsevol altra modificació de la qual derivi una obra diferent. La creació resultant de la transformació d'una obra tindrà la consideració d'obra derivada.
  10. S'entén per **reproducció** la fixació directa o indirecta, provisional o permanent, per qualsevol mitjà i en qualsevol forma, de tota l'obra o la prestació o de part d'ella, que en permeti la comunicació o l'obtenció de còpies.
  11. S'entén per **distribució** el fet de posar a disposició del públic l'original o les còpies de l'obra o la prestació mitjançant la venda, el lloguer, el préstec o qualsevol altre sistema.
  12. S'entén per **comunicació pública** qualsevol acte mitjançant el qual una pluralitat de persones, que no pertanyin a l'àmbit domèstic de qui la duu a terme, pot tenir accés a l'obra o la prestació sense que se'ls hagi fet una

distribució prèvia d'exemplars. Es considera comunicació pública el fet de posar l'obra o la prestació a disposició del públic per procediments electrònics amb fil o sense fil de manera que qualsevol persona pugui accedir-hi des d'on vulgui i quan vulgui.

13. L'**explotació** de l'obra o la prestació comprèn la reproducció, la distribució, la comunicació pública i, en el seu cas, la transformació.
14. Els **elements de la llicència** són les característiques principals de la llicència segons la selecció efectuada pel llicenciador i indicades en el títol d'aquesta llicència: Reconeixement, CompartirIgual.
15. Una **llicència equivalent** és:
  - (a) Una versió posterior d'aquesta llicència de Creative Commons amb els mateixos elements de la llicència.
  - (b) La mateixa versió o una versió posterior d'aquesta llicència de qualsevol altra jurisdicció reconeguda per Creative Commons amb els mateixos elements de la llicència (per exemple: Reconeixement-CompartirIgual 3.0 Japó).
  - (c) La mateixa versió o una versió posterior de la llicència de Creative Commons no adaptada a cap jurisdicció (*Unported*) amb els mateixos elements de la llicència.
  - (d) Una de les llicències compatibles que apareix a <http://creativecommons.org/compatiblelicenses> i que ha estat aprovada per Creative Commons com a essencialment equivalent d'aquesta llicència perquè, com a mínim:
    - i. Conté termes amb el mateix propòsit, el mateix significat i el mateix efecte que els elements d'aquesta llicència.
    - ii. Permet explícitament que les obres derivades d'obres subjectes a aquella puguin ser distribuïdes mitjançant aquesta llicència, la llicència de Creative Commons no adaptada a cap jurisdicció (*Unported*) o una llicència de qualsevol altra jurisdicció reconeguda per Creative Commons, amb els mateixos elements de la llicència.

**2. Límits dels drets.** No hi ha res en aquesta llicència que pretengui reduir o restringir qualsevol dels límits legals dels drets exclusius del titular dels drets de propietat intel·lectual d'acord amb la Llei de propietat intel·lectual o qualsevol altra normativa aplicable, ja siguin drets derivats d'usos legítims —com ara la còpia privada o la citació— ja siguin altres limitacions —com la que resulta de la primera venda d'exemplars (exhauriment).

**3. Concessió de llicència.** Conforme a les condicions d'aquesta llicència, el llicenciador concedeix, pel termini de protecció dels drets de propietat intel·lectual i a títol gratuït, una llicència d'àmbit mundial no exclusiva que inclou els drets següents:

1. Dret de reproduir, distribuir i comunicar públicament l'obra o la prestació.
2. Dret d'incorporar l'obra o la prestació en una o més col·leccions.
3. Dret de reproduir, distribuir i comunicar públicament l'obra o la prestació lícitament incorporada en una col·lecció.
4. Dret de transformar l'obra per crear-ne una obra derivada sempre que s'hi inclogui una indicació de la transformació o modificació efectuada.
5. Dret de reproduir, distribuir i comunicar públicament les obres derivades creades a partir de l'obra subjecta a la llicència.
6. Dret d'extraure i reutilitzar l'obra o la prestació d'una base de dades.
7. Per aclarir qualsevol dubte, el titular originari:
  - (a) Conserva el dret de percebre les remuneracions o compensacions previstes per actes d'explotació de l'obra o la prestació, qualificades per la llei com a irrenunciables i inalienables i subjectes a gestió col·lectiva obligatòria.
  - (b) Renuncia al dret exclusiu de percebre, tant individualment com mitjançant una entitat de gestió col·lectiva de drets, qualsevol remuneració derivada d'actes d'explotació de l'obra o la prestació que feu.

Aquests drets es poden exercir en tots els mitjans i formats, tangibles o intangibles, coneguts en el moment de concessió d'aquesta llicència. Els drets esmentats inclouen el dret a efectuar les modificacions que siguin tècnicament necessàries per exercir els drets en altres mitjans i formats. Tots aquells drets no cedits expressament pel llicenciador queden reservats, incloent-hi, a títol enunciatiu però no limitatiu, els drets morals irrenunciables reconeguts per la llei aplicable. En la mesura que el llicenciador tingui drets exclusius previstos per la llei nacional vigent que implementa la directiva europea en matèria de dret sui generis sobre bases de dades, renuncia expressament a aquests drets exclusius.

**4. Restriccions.** La concessió de drets que implica aquesta llicència està subjecta i limitada a les restriccions següents:

1. Podeu reproduir, distribuir o comunicar públicament l'obra o la prestació només en els termes d'aquesta llicència i n'heu d'incloure una còpia, o l'identificador uniforme de recursos (URI) corresponent. No podeu oferir o imposar cap condició sobre l'obra o la prestació que alteri o restringeixi els termes d'aquesta llicència o l'exercici dels drets per part dels seus concessionaris. No podeu sublicenciar l'obra o la prestació. Heu de mantenir intactes tots els avisos referents a aquesta llicència i a l'absència de garanties. No podeu reproduir, distribuir o comunicar públicament l'obra o la prestació amb mesures tecnològiques que en

controlin l'accés o l'ús d'una manera contrària als termes d'aquesta llicència. Aquesta secció 4.a també afecta l'obra o la prestació incorporada en una col·lecció, però no implica que la col·lecció en conjunt automàticament quedi o hagi de quedar subjecta als mateixos termes. En el cas que us sigui requerit, mitjançant una comunicació prèvia del llicenciador, si incorporeu l'obra o la prestació en una col·lecció o en creueu una obra derivada, haureu d'eliminar qualsevol dels crèdits requerits en l'apartat 4.c, fins on sigui possible.

2. Podeu distribuir o comunicar públicament una obra derivada, en el sentit d'aquesta llicència, només en els seus termes o mitjançant una llicència equivalent. Si useu aquesta mateixa llicència n'heu d'incloure una còpia o bé l'URI, amb cada obra derivada que distribuïu o comuniqueu públicament. No podeu oferir o imposar cap condició respecte de l'obra derivada que alteri o restringeixi els termes d'aquesta llicència o l'exercici dels drets per part dels seus concessionaris. Quan distribuïu o comuniqueu públicament l'obra derivada, heu de mantenir intactes tots els avisos referents a aquesta llicència i a l'absència de garanties. No podeu reproduir, distribuir o comunicar públicament l'obra derivada amb mesures tecnològiques que en controlin l'accés o l'ús d'una manera contrària als termes d'aquesta llicència. Si useu una llicència equivalent haureu de complir-ne els requisits establerts quan distribuïu o comuniqueu públicament l'obra derivada. Totes les condicions d'aquesta secció 4.b també afecten l'obra derivada incorporada en una col·lecció, però no implica que la col·lecció en conjunt automàticament en quedi o n'hagi de quedar subjecta.
3. Si reproduïu, distribuïu o comuniqueu públicament l'obra o la prestació, una col·lecció que la incorpori o qualsevol obra derivada, heu de mantenir intactes tots els avisos sobre la propietat intel·lectual i indicar, de manera raonable conforme al mitjà o als mitjans que useu:
  - (a) El nom de l'autor original, o el pseudònim si és el cas, així com el del titular originari, si s'ha facilitat.
  - (b) El nom d'aquelles parts (per exemple: institució, publicació, revista) que el titular originari o el llicenciador designin perquè siguin reconegudes en l'avís legal, les condicions d'ús, o de qualsevol altra manera raonable.
  - (c) El títol de l'obra o la prestació si s'ha facilitat.
  - (d) L'URI, si n'hi ha, que el llicenciador especifiqui perquè sigui vinculat a l'obra o la prestació, llevat que aquest URI no es refereixi a l'avís legal o a la informació sobre la llicència de l'obra o la prestació.
  - (e) En el cas d'una obra derivada, un avís que identifiqui la transformació de l'obra en l'obra derivada (p. ex., «traducció catalana de l'obra de l'autor original», o «guió basat en l'obra original de l'autor original»).



Aquest reconeixement s'ha de fer de manera raonable. En el cas d'una obra derivada o d'una incorporació en una col·lecció, aquests crèdits hauran d'aparèixer com a mínim en el mateix lloc on hi hagi els corresponents a altres autors o titulars i de forma comparable a aquests. Per aclarir qualsevol dubte, els crèdits requerits en aquesta secció només s'usaran a efectes d'atribució de l'obra o la prestació en la manera especificada anteriorment. Sense un permís previ per escrit, no podeu afirmar ni fer entendre implícitament ni explícitament cap connexió, patrocini o aprovació per part del titular originari, el licenciatador o les parts reconegudes cap a vós o cap l'ús que feu de l'obra o la prestació.

1. Per aclarir qualsevol dubte, s'ha de fer notar que les restriccions anteriors (paràgrafs 4.a, 4.b i 4.c) no s'aplicaran a les parts de l'obra o la prestació subjecta a aquesta llicència que únicament puguin ser protegides mitjançant el dret sui generis sobre bases de dades recollit per la llei nacional vigent que implementa la directiva europea de bases de dades.

**5. Exoneració de responsabilitat LLEVAT QUE S'ACORDI MÚTUAMENT ENTRE LES PARTS, EL LLICENCIADOR OFEREIX L'OBRA O LA PRESTACIÓ TAL COM ÉS (ON AN AS-IS BASIS) I NO CONFEREIX GARANTIA DE CAP MENA RESPECTE DE L'OBRA O LA PRESTACIÓ O LA PRESÈNCIA O L'ABSÈNCIA D'ERRORS QUE ES PUGUIN DETECTAR O NO. ALGUNES JURISDICCIONS NO PERMETEN L'EXCLUSIÓ D'AQUESTES GARANTIES, DE MANERA QUE AQUESTA EXCLUSIÓ POT NO SER APLICABLE EN EL VOSTRE CAS.**

**6. Limitació de responsabilitat. LLEVAT QUE LA LLEI APLICABLE HO DISPOSI EXPRESSAMENT I IMPERATIVAMENT, EN CAP CAS EL LLICENCIADOR SERÀ RESPONSABLE DAVANT VOSTRE PER QUALSEVOL DANY QUE EN PUGUI RESULTAR, TANT SI ÉS GENERAL COM ESPECIAL (INCLOSOS EL DANY EMERGENT I EL LUCRE CESSANT), FORTUÏT O CAUSAL, DIRECTE O INDIRECTE, PRODUÏT PER L'ÚS DE L'OBRA O LA PRESTACIÓ DURANT EL PERÍODE EN QUÈ S'ESTÉN AQUESTA LLICÈNCIA, ENCARA QUE EL LLICENCIADOR HAGUÉS ESTAT INFORMAT DE LA POSSIBILITAT D'AQUESTS DANYS.**

## **7. Finalització de la llicència**

1. Aquesta llicència i la concessió dels drets que conté acabaran automàticament en cas que se n'incompleixi qualsevol dels termes. No obstant això, no s'anul·larà la llicència d'aquelles persones o entitats que hagin rebut obres derivades o col·leccions vostres amb aquesta llicència, sempre que aquestes persones o entitats es mantinguin en el compliment íntegre d'aquesta llicència. Les seccions 1, 2, 5, 6, 7, i 8 continuaran vigents malgrat que finalitzi aquesta llicència.
2. Conforme a les condicions anteriors, la concessió de drets d'aquesta llicència és vigent per tot el termini de protecció dels drets de propietat

intel·lectual segons la llei aplicable. Malgrat això, el llicenciador es reserva el dret a divulgar o publicar l'obra o la prestació en condicions diferents a les presents, o a retirar-la en qualsevol moment. Tanmateix, això no suposarà donar per conclosa aquesta llicència (o qualsevol altra llicència que hagi estat concedida, o calgui concedir, en els termes d'aquesta llicència), sinó que continuarà vigent i amb efectes complets, a menys que no hagi finalitzat conforme allò establert anteriorment, sense perjudici del dret moral de penediment en els termes reconeguts per la llei de propietat intel·lectual aplicable.

## **8. Miscel·lània**

1. Cada vegada que exploteu d'alguna manera l'obra o la prestació, o una col·lecció que la incorpori, el llicenciador ofereix als tercers i successius llicenciataris la concessió de drets sobre l'obra o la prestació, en les mateixes condicions que la llicència que us ha estat concedida.
2. Cada vegada que exploteu d'alguna manera una obra derivada, el llicenciador original ofereix als tercers i successius llicenciataris la concessió de drets sobre l'obra subjecta a aquesta llicència, en les mateixes condicions que la llicència que us ha estat concedida.
3. Si alguna disposició d'aquesta llicència resulta invàlida o inaplicable segons la llei vigent, això no afectarà la validesa o l'aplicabilitat de la resta dels termes d'aquesta llicència i, sense cap acció addicional per a qualsevol de les parts d'aquest acord, aquesta disposició s'entendrà reformada en allò estrictament necessari per fer que aquesta disposició sigui vàlida i executiva.
4. No s'entendrà que hi ha renúncia pel que fa a algun terme o disposició d'aquesta llicència, ni que se'n consent cap violació, llevat que la renúncia o el consentiment figuri per escrit i estigui firmat per la part que renuncia o que consent.
5. Aquesta llicència constitueix l'acord ple entre les parts respecte de l'obra o la prestació objecte d'aquesta llicència. No hi ha interpretacions, acords o condicions respecte de l'obra o la prestació que no s'especifiquin expressament en aquesta llicència. El llicenciador no estarà obligat per cap disposició complementària que pugui aparèixer en qualsevol comunicació vostra. Aquesta llicència no es pot modificar sense que ho acordeu per escrit amb el llicenciador.