Relació entre espècies (models discrets)

Models discrets

Les poblacions es poden modelitzar de manera *intensiva*, estudiant només el nombre de membres (normalitzat) de cada espècie o *extensiva*, considerant de manera explícita la seva distribució a l'espai.

- Variables intensives: Eqs. de recurrència.
- Variables extensives: Automàtes cel.lulars.

La alternativa clàssica als models discrets és la utilització de models continus basats en equacions diferencials.

Estat actual: atesa la dificultat de justificar els paràmetres emprats a partir de primers principis, s'utilitzen mètodes d'IA per predir el comportament del sistema.

- Sistemes basats en coneixements dels experts (regles)
- Sistemes basats en l'experiència (casos)

Sistemes d'equacions de recurrència

Aquest cop tenim vàries equacions de recurrència. A cada pas s'avaluen totes les equacions del sistema, que poden tenir variables creuades.

$$x_{i+1} = f_\mu(x_i, y_i)$$

$$y_{i+i} = g_\mu(x_i, y_i)$$

Els següents conceptes són importants:

1. Punts fixos: són els punts en els quals el sistema pot continuar indefinidament.

$$f(x^*, y^*) = x^*$$

$$g(x^*, y^*) = y^*$$

2. Estabilitat: Els punts fixos poden ser estables (sempre es compleix $|\lambda_i| < 1$) o inestables (existeix algun $|\lambda_i| > 1$).

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}\lambda\right)$$

3. Bifurcacions: Un petit canvi en el paràmetre μ pot canviar completament els punts fixos del sistema.

4. Òrbites: Encara que no hi hagi un punt fix el sistema pot anar saltant entre una sèrie de punts una i altra vegada.
5. Atractor: Aparició del caos. No existeix òrbita però la trajectoria del sistema està restringida a una regió.

Competència entre espècies de Lotka-Volterra

Partim d'una equació logística

$$x_{i+1} = R(1 - x_i)x_i$$

Normalització: $x = 1$ representa el valor vàlid més gran. La capacitat del sistema llavors és

$$x = 1 - \frac{1}{R}$$

Dues espècies sense interacció venen donades per

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i)y_i$$

Podem modelitzar la competència entre elles mitjançant dos paràmetres α i β que representen la influència d'una sobre l'altra

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - \alpha y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i - \beta x_i)y_i$$

Aquestes equacions modelitzen dues espècies similars que competeixen per uns mateixos recursos.

Model presa-depredador de Volterra

Serveix per modelitzar la interacció entre una presa i el seu depredador.

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i)x_i - \alpha x_i y_i$$

$$y_{i+1} = \alpha\beta x_i y_i + (1 - \delta)y_i$$

Modelitzem la presa emprant una equació semblant a les del cas anterior. Ara interpretem α com la fracció de preses capturades a cada torn per un depredador.

Els depredadors són independents de la densitat. El nombre de depredadors que neixen com a conseqüència d'una captura és β mentre que la fracció de depredadors que moren en un torn és δ.

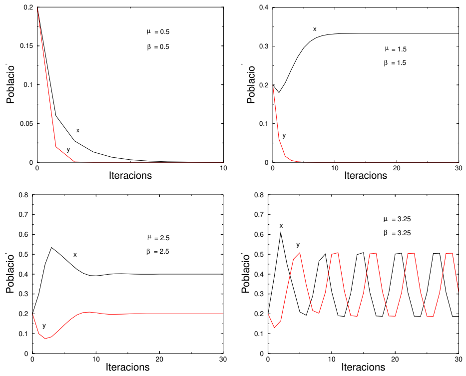

Figure 1: Evolució en funció del temps

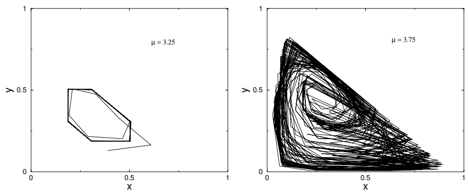

Figure 2: Trajectòries a l'espai de les fases

Per estudiar el comportament qualitatiu d'aquestes equacions sovint s'agafa $\delta = 1$ (tots els depredadors es renoven a cada torn) i $\alpha = R_x$ (cada depredador captura R_x preses per torn).

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - y_i)x_i$$

$$y_{i+1} = R_x \beta x_i y_i$$

Estudi dels models

Aquestes equacions són no-lineals. Per això presenten comportaments molt diversos pel que fa a l'existència de punts fixos, òrbites i atractors.

Per estudiar aquests models, utilitzarem dos tipus de gràfiques:

1. Evolució temporal de les variables.
2. Trajectòries.

L'objectiu és determinar l'existència de punts fixos, òrbites i atractors. També és important saber com depenen aquests resultats dels valors dels paràmetres R, α, β i δ (bifurcacions). Finalment cal investigar l'estabilitat dels punts fixos.

Autòmata cel.lular

Podem estudiar la relació entre preses i depredadors amb un autòmata cel.lular (model extensiu).

1. Una casella pot estar ocupada per una presa, un depredador o pot estar buida.
2. A cada torn, cada una de les preses es mou a l'atzar a una de les caselles properes buides.
   (a) Si la seva edat arriba a l'edat de reproducció, llavors és converteix en dues preses d'edat 0. Una a la casella inicial i l'altra a la casella final.
   (b) Si no hi ha caselles properes buides, no es pot moure ni reproduir.
3. A cada torn, cada un dels depredadors des mou a l'atzar a una casella propera ocupada per una presa (eliminant-la!), o si no n'hi ha cap a una casella propera buida (també a l'atzar).
   (a) La reproducció dels depredadors és com la de les preses.
   (b) Si totes les caselles properes estan ocupades per depredadors, no es pot moure ni reproduir.
   (c) el depredador es eliminat si passa un cert nombre de torns sense fer una captura.

Els paràmetres del model són: nombre inicial de preses i depredadors, edat de reproducció de preses i depredadors i periòde de inanició.

Tot i que aquest autòmat no és equivalent al model de Volterra, presenta un comportament qualitatiu similar.