Relació entre espècies (models continus)

Models continus

Els models continus són:

Competència de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x - ay)x$$

$$\frac{dy}{dt} = r_y(1 - y - bx)y$$

Presa-depredador de Volterra

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x)x - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = abxy - dy$$

Recordem que la versió discreta d'aquests models era

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - \alpha y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i - \beta x_i)y_i$$

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i)x_i - \alpha x_i y_i$$

$$y_{i+1} = \alpha\beta x_i y_i + (1 - \delta)y_i$$

Equivalència amb els models discrets

No són ben bé equivalents als discrets. No obstant, les següents relacions poden, en certs casos, fer que ho siguin

1. r és la taxa de creixement, que està relacionada amb el factor de creixement
$$r_i = \frac{\ln(R_i)}{\Delta t}$$
2. La normalització K és la capacitat del sistema, relacionada amb Q per
$$Q_i = K_i \left(1 + \frac{1}{r_i \Delta t}\right) \simeq K_i \left(1 + \frac{1}{R_i - 1}\right)$$
En el cas presa-depredador, els depredadors utilitzen la mateixa normalització que les preses.
3. Paràmetres
   (a) Competència
$$a = \frac{Q_x}{K_x} \frac{K_y}{Q_y} \alpha$$
$$b = \frac{Q_y}{K_y} \frac{K_x}{Q_x} \beta$$
   (b) Presa–Depredador
$$a = \frac{K_x}{Q_x} \frac{1}{\Delta t} \alpha$$
$$b = \beta$$
$$d = \frac{\delta}{\Delta t}$$

Equacions diferencials

Dividim el temps en intervals. Les equacions de recurrència ens permeten calcular la població en els instants que separen els intervals.

$$\frac{dx}{dt} = f(\mu, x)$$

Els següents conceptes són importants:

1. Punts fixos: són els punts en els quals el sistema pot continuar indefinidament.
$$f(\mu, x^*) = 0$$
2. Estabilitat: Els punts fixos poden ser estables ($|\lambda| < 1$) o inestables ($|\lambda| > 1$).
$$\lambda = \frac{\partial f(\mu, x^*)}{\partial x}$$
3. Bifurcacions: Un petit canvi en el paràmetre μ pot canviar completament els punts fixos del sistema.
4. Òrbites: Encara que no hi hagi un punt fix el sistema pot anar recorrent una sèrie de valors una i altra vegada.
5. Atractor: Aparició del caos. No existeix òrbita però la trajectoria del sistema està restringida a una regió.

Estabilitat en sistemes

Tot el que s'ha dit, també és aplicable a sistemes d'equacions diferencials

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mu, \vec{x})$$

Els punts fixos es troben mitjançant un sistema d'equacions algebraiques

$$f_i(\mu, \vec{x^*})$$

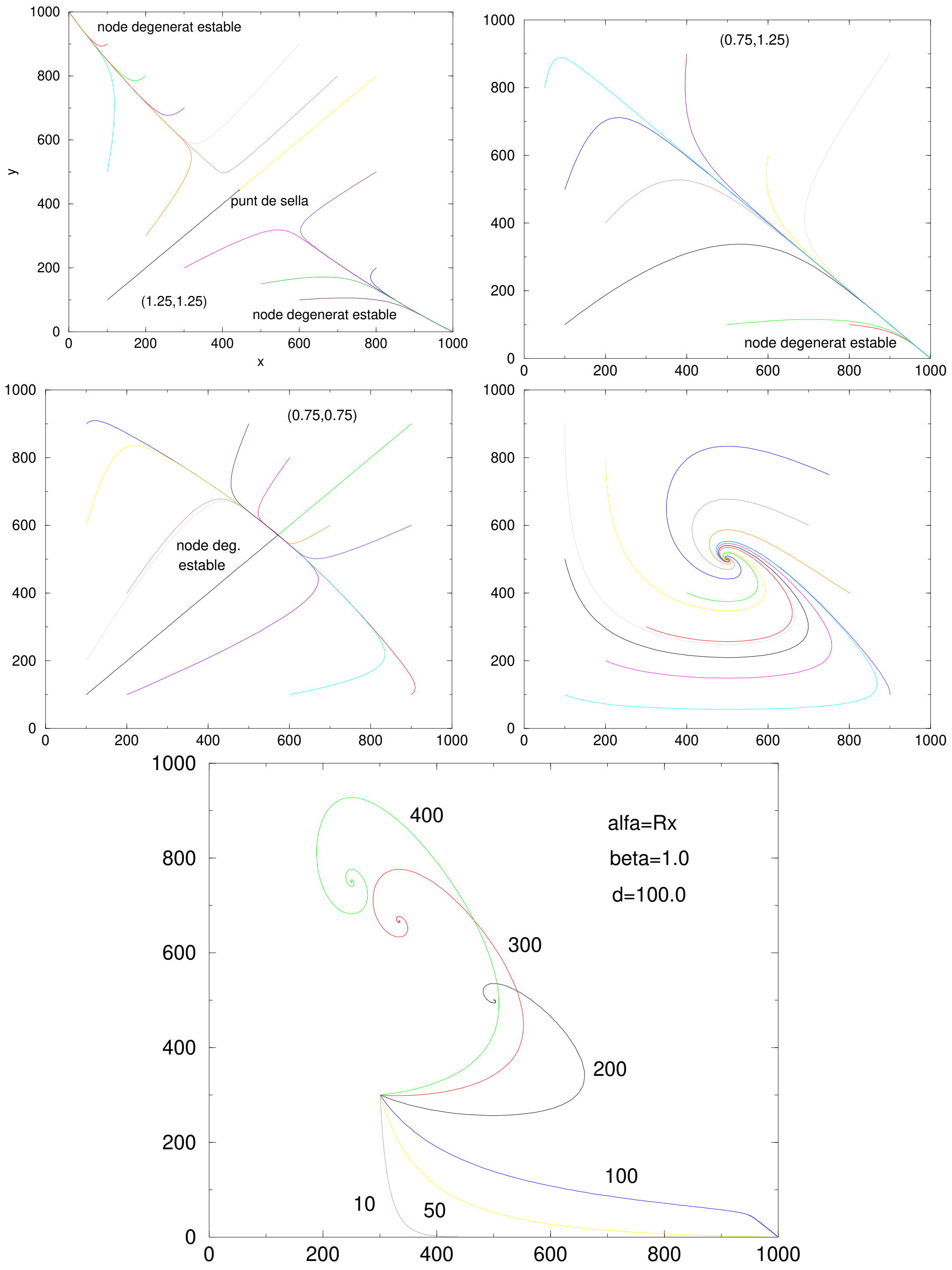
Per discutir l'estabilitat del sistema ens cal trobar els valors propis λ_i de la matriu jacobiana, avaluada en el punt fix

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(\mu, \vec{x^*})}{\partial x_j}$$

Cal que tots els λ_i siguin negatius per a que el punt fix sigui estable. Els valors propis es troben a partir de l'equació característica

$$|J - \lambda I| = 0$$

Resultats


node degenerat estable
punt de sella
(1.25,1.25)
node degenerat estable
x
y
(0.75,1.25)
node degenerat estable
(0.75,0.75)
node deg.
estable
400
300
200
100
10
50
alfa=Rx
beta=1.0
d=100.0