Departament de Física i Enginyeria Nuclear
Taller de modelització medi ambiental

Relació entre espècies

Models discrets

1. (∗) Les equacions de Lotka-Volterra normalitzades

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - \alpha y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i - \beta x_i)y_i$$

representen dues espècies que competeixen per uns mateixos recursos. Els paràmetres R_x i R_y són els factors de creixement de cada espècie i α i β quantifiquen la influència d'una espècie sobre l'altra. Pel nostre estudi, considerem que les dues espècies quan estan separades tenen la mateixa capacitat per sobreviure al medi ($R_x = R_y$) i que aquest factor de creixement és igual a 2.

Per fer els càlculs emprarem el programa "Herba1". El resultat es presenta gràficament i també es pot desar a un fitxer format per tres columnes. La primera és l'ordinal de l'instant de temps, la segona el nombre de membres de l'espècie X i la tercera el de l'espècie Y.

(a) Agafa com a quantitat inicial de membres de cada espècie $x_0 = 0.1$ i $y_0 = 0.05$. Calcula l'evolució temporal del sistema i representa-la gràficament. Indica quin és el resultat final (coexistència, extinció d'una espècie) per a les següents combinacions de paràmetres

i. $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.75$
ii. $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.25$
iii. $\alpha = 1.25$, $\beta = 0.75$
iv. $\alpha = 1.25$, $\beta = 1.25$

Resumeix els teus resultats en una taula.

(b) Repeteix el darrer apartat del punt anterior intercanviant els valors inicials de x i y, per comprovar si el resultat final depèn del nombre inicial de membres de cada espècie.

2. (∗∗) Utilitzant les equacions anteriors, troba els paràmetres que descriuen la interacció entre el *paramecium aurelia* i el *paramecium caudatum*. Les dades es refereixen al nombre de paramecis en 0.5 *cc* d'aigua.

Pots utilitzar el programa "Herba2". Aquest programa es diferencia de l'anterior perquè treballa amb els paràmetres i les variables del model sense normalitzar. El resultat es presenta gràficament i també es pot desar en un fitxer. Tan sols et caldrà fer servir les tres primeres columnes: el temps, el nombre de membres de l'espècie X i el nombre de membres de l'espècie Y.

Per quins valors has començat a provar? Per què?

3. ($*$) El model presa-depredador de Volterra

$$x_{i+1} = R_x\, x_i(1 - x_i - y_i)$$

$$y_{i+1} = R_x \beta x_i y_i$$

s'utilitza per modelitzar la interacció entre una població de depredadors i les seves preses. Els paràmetres R_x i β depenen de les característiques de cada espècie.

El programa "Lotka1" permet calcular l'evolució en funció del temps d'aquest sistema. El resultat es presenta gràficament i també es pot desar a un fitxer que té tres columnes: l'ordinal del temps, el nombre de preses i el nombre de depredadors. Totes les variables i paràmetre es refereixen al model normalitzat.

Per simplificar les coses, considera $\beta = 1$ i agafa uns quants valors diferents de R_x entre 0 i 4. Fes una gràfica representant la evolució temporal d'aquests sistemes. Es poden trobar punts fixos?

4. ($**$) Ets capaç de trobar unes condicions inicials i uns valors de R_x i β que reprodueixin les dades de la figura 2? No cal que reprodueixis amb detall la posició de tots els punts. Tan sols, de manera aproximada, l'amplitud de les oscil·lacions i el seu desfasament.

Pots emprar el programa "Lotka2". El resultat es presenta gràficament i també es pot emmagatzemar a un fitxer. L'estructura d'aquest fitxer és idèntica a la del fitxer generat pel programa "Herba2". Per aquest motiu pots ignorar de moment les dues darreres columnes, que es refereixen al model continu.

5. ($*$) El programa "Lotka3" dibuixa les trajectòries a l'espai de les fases. La principal diferència amb el programa "Lotka1" és que els resultats només es registren a partir d'un cert pas, que determina l'usuari. D'aquesta manera s'observa millor el comportament a llarg termini. L'estructura del fitxer que es pot desar és idèntica a la del fitxer generat pel programa "lotka1".

Torna a considerar $\beta = 1$ i explora diversos valors de R_x entre 3.4 i 3.6. A partir de quin moment les trajectòries es tornen caòtiques?

6. ($*$) Agafa de l'arxiu de textos el fitxer "lince.zip". Llegeix l'article que trobaràs a dintre i assenyala quins punts de coincidència hi ha amb les tendències dels models que has simulat.

Models continus

1. ($\diamondsuit\diamondsuit$) El programa "Edos1" resol numèricament un sistema d'equacions diferencials del tipus lotka–volterra

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x - ay)x$$

$$\frac{dy}{dt} = r_y(1 - y - bx)y$$

Aquestes equacions estan normalitzades de manera que $x = 1$ representa la capacitat del sistema. Per aquest motiu el programa et permet multiplicar el resultat final per aquest nombre. La resta de paràmetres i variables es refereixen al model normalitzat.

L'evolució temporal del sistema es representa gràficament. El resultat s'arxiva a un fitxer. Cada fila representa un instant de temps. La seva primera columna és el temps, la segona el nombre de membres (sense normalitzar) de l'espècie X i la tercera el de l'espècie Y.

Considera els següents valors pels paràmetres (a, b):

$$(0.75, 0.75),\ (0.75, 1.25),\ (1.25, 0.75),\ (1.25, 1.25).$$

Pel que fa a la resta de paràmetres, agafa $r_x = r_y = 2.0$ i $K_x = K_y = 1000$. Es a dir, el sistema té la mateixa capacitat per a les dues espècies i ambdues es reprodueixen d'una forma similar. Per a cada combinació de a i b prova diversos valors de x_0 i y_0 i dibuixa les seves trajectòries a l'espai de les fases.

Per fer-ho, hauràs de dibuixar la tercera columna en funció de la segona. Amb aquesta finalitat pots fer servir el programa "gnuplot". T'anirà bé anar canviant el nom dels fitxers de resultats per tenir els resultats de les diferents execucions del programa en fitxers diferents. El motiu és que el "gnuplot" no importa les dades dels fitxers que representa, sinó que les torna a llegir del fitxer cada cop que fa una representació.

Un cop tinguis representat un bon nombre de trajectòries, plantejat les següents preguntes.

(a) Quants punts fixos hi ha? Sempre són els mateixos?

(b) Són estables o inestables? Pots trobar un "punt de sella"? Depèn l'estabilitat dels valors de a i b?

2. (∗∗) A simple vista, proposa uns valors de x_0, y_0, α, β, r_x, r_y, K_x i K_y que donin uns resultats similars als de la Figura 1. Justifica el motiu de la teva elecció inicial. A base de prova i error millora aquest valors.

   Utilitza el programa "Edos2". Totes les variables i paràmetres d'aquest programa es refereixen al model sense normalitzar. El seu fitxer de resultats té una estructura similar a la del fitxer generat pel programa "Edos1".

   Quina relació hi ha entre els nous paràmetres i els que ja vas trobar a la pràctica anterior?

3. (♢♢) El model presa-depredador de Volterra

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x)x - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = abxy - dy$$

   es pot resoldre amb el programa "Edos3". L'evolució temporal del sistema es representa gràficament. Els resultats s'emmagatzemen a un fitxer, que té la mateixa estructura que els fitxers de resultats anteriors. Tots els paràmetres del programa són del model normalitzat.

   Prova els següents valors: $\Delta t = 0.01$, $n = 10000$, $x_0 = 10$, $y_0 = 1000$, $a = 200$, $b = 1$, $r_x = 200$, $d = 1$ i $K_x = 1000$. Com classificaries aquest punt fix? Canviant només a i r_x (però de manera que tinguin el mateix valor) troba altres tipus de punt fix. Si és necessari, dibuixa més d'una trajectòria a l'espai de les fases.

4. (∗∗) Intenta reproduir les dades de la Figura 2, aquest cop mitjançant el model continu. Utilitza el programa "Edos4". Els paràmetres són els del model sense normalitzar. L'evolució temporal del sistema es representa gràficament i els resultats es poden desar a un fitxer de la manera habitual.

   Mira d'establir una relació entre els paràmetres que has trobat i els que vas trobar pel model discret.

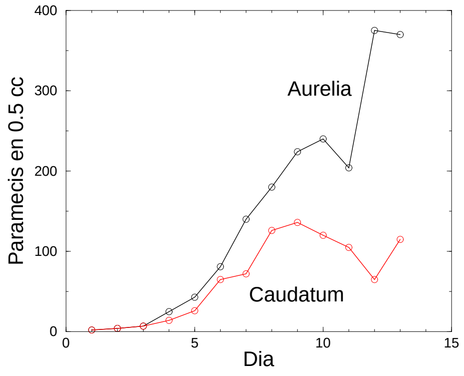

Figura 1: Evolució de dues espècies de paramecis

Dia	Aur.	Cau.
1	2	2
2	4	4
3	7	7
4	25	14
5	43	26
6	81	65
7	140	72
8	180	126
9	224	136
10	240	120
11	204	105
12	375	65
13	370	115

Taula 1: Dades de la Figura 1

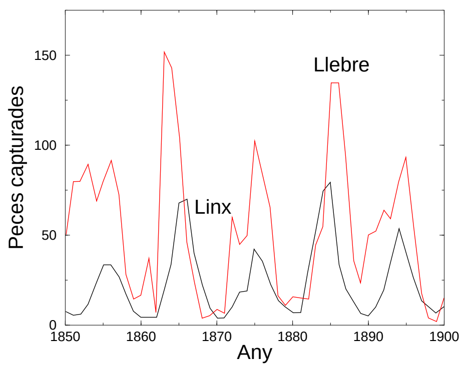

Figura 2: Captures de dues espècies

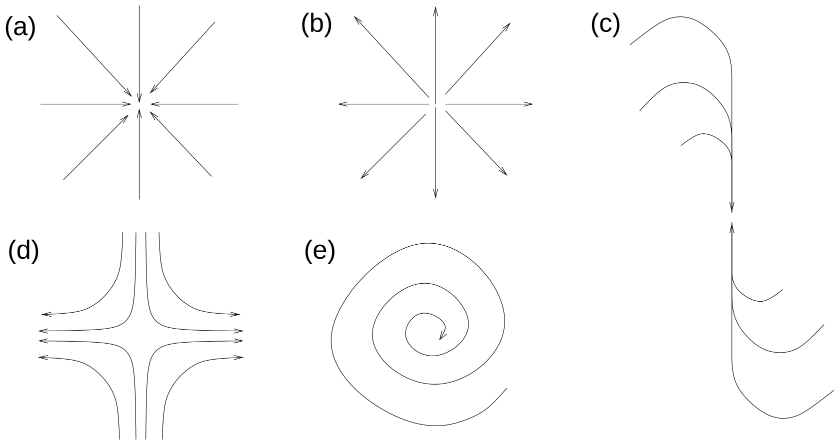

Figura 3: Tipus de punt fix: (a) node estable (b) node inestable (c) node degenerat (estable) (d) punt de sella (e) espiral