Models de creixement

Models tipus "bomba de població"

Les poblacions es poden modelitzar de manera *intensiva*, estudiant només el nombre de membres de cada espècie o *extensiva*, considerant de manera explícita la seva distribució a l'espai.

Els següents models són *intensius* i *independents de la densitat* (les probabilitats no depenen del nombre d'individus).

Creixement geomètric: modelitzem el temps de manera *discreta* i el resultat és una *eq. de recurrència.*

Paràmetres: B probabilitat de que un animal es reprodueixi i D probabilitat de que un animal mori, en el transcurs d'un interval de temps donat Δt (B i D adimensionals!).

$$N_{i+1} = BN_i + (1 - D)N_i = RN_i$$

Hem definit el *factor de creixement geomètric* com $R = 1 + (B - D)$. Cada i representa un interval d'una durada Δt. La solució és

$$N_i = R^i N_0$$

Creixement exponencial: modelitzem el temps de manera *contínua* i el resultat és una *eq. diferencial.*

Paràmetres: b probabilitat de que un animal es reprodueixi i d probabilitat de que un animal mori, per unitat de temps (b i d tenen dimensions $1/t$!).

$$\frac{dn(t)}{dt} = b\,n(t) - d\,n(t) = r\,n(t)$$

Definim la taxa intrínseca de creixement com $r = b - d$. La solució és

$$n(t) = e^{r\,t} n(0)$$

Equacions de recurrència

Dividim el temps en intervals. Les equacions de recurrència ens permeten calcular la població en els instants que separen els intervals.

$$x_{i+1} = f_\mu(x_i)$$

Exemple: Equació logística.

$$x_{i+1} = Rx_i(1 - x_i)$$

Els següents conceptes són importants:

1. Punts fixos: són els punts en els quals el sistema pot continuar indefinidament.
$$f(N^*) = N^*$$
2. Estabilitat: Els punts fixos poden ser estables ($|\lambda| < 1$) o inestables ($|\lambda| > 1$).
$$\lambda = \frac{\partial f_\mu(N^*)}{\partial N}$$
3. Bifurcacions: Un petit canvi en el paràmetre μ pot canviar completament els punts fixos del sistema.
4. Òrbites: Encara que no hi hagi un punt fix el sistema pot anar saltant entre una sèrie de valors una i altra vegada.
5. Atractor: Aparició del caos. No existeix òrbita però la trajectoria del sistema està restringida a una regió.

Característiques dels models geomètric i exponencial

Els dos models són equivalents si la relació entre el factor i la taxa de creixement és

$$R = e^{r\Delta t}$$

El creixement zero correspon a $R = 1$ $(r = 0)$.

El model queda caracteritzat completament trobant la taxa de creixement i el nombre inicial d'individus.

El logaritme del nombre d'individus creix linealment amb el temps

$$\ln(N_i) = \ln(R)\, i + \ln(N_0)$$

$$\ln[n(t)] = r\, t + \ln[n(0)]$$

Això ens permet trobar R i N_0 (r i $n(0)$) fent una regressió lineal d'aquestes dues magnituds.

Podem extendre el model considerant que el paràmetre R (r) varia amb el temps, o que la espècie està dividida en poblacions separades, cadascuna amb la seva R (r).

Estocasticitat ambiental

Un dels motius pels quals les poblacions varien és la successió de períodes més i menys favorables. Estudiarem aquest fenòmen amb el següent model

$$N_{i+1} = R(\zeta)N_i$$

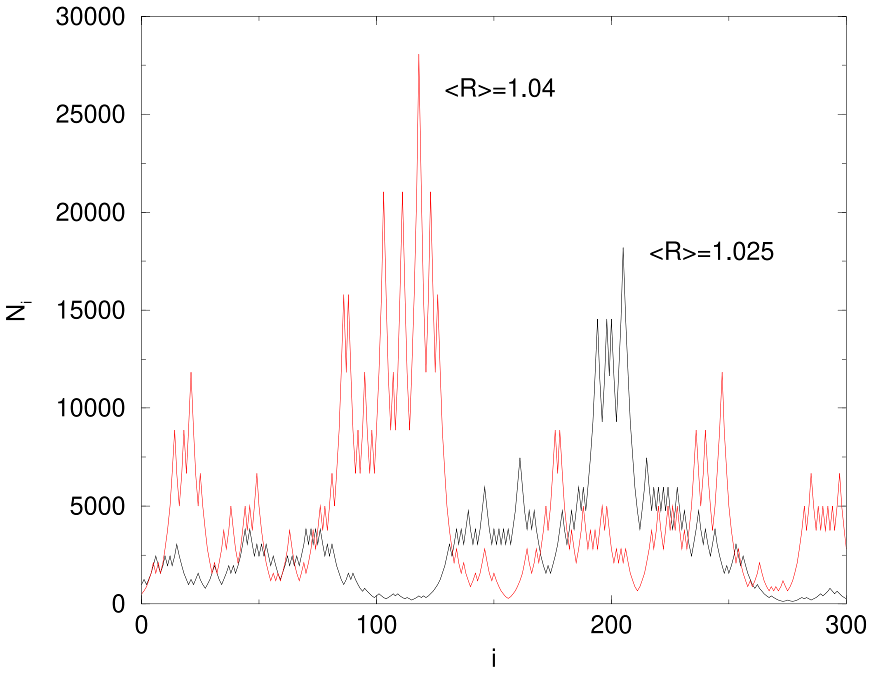
on ζ és una variable aleatòria. Per exemple,

- Probabilitat de que $R = 5/4$, 0.5
- Probabilitat de que $R = 4/5$, 0.5

Si la mitja geomètrica

$$\sqrt{R_1 R_2}$$

és igual a 1, llavors la població fluctuarà sense que hi hagi un creixement o un decreixement clar.



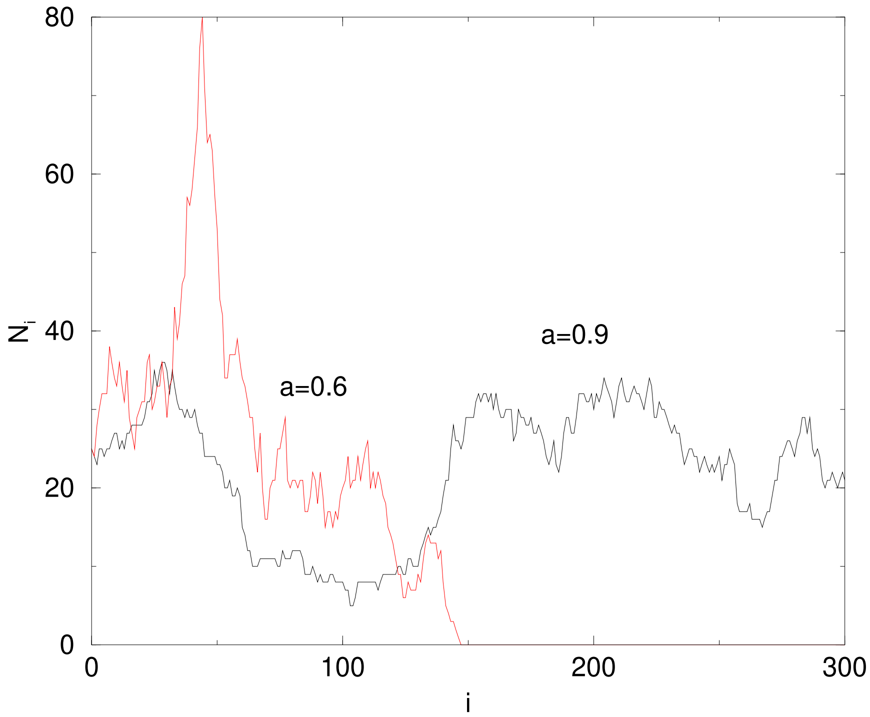
Estocasticitat demogràfica

Fins ara hem suposat que en nombre de nous neixements era $B\ N_i$. Això tan sols és veritat per valors grans de N_i.

Per poblacions petites utilitzarem el següent model

1. Fem el següent tantes vegades com individus
   (a) Probabilitat de que tingui un fill: 0.5
   (b) Probabilitat de que tingui dos fills: 0.25
   (c) Probabilitat de que no en tingui cap: 0.25
   (d) Probabilitat de que mori: $0 \times 0.25 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.25$
2. Ho tornem a repetir pel següent instant de temps

Podem utilitzar altres probabilitats, per variar l'importància de les fluctuacions.



Models logístics

Fins ara hem utilitzat models on les probabilitats de neixement i mort eren independents del nombre d'individus.

El següent pas és considerar que hi ha una dependència lineal.

Model logístic discret:

$$B = B_0 - B_1 N$$

$$D = D_0 + D_1 N$$

Es millor definir dos paràmetres: el factor geomètric de creixement i la capacitat del sistema.

$$R = 1 + B_0 - D_0 \;\; ; \;\; K = \frac{B_0 - D_0}{B_1 + D_1}$$

Llavors tenim

$$N_{i+1} = N_i + (R-1)\left(1 - \frac{N_i}{K}\right) N_i$$

Model logístic continu:

$$b = b_0 - b_1 n$$

$$d = d_0 + d_1 n$$

Definim la taxa intrínseca de creixement i la capacitat del sistema

$$r = b_0 - d_0 \;\; ; \;\; K = \frac{b_0 - d_0}{b_1 + d_1}$$

Ens queda

$$\frac{dn(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{n(t)}{K}\right) n(t)$$

la solució de la qual és

$$n(t) = \frac{K}{1 + [K/n(0) - 1]e^{rt}}$$

Forma normalitzada del model logístic discret

Es freqüent veure el model logístic expressat així

$$x_{i+1} = R(1 - x_i)x_i$$

Per veure que és equivalent al nostre model definim

$$Q = \frac{1 + B_0 - D_0}{B_1 + D_1}$$

De manera que l'equació logística queda

$$N_{i+1} = R\left(1 - \frac{N_i}{Q}\right)N_i$$

Ara Q no és la capacitat del sistema, sinó un límit per sobre del qual el model no te validessa matemàtica. Si normalitzem el nombre d'individus respecte Q

$$x_i = \frac{N_i}{Q}$$

arribem a l'equació de dalt.

Forma normalitzada del model logístic continu

També podem normalitzar el model logístic continu

$$x(t) = \frac{1}{1 + [1/x(0) - 1]e^{rt}}$$

que és solució de

$$\frac{dx(t)}{dt} = r\,(1 - x(t))\,x(t)$$

on s'ha utilitzat la normalització

$$x_i = \frac{N_i}{K}$$

que es diferent a la del model discret.

Característiques dels models logístics

Els models logístics depenen de 3 paràmetres: N_0, R i Q ($n(0)$, r i K).

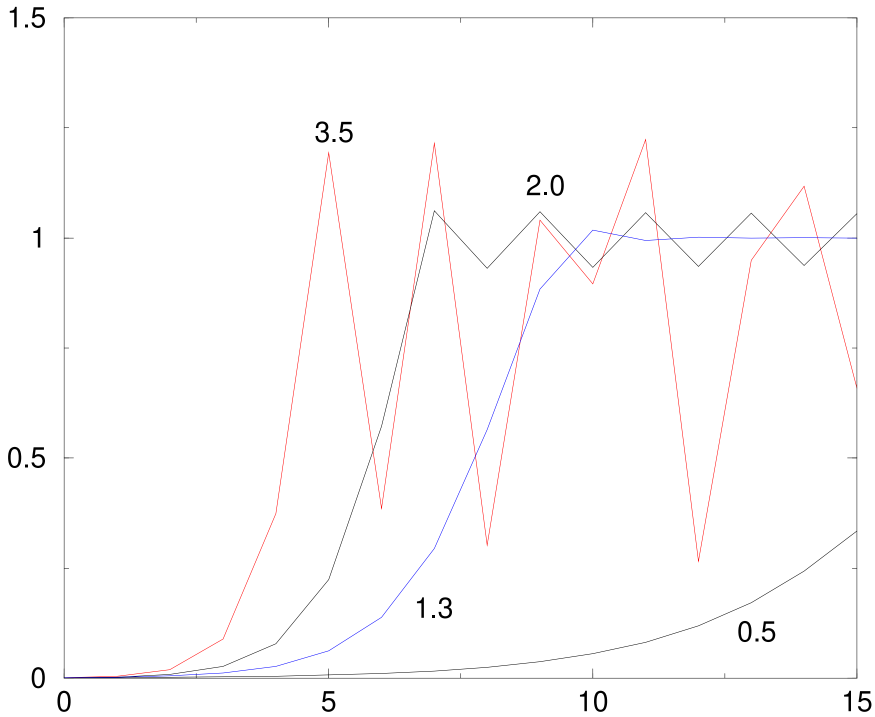
El model continu i el discret no són equivalents. El primer sempre tendeix a un valor estable. El segon pot tendir a un òrbita o, fins i tot, al comportament caòtic.

No obstant, a vegades són vàlides les següents equivalències:

$$R \equiv e^{r\Delta t} \simeq 1 + r\Delta t$$

$$Q \equiv K\left(1 + \frac{1}{r\Delta t}\right) \simeq K\left(1 + \frac{1}{R-1}\right)$$

on Δt és el temps que atribuïm a dos passos del model discret.



El model continu no sempre és més realista que el discret. Quan la reproducció te lloc en un interval de temps relativament petit, el model discret pot ser més realista.

Autòmates cel.lulars

Un *autòmata cel.lular* consisteix en un conjunt de caselles (cel.lules) cadascuna de les quals pot tenir un nombre finit d'estats diferents. A més, totes les caselles es governen per les mateixes lleis.

Un autòmata cel.lular evoluciona per torns. L'estat d'una casella en el següent torn depén de la seva història i de l'estat dels seus veins més propers.

Es caracteritzen per

- Organització geomètrica
- Què s'entèn per caselles properes
- Nombre d'estats possibles
- Regles d'evolució

Un autòmata cel.lular és un model *extensiu* ja que es té en compte la distribució a l'espai.

Exemple: el joc de la vida

1. Una casella "morta" es converteix en "viva" si té exactament 3 caselles vives entre les 8 caselles veines.
2. Una casella "viva" es converteix en "morta" si menys de 2 o més de 3 caselles, de les 8 veines, són "vives".